сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-82-239

А.Б.Швачка, А.Б.Яновски

МЕТОД УОЛКВИСТА-ЭСТАБРУКА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ.

Случай одной пространственной переменной.

1982

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, какие замечательные результаты были получены после открытия техники обратной задачи рассеяния и какие большие надежды возлагаются на теорию нелинейных дифференциальных уравнений и на так называемые солитонные решения. В связи с этим развивались и развиваются очень разные по своему математическому формализму методики. В работе приведен краткий обзор по одной из них - так называемой процедуре продолжения Уолквиста-Эстабрука. Интерпретируя эту структуру как связность, можно получить известные условия нулевой кривизны /НК/ для многокомпонентного нелинейного уравнения Шредингера с $U(p,q)$ -симметрией[1], а также для других уравнений, входящих в так называемую систему АКНС[2,19]. План работы таков: в п.1 кратко излагается сущность метода, пункт 2 посвящен интепретации структуры продолжения как связности.

1. СТРУКТУРА ПРОДОЛЖЕНИЯ УОЛКВИСТА-ЭСТАБРУКА

С помощью примеров обсудим идею метода. Такой подход полезен, имеется интересная работа Каупа[3], которая построена таким образом.

Хорошо известно, что можно получить полезную информацию о данном нелинейном дифференциальном уравнении, если представить его в виде условия интегрируемости для некоторой системы уравнений. Например, уравнение Бюргерса

$$u_t + u_{xx} + (u^2)_x = 0 \qquad /1/$$

можно представить в виде условия интегрируемости системы

$$\zeta_x = u\zeta, \quad \zeta_t = -(u_x + u^2)\zeta, \qquad /2/$$

$$\zeta_{xt} = \zeta_{tx} \Rightarrow u_t + u_{xx} + (u^2)_x = 0. \qquad /3/$$

После этого приходим к известной нелинейной замене Кола-Хопфа[4,5]

$$u = \frac{\zeta_x}{\zeta} \Rightarrow \zeta_t + \zeta_{xx} = 0. \qquad /4/$$

Вспомним также уравнение Кортевега-де-Вриза /КдВ/

$$u_t + 12u\, u_x + u_{xxx} = 0. \qquad /5/$$

Именно представление этого уравнения в виде условия интегрируемости системы

$$\zeta_x = \lambda - 2u - \zeta^2, \quad \zeta_t = 4[(u+\lambda)(2u+\zeta^2-\lambda) + \frac{1}{2}u_{xx} - 2u_x\zeta] \qquad /6/$$

позволило разработать метод обратной задачи для решения нелинейных уравнений /6/.

Можно показать, что тем же самым условиям удовлетворяет и другая система:

$$\zeta_x = \begin{pmatrix} 0 & \lambda-2u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\zeta, \quad \zeta_t = \begin{pmatrix} -2u_x & 4(u+\lambda)(2u-\lambda)+2u_{xx} \\ -4(u+\lambda) & 2u_x \end{pmatrix}, \qquad /7/$$

где, ζ - вектор-столбец вида $\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix}$.

Обе системы включают в себя независимый параметр λ, который играет роль спектрального параметра для обратной задачи. Отметим, что система /7/ уже линейна.

Возвращаясь к идее нахождения систем, для которых данное нелинейное уравнение /или система уравнений/ является условием интегрируемости, приходим к выводу о том, что задача может иметь не единственное решение. Следовательно, с самого начала следует иметь в виду, что процедура нахождения таких систем является неоднозначной.

Переформулируем сказанное выше на языке дифференциальных форм. В работе широко используется аппарат дифференциальных форм, теория интегрируемых систем Пфаффа и теория связностей Картана-Эресмана. Подробное изложение этих вопросов можно найти в работах /7,8,9,10/.

Ниже мы следуем известной работе Уолквиста-Эстабрука /11/. Мы также сохраним частично обозначения, используемые в этой работе. Как и в /11/, суть метода иллюстрируется на примере уравнения КдВ. Поиск решения эволюционного уравнения подобного типа можно рассматривать как задачу нахождения интегрального многообразия для системы форм α_i.

Положим

$$z = u_x, \quad p = z_x \qquad /8/$$

и рассмотрим многообразие $X = \{(x, t, u, z, p)\} = \boldsymbol{R}^5$. Пусть S^2 есть подмногообразие в X, которое зададим уравнениями

$$z = u_x, \quad p = u_{xx}, \quad u = u(x,t), \qquad /9/$$

где u есть решение уравнения КдВ.

Легко проверить, что S^2 является интегральным многообразием для системы форм на X:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= du\wedge dt - z\,dx\wedge dt, \\ \alpha_2 &= dz\wedge dt - p\,dx\wedge dt, \\ \alpha_3 &= -du\wedge dx + dp\wedge dt + 12uz\,dx\wedge dt. \end{aligned} \qquad /10/$$

Здесь du - внешняя производная от u и $\wedge$ - внешнее произведение.

Действительно, если j представляет собой каноническое вложение S^2 в X, то условие

$$j^*\alpha_1 = j^*\alpha_2 = j^*\alpha_3 = 0 \qquad /11/$$

эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} &(d\,j^*u)\wedge dt - (j^*z)\,dx\wedge dt = 0, \\ &(d\,j^*z)\wedge dt - (j^*p)\,dx\wedge dt = 0, \\ &-(dj^*u)\wedge dx + (dj^*p)\wedge dt + 12\,j^*(uz)\,dx\wedge dt = 0. \end{aligned} \qquad /12/$$

Следовательно, на S^2 формы /12/ будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u}{\partial x} - z\right)dx\wedge dt = 0, \\ &\left(\frac{\partial z}{\partial x} - p\right)dx\wedge dt = 0, \\ &\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + 12uz\right)dx\wedge dt = 0, \end{aligned} \qquad /13/$$

что эквивалентно уравнению /5/. Следовательно, задачу нахождения решения уравнения /5/ можно рассматривать как задачу нахождения интегрального многообразия для системы /10/. Легко показать, что система /10/ интегрируема, так как

$$d\alpha_1 = dx\wedge\alpha_2, \quad d\alpha_2 = dx\wedge\alpha_3, \quad d\alpha_3 = -12dx\wedge(z\alpha_1 + u\alpha_2). \qquad /14/$$

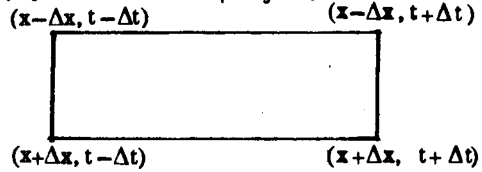
Тем самым обеспечивается, по крайней мере локальное, существование интегрального многообразия S^2 для любой точки из X. Вообще будем рассматривать только интегрируемые системы форм, так как неинтегрируемые могут быть устроены весьма специальным образом.

Все понятия, связанные с эволюционными уравнениями, могут быть переформулированы на языке форм. В частности, введем определение интеграла движения.

<u>Интеграл движения</u> β есть 1-форма на X, которая замкнута на S^2, т.е. $j^*d\beta = 0$. Или, что то же самое, $d\beta$ принадлежит идеалу алгебры форм, определяемому формами /10/.

Проиллюстрируем это определение на примере формы $\beta = u\,dx - (6u^2 + p)dt$. Легко убедиться, что $j^*d\beta = 0$, так как $d\beta = -\alpha_3$.

Рассмотрим замкнутую кривую γ на S^2, которую можно получить с помощью отображений /9/ /т.е. карты S^2/ из замкнутой кривой γ_0 на $R^2=\{(x,t)\}$. Пусть кривая γ_0 на R^2 соединяет точки, указанные на рисунке



Из теоремы Стокса для кривой γ на S^2 получаем:

$$\int_{\gamma} j_1^* \beta = \int_{\gamma_s} j^* d\beta, \qquad /15/$$

где γ_s есть область в S^2, ограниченная кривой γ, и j_1 представляет собой каноническое вложение γ в X. Так как $j^* d\beta=0$, то из /15/ следует, что $\int_{\gamma} j_1^* \beta = 0$. Можно показать, что

$$\int_{\gamma} j_1^* \beta = -\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} [(6u^2+u_{xx})|_{x+\Delta x} - (6u^2+u_{xx})|_{x-\Delta x}]dt - \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} (u|_{t+\Delta t} - u|_{t-\Delta t})dx. \qquad /16/$$

Если при $x \to \infty$ $u, u_x, u_{xx} \to 0$, то, переходя к пределу $\Delta x \to \infty$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (u(x,t+\Delta t) - u(x,t-\Delta t))dx = 0, \qquad /17/$$

т.е. величина

$$w_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx \qquad /18/$$

не зависит от t.

Что же касается систем уравнений, условия интегрируемости которых есть искомое уравнение, то их решение очевидным образом интерпретируется как интегральное многообразие для системы 1-форм ω^i, заданных на пространстве $X \times Y$ /Y включает переменные ζ /. Можно выбрать переменные так, чтобы уравнения имели вид

$$\zeta_x = A(u,z,p,\zeta), \quad \zeta_t = B(u,z,p,\zeta), \qquad /19/$$

где A, B -матрицы-столбцы. Для получения этих уравнений достаточно потребовать, чтобы формы ω^i имели вид

$$\omega^i = d\zeta^i + F^i(u,z,p,\zeta)dx + G^i(u,z,p,\zeta)dt, \quad i=1,2,\ldots,M. \qquad /20/$$

Эти формы называются формами продолжения, а их нахождение - процедурой Уолквиста-Эстабрука [11,12,13].

Самое важно условие, которому должны удовлетворять формы ω^i, состоит в следующем: необходимо, чтобы условия интегрируемости для системы /19/ /или для форм /20// совпадали с начальными уравнениями /уравнениями движения/ или были бы их следствиями. С учетом условия Фробениуса [13] для совместности систем /10/, /20/ достаточно потребовать, чтобы формы $d\omega^i$ находились в идеале, определяемом системами /10/, /20/:

$$d\omega^i = f^{ij}\alpha_j + \eta_s^i \wedge \omega^s, \quad j=1,2,\ldots,N; \quad i,s=1,2,\ldots,M \qquad /21/$$

/для КдВ $N=3$ /. Здесь f^{ij} есть функции на $X \times Y$ и η_j^i – 1-формы на $X \times Y$ /всюду предполагается суммирование по повторяющимся индексам/. При наличии этого условия системы /10/, /20/ имеют общее интегральное многообразие S^2 в $X \times Y$. Так как в /10/ не входят переменные ζ, то проекция $S^{2\prime}$ на X будет интегральным многообразием для /10/. /Говоря, что формы заданы на $X \times Y$, мы, вообще говоря, допускаем некоторую неточность: имеются в виду формы $\pi^* \alpha_i$, где π есть проекция $X \times Y$ на X, но так как и X, и Y заданы одной картой, то не возникает никаких осложнений.

Условие /20/ определяет так называемую структуру продолжения PS (PROLONGATION STRUCTURE). Переменные ζ называются псевдопотенциалами. Может случиться, что для какого-нибудь i_1 коэффициенты форм F^{i_1}, G^{i_1} не зависят от переменных ζ; тогда, учитывая, что ω^{i_1} должна равняться нулю на $S^{2\prime}$, получим:

$$\frac{\partial \zeta^{i_1}}{\partial x} = -F^{i_1}(u(x,t), z(x,t), p(x,t)),$$
$$\frac{\partial \zeta^{i_1}}{\partial z} = -G^{i_1}(u(x,t), z(x,t), p(x,t)). \qquad /22/$$

Такие переменные ζ^{i_1} называются потенциалами. В этом случае разность $\omega^{i_1} - d\zeta^{i_1}$ является интегралом движения. Иногда имеет смысл различать формы из /10/. Например, из /13/ видно, что α_1 и α_2 используются только для того, чтобы определить производные по x, тогда как α_3, действительно, определяет уравнение КдВ. В таком случае говорят, что α_1 и α_2 есть формы линеаризации, а α_3 - динамическая форма.

Для того чтобы облегчить применение метода PS, проделаем некоторые выкладки, результаты которых легко могут быть использованы в конкретных случаях.

Пусть дифференциальное уравнение /или систему уравнений/ можно задать с помощью интегрируемой системы 2-форм:

$$\alpha_i = A_i^k(\psi)d\psi_k \wedge dx + B_i^k(\psi)d\psi_k \wedge dt + C_i(\psi)dx \wedge dt,$$
$$i=1,2,\ldots,N, \quad k=1,2,\ldots S, \quad X=\{(x,t,\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_s)\}. \qquad /23/$$

Можно показать, что условия /21/ эквивалентны следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial F^j}{\partial \psi_k} = f^{j^s} A_s^k , \qquad \frac{\partial G^j}{\partial \psi_k} = f^{j^s} B_s^k , \qquad /24/$$

$$f^{j^s} c_s = -\left(F^i \frac{\partial G^j}{\partial \zeta^i} - G^i \frac{\partial F^j}{\partial \zeta^i}\right) = -[F,G]^j . \qquad /25/$$

Выражение в скобках есть скобка Ли векторных полей, зависящих только от ζ.

В большинстве случаев удается исключить из системы /24/, /25/ функции f^{j^s}. Оставшиеся уравнения включают только F^i, G^i. В случае уравнения КдВ получим:

$$\frac{\partial F^j}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F^j}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F^j}{\partial u} + \frac{\partial G^j}{\partial p} = 0, \quad j = 1,2,\ldots,M = \dim Y , \qquad /26/$$

$$z \frac{\partial G^j}{\partial u} + p \frac{\partial G^j}{\partial z} - 12\, uz \frac{\partial G^j}{\partial p} + [G,F]^j = 0. \qquad /27/$$

Решение /26/ имеет следующий вид:

$$F = 2X_1(\zeta) + 2u X_2(\zeta) + 3u^2 X_3(\zeta),$$

$$G = -2(p + 6u^2) X_2(\zeta) + 3(z^2 - 8u^3 - 2up) X_3(\zeta) + 8u X_5(\zeta) + \qquad /28/$$

$$+ 4u^2 X_6(\zeta) + 4z X_7(\zeta).$$

В /28/ F и G-столбцы и $X - M$-мерные векторы, зависящие только от ζ, т.е. векторные поля на Y. Как следует из /27/, необходимо, чтобы выполнялись следующие соотношения для полей:

$$[X_1, X_3] = [X_2, X_3] = [X_1, X_4] = [X_2, X_6] = 0,$$

$$[X_1, X_2] = -X_7, \ [X_1, X_4] = X_5, \ [X_2, X_7] = X_6, \qquad /29/$$

$$[X_1, X_5] + [X_2, X_4] = 0, \quad [X_3, X_4] + [X_1, X_6] + X_7 = 0.$$

Отметим, что приведенный набор коммутационных соотношений не является полным. Используя тождество Якоби, можно получить еще два уравнения:

$$[X_2, X_5] = [X_1, X_6], \quad [X_6, X_7] = X_6 . \qquad /30/$$

Однако в дальнейшем получаем все более и более сложные коммутационные соотношения.

Допустим, что

$$[X_3, X_4] = X_8 , \quad [X_1, X_5] = X_9 , \qquad /31/$$

т.е. введем новые поля X_8 и X_9. Можно показать, что и в этом случае набор коммутационных соотношений не является полным. Задача же состоит в том, чтобы получить некоторую конечную алгебру Ли векторных полей и с помощью /28/ найти PS.

Трудность состоит в нахождении способа замыкания алгебры. Эта процедура является неоднозначной. С другой стороны, даже если мы замкнули алгебру, то возникает неоднозначность за счет выбора представления. В этом пункте - основная трудность применения метода Уолквиста-Эстабрука [20].

Когда представление найдено и если оно является однопараметрическим, то структура продолжения определяет уравнения линейной задачи. Отметим, что метод позволяет найти соответствующие уравнения обратной задачи в случае, если они существуют, но не отвечает на вопрос о самом существовании этих уравнений.

Вернемся снова к уравнению КдВ. Для того, чтобы замкнуть алгебру, Эстабрук и Уолквист положили

$$X_9 = C^m X_m , \quad m = 1,2,\ldots,8, \qquad /32/$$

где C^m - константы, т.е. потребовали, чтобы независимые векторные поля далее не генерировались. Можно показать, что если положить поля $X_1,\ldots,X_8$ линейно независимыми, то из коммутационных соотношений следует, что

$$C^m = 0, \quad m \neq 7,8, \quad C^7 = -C^8 = \lambda. \qquad /33/$$

При выполнении этих условий алгебра оказывается замкнутой. Конкретный вид векторных полей приведен в работе [11]. Формы продолжения имеют следующий вид:

$$\omega^1 = d\zeta^1 + dx - 4\lambda\, dt,$$

$$\omega^2 = d\zeta^2 + \exp(2\zeta^3) dx - 4\exp(2\zeta^3)(u + \lambda) dt,$$

$$\omega^3 = d\zeta^2 + \zeta^8 dx + [2z - 4\zeta^8 (u + \lambda)] dt,$$

$$\omega^4 = d\zeta^4 + 4\lambda dt, \qquad /34/$$

$$\omega^5 = d\zeta^5 + \zeta^7 dx + (z - 6\zeta^6) dt,$$

$$\omega^6 = d\zeta^6 + u^2 dx - (z^2 - 8u^3 - 2up) dt,$$

$$\omega^7 = d\zeta^7 + u\, dx - (p + 6u^2) dt,$$

$$\omega^8 = d\zeta^8 + (2u + (\zeta^8)^2 - \lambda) dx - 4[(u + \lambda)(2u + (\zeta^8)^2 - \lambda) +$$

$$+ \frac{1}{2} p - z\zeta^8] dt .$$

Отметим, что самой примечательной из этих форм является форма ω^8. Видно, что $\omega^{1,4}$ тривиальны, а формы $\omega^{6,7}$ суть известные потенциалы. Из условия обращения в нуль формы ω^8 на интегральном многообразии и полагая $\zeta = \zeta^8$, получим:

$$\begin{aligned} \zeta_x &= -(2u + \zeta^2 - \lambda), \\ \zeta_t &= 4[(u+\lambda)(2u+\zeta^2-\lambda) + \frac{1}{2} p - z\zeta]. \end{aligned} \qquad /35/$$

Тем самым мы пришли к уравнениям линейной задачи рассеяния /6/. Мы не обсудили еще очень важный вопрос о том, как на этом языке сформулировать преобразование Беклунда и как его найти. Ответ на этот вопрос дан в работах Эстабрука и Уолквиста[11,12,13]. Там же приведены преобразования Беклунда для уравнения КдВ и нелинейного одномерного уравнения Шредингера.

Пусть h есть преобразование в пространстве $X \times Y$, причем такое, что:

I) $h^* x = x$, $h^* t = t$, т.е. x и t остаются неподвижными;

II) преобразованные формы $h^* \alpha_i$ остаются в идеале I, определяемом формами α_i, ω^j.

Тогда h является <u>преобразованием Беклунда</u>. Действительно,

$$\begin{aligned} h^*\alpha_1 &= du'(u,z,p,\zeta) \wedge dt - z'(u,z,p,\zeta) dx \wedge dt, \\ h^*\alpha_2 &= dz'(u,z,p,\zeta) \wedge dt - p'(u,z,p,\zeta) dx \wedge dt, \\ h^*\alpha_3 &= -du'(u,z,p,\zeta) \wedge dx + dp'(u,z,p,\zeta) \wedge dt + \\ &\quad + 12 u' z'(u,z,p,\zeta) dx \wedge dt, \end{aligned} \qquad /36/$$

где

$$u' = h^* u, \quad z' = h^* z, \quad p' = h^* p.$$

В силу условия II на интегральном многообразии $S^{2'}$ формы $h^*\alpha_i$ должны равняться нулю. Следовательно, функция u' должна быть решением уравнения КдВ в случае, если решением является функция u.

Техника нахождения условий, при выполнении которых $h^*\alpha_i$ остаются в идеале I, сходна с описанной выше /см. /23/-/25//. Отметим только интересный результат, полученный Уолквистом и Эстабруком[11,12].

Если u является решением уравнения КдВ, то функция

$$u' = -\zeta^2 + \lambda - u \qquad /37/$$

также является решением. Это, как мы увидим, позволяет получить набор солитонных решений. Действительно, так как $u = 0$

есть решение, то другое решение можно получить из уравнения /37/:

$$u_1 = -\zeta^2 + \lambda. \qquad /38/$$

С учетом того, что на интегральном многообразии соответствующее этому решению ζ должно удовлетворять соотношениям /35/, причем $u = p = z = 0$, получим:

$$\zeta_x = \lambda - \zeta^2, \quad \zeta_t = 4\lambda(\zeta^2 - \lambda) = -4\lambda\zeta_x. \qquad /39/$$

Отсюда легко найти, что

$$\zeta = \lambda^{1/2} \tanh[\lambda^{1/2}(x - 4\lambda t - x_0)], \qquad /40/$$

где x_0 - постоянная интегрирования. Далее, из уравнения /38/ можно получить

$$u_1 = \lambda \, \mathrm{sech}^2[\lambda^{1/2}(x - 4\lambda t - x_0)], \qquad /41/$$

т.е. хорошо известно решение уравнения КgВ.

Заметим, что уравнения /39/ определяют однопараметрическое семейство псевдопотенциалов. Учитывая это, попытаемся получить другие решения, используя преобразования следующего вида:

$$\begin{aligned} u' &= u'(u,z,p,\zeta_{\lambda_1},\zeta_{\lambda_2}), \\ z' &= z'(u,z,p,\zeta_{\lambda_1},\zeta_{\lambda_2}), \\ p' &= p'(u,z,p,\zeta_{\lambda_1},\zeta_{\lambda_2}). \end{aligned} \qquad /42/$$

Аналогично можно показать, что если u является решением, то

$$u' = u + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)[\zeta^2_{\lambda_2} - \lambda_2 - (\zeta^2_{\lambda_1} - \lambda_1)]}{(\zeta_{\lambda_2} - \zeta_{\lambda_1})^2} \qquad /43/$$

также является решением. С учетом /37/ имеем:

$$u_1 = -\zeta^2_{\lambda_1} + \lambda_1 - u, \quad u_2 = -\zeta^2_{\lambda_2} + \lambda_2 - u. \qquad /44/$$

При этом из /43/ получим следующий набор решений:

$$u' = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(u_1 - u_2)}{[(\lambda_2 - u_2 - u)^{1/2} - (\lambda_1 - u_1 - u)^{1/2}]} + u. \qquad /45/$$

Формулу /45/ можно естественным образом обобщить на случай произвольного числа решений $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Ниже описан способ интерпретации структуры продолжения на языке форм связности. Отметим, что развитие метода Эстабрука-Уолквиста можно проследить по работам [15-19]

2. СТРУКТУРА ПРОДОЛЖЕНИЯ И ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ ФОРМ СВЯЗНОСТИ

В 1976 г. Херманом [21] была предложена интересная интерпретация структуры продолжения на примере уравнения КдВ. Он показал, что структура продолжения совпадает с известным классическим объектом - связностью Картана-Эресмана на многообразии $X\times Y$ со структурной группой $SL(2,\mathbb{R})$. После этого появилось несколько работ [20,14,19], в которых эти идеи получили дальнейшее развитие. Ниже мы опишем связность, найденную Морисом для обобщенной системы Абловица-Каупа-Ньюэла и Сегюра /АКНС/, а также связность, которая линейна по переменным продолжения. Ниже доказано, что линейная связность быстрее ведет к условиям нулевой кривизны /НК/. Полученный результат продемонстрирован на примере нелинейного многокомпонентного уравнения Шредингера с $U(p,q)$ -симметрией.

Связь уравнений, имеющих солитонные решения, со связностями и формами кривизны отмечалась и другими авторами, например в [22], но они не связывали ее с теорией продолжения Уолквиста-Эстабрука.

В работе [2] было показано, что система дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&A_x = qC - rB,\\
&D_x = rB - qC,\\
&q_t = B_x + (A-D)q + 2i\lambda B,\\
&r_t = C_x + (D-A)r - 2i\lambda C
\end{aligned}
\qquad /46/
$$

при соответствующем определении функций, входящих в нее, порождает многие из известных нелинейных уравнений, интегрируемых методом ОЗР, в том числе и уравнение КдВ. Идея Мориса [19] состояла в следующем: попытаемся найти структуру продолжения непосредственно для системы /46/. Для этого запишем систему форм, эквивалентную системе /46/:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 = dA\wedge dt + (rB - qC)dx\wedge dt,\\
&\alpha_2 = dB\wedge dt + dq\wedge dx + [2\lambda_i B + (A-D)q]\,dx\wedge dt,\\
&\alpha_3 = dC\wedge dt + dr\wedge dx - [2\lambda_i C + (A-D)r]\,dx\wedge dt,\\
&\alpha_4 = dD\wedge dt + (qC - rB)\,dx\wedge dt .
\end{aligned}
\qquad /47/
$$

Не обсуждая детали поиска структуры продолжения, приведем лишь решение, найденное Морисом:

$$
\begin{aligned}
&F = X_1(\zeta) + X_2(\zeta)q + X_3(\zeta)r,\\
&G = X_5(\zeta) + X_2(\zeta)B + C X_3(\zeta) + X_6(\zeta)D,
\end{aligned}
\qquad /48/
$$

где векторные поля $X_1, X_2, \dots, X_6$ должны удовлетворять следующим коммутационным соотношениям:

$$
\begin{aligned}
&[X_1,X_2] = -2\lambda_i X_2,\quad [X_1,X_3] = 2\lambda_i X_3,\quad [X_1,X_4] = 0,\\
&[X_1,X_6] = 0,\quad [X_2,X_3] = X_4 - X_6,\quad [X_3,X_6] = -X_3,\\
&[X_2,X_6] = X_2,\quad [X_3,X_4] = X_3,\quad [X_4,X_6] = 0,\\
&[X_5,X_i] = 0,\quad \forall\ i = 1,2,\dots,6.
\end{aligned}
\qquad /49/
$$

Если теперь положить

$$
\begin{aligned}
&Y_0 = \frac{1}{2}(X_4 - X_6), && Y_2 = \frac{1}{2}(X_4 + X_6),\\
&Y_1 = X_2, && Y_3 = X_1 - i\lambda(X_6 - X_4),\\
&Y_{-1} = X_3, && Y_4 = X_5,
\end{aligned}
\qquad /50/
$$

то, как легко проверить, коммутаторы системы /50/ могут быть записаны в виде

$$
\begin{aligned}
&[Y_0,Y_1] = Y_1,\quad [Y_0,Y_{-1}] = -Y_{-1},\quad [Y_1,Y_{-1}] = 2Y_0,\\
&[Y_\alpha,Y_i] = 0,\quad \alpha = 2,3,4,\quad i = \pm 1,0.
\end{aligned}
\qquad /51/
$$

Так как алгебра, порождаемая полями Y_0, Y_1, Y_{-1}, есть алгебра группы $SL(2,\mathbb{R})$, то можно положить

$$
Y_0 = \zeta\frac{\partial}{\partial\zeta},\qquad Y_1 = \zeta^2\frac{\partial}{\partial\zeta},\qquad Y_{-1} = -\frac{\partial}{\partial\zeta}. \qquad /52/
$$

Эти поля являются фундаментальными полями при так называемом дробно-линейном действии $SL(2,\mathbb{R})$ справа на одномерное пространство $Y=\{\zeta\}$. Дробно-линейное действие задается формулой

$$
\zeta g = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}, \qquad /53/
$$

где

$$g=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

Представление /52/ вместе с тривиальным представлением $Y_\alpha = 0$, $\alpha=2,3,4$ позволяет определить поля X_i с требуемыми свойствами:

$$X_1=-2i\lambda\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta},\quad X_2=\zeta^2\frac{\partial}{\partial\zeta},$$
$$X_3=-\frac{\partial}{\partial\zeta},\quad X_4=-X_6=\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta},\quad X_5=0. \qquad /54/$$

Соответствующая структура продолжения при $D=-A$ имеет следующий вид:

$$\omega = d\zeta-[r+2i\lambda\zeta-q\zeta^2]dx-[C-2A\zeta-B\zeta^2]dt,$$
$$\omega = d\zeta-\omega_0-\omega_1\zeta-\omega_2\zeta^2. \qquad /55/$$

где

$$\omega_0 = r\,dx + C\,dt,$$
$$\omega_1 = 2(i\lambda\,dx - A\,dt), \qquad /56/$$
$$\omega_2 = -(q\,dx + B\,dt)$$

суть 1-формы на $X=\{(x,t,q,r,A,B,C)\}$. Рассматривая $X\times Y$ как расслоение со слоем Y, можно интерпретировать 1-форму ω на $X\times Y$ как форму связности Картана-Эресмана /10,23/ со структурной группой $SL(2,\mathbb{R})$.

Введем следующее определение:/21/

<u>связность</u> ω, заданная на расслоении $X\times Y$ называется <u>ассоциированной</u> с данным дифференциальным уравнением, если формы кривизны Ω принадлежат идеалу форм I, задающих уравнение. В нашем случае это система /47/ с $D=-A$.

Вычисляя формы кривизны, найдем:

$$\Omega_1 = d\omega_1 + 2\omega_0\wedge\omega_2 = -2\alpha_1,$$
$$\Omega_2 = d\omega_2 + \omega_1\wedge\omega_0 = -\alpha_2, \qquad /57/$$
$$\Omega_0 = d\omega_0 + \omega_0\wedge\omega_1 = \alpha_3.$$

Очевидно, что связность ω ассоциирована с дифференциальными уравнениями /46/ при $D=-A$. Ясно, что связность и структура продолжения идентичны и если заданы формы связности ω_0, ω_1, ω_2, с помощью /55/ легко определить форму продолжения. Моррис/19/ обобщил этот результат, рассмотрев квадратичную связность вида

$$\omega^\alpha = d\zeta^\alpha-\omega_0^\alpha-\omega^\alpha_{1\beta}\zeta^\beta-\omega^\alpha_{2\beta\gamma}\zeta^\beta\zeta^\gamma, \qquad /58/$$

$$\omega_0^\alpha = r^\alpha dx + C^\alpha dt,$$

$$\omega^\alpha_{1\beta} = 2i\lambda\delta^\alpha_\beta dx + (A\delta^\alpha_\beta - D^\alpha_\beta)dt,$$

$$\omega^\alpha_{2\beta\gamma} = -\frac{1}{2}[(q_\beta\delta^\alpha_\gamma + q_\gamma\delta^\alpha_\beta)dx + (B_\beta\delta^\alpha_\gamma + B_\gamma\delta^\alpha_\beta)dt], \qquad /59/$$

$$\alpha,\beta,\gamma = 1,2,\ldots,n.$$

С помощью простых вычислений можно убедиться, что формы кривизны определяют идеал I, который совпадает с идеалом, определяемым следующей системой 2-форм:

$$\alpha_1 = dA\wedge dt + (r^\alpha B_\alpha - q_\alpha C^\alpha)dx\wedge dt,$$

$$\alpha_{2\alpha} = dB_\alpha\wedge dt + dq_\alpha\wedge dx + [2i\lambda B_\alpha + (A\delta^\beta_\alpha - D^\beta_\alpha)q_\beta]dx\wedge dt,$$

$$\alpha^\alpha_3 = dC^\alpha\wedge dt + dr^\alpha\wedge dx - [2i\lambda C^\alpha + (A\delta^\alpha_\beta - D^\alpha_\beta)r^\beta]\,dx\wedge dt, \qquad /60/$$

$$\alpha^\alpha_{4\beta} = dD^\alpha_\beta\wedge dt + (C^\alpha q_\beta - r^\alpha B_\beta)dx\wedge dt.$$

Видно, что система /60/ является обобщением системы АКНС и 1-формы структуры продолжения для нее задаются системой /58/. В качестве примера рассмотрим многокомпонентное нелинейное уравнение Шредингера. Положим

$$A = 2i\lambda^2 - \frac{1}{2i}q_\alpha r^\alpha,$$

$$B_\alpha = \frac{1}{2i}q_{\alpha x} - \lambda q_\alpha, \qquad /61/$$

$$C^\alpha = -\left(\frac{1}{2i}r^\alpha_x + \lambda r^\alpha\right),$$

$$D^\alpha_\beta = \frac{1}{2i}r^\alpha q_\beta.$$

Уравнения, соответствующие системе форм /60/, имеют вид:

$$iq^\alpha_t = \frac{1}{2}q_{\alpha xx} - q_\alpha q_\beta r^\beta,$$

$$ir^{\alpha}_{t} = \frac{1}{2} r^{\alpha}_{xx} + r^{\alpha} r^{\beta} q_{\beta} . \qquad /62/$$

Полагая далее $r^{\alpha} = -q^{*}_{\alpha}$, получим многокомпонентное нелинейное уравнение Шредингера:

$$iq_{\alpha t} = \frac{1}{2} q_{\alpha xx} - q_{\alpha} |q|^{2}, \quad |q|^{2} = q_{\alpha} q^{*}_{\alpha} . \qquad /63/$$

Следует отметить, что условия НК, следующие из /58/, квадратичны по переменным ζ^{α} . Чтобы сделать их линейными, необходимо перейти к проективным координатам.

Покажем, что обобщенную систему АКНС можно получить из другой связности, с более широкой структурной группой $GL(n+1, \boldsymbol{R})$. Эта связность линейна по переменным ζ, и, используя ее, можно получить результат Мориса. Действительно, положим

$$\begin{aligned}
&\omega^{0}_{0} = -i\mu\, dx + A\, dt, \\
&\omega^{\alpha}_{0} = r^{\alpha} dx + C^{\alpha} dt , \\
&\omega^{0}_{\alpha} = q_{\alpha} dx + B_{\alpha} dt, \\
&\omega^{\alpha}_{\beta} = i(2\lambda - \mu)\delta^{\alpha}_{\mu} dx + D^{\alpha}_{\beta} dt .
\end{aligned} \qquad /64/$$

Рассмотрим ω^{i}_{j} , $i,j = 0,1,2,\dots,n$, как локальные формы связности для связности, заданной на расслоении $X \times Y$ формулой

$$\omega^{i} = d\zeta^{i} - \omega^{i}_{j} \zeta^{j}, \qquad /65/$$

где

$$Y = \{(\zeta^{0}, \zeta^{1}, \dots, \zeta^{n})\}.$$

Если на алгебре группы $GL(n+1, \boldsymbol{R})$ задать базис, состоящий из матриц e^{j}_{i} с компонентами $(e^{j}_{i})_{mn} = \delta_{im} \delta^{j}_{n}$, то для соответствующих левоинвариантных форм $\tilde{\omega}^{j}_{i}$ на группе $GL(n+1, \boldsymbol{R})$ справедливы уравнения Маурера-Картана /8/:

$$d\tilde{\omega}^{i}_{j} = \tilde{\omega}^{i}_{s} \wedge \tilde{\omega}^{s}_{j} . \qquad /66/$$

Следовательно, формы кривизны для связности /65/ должны иметь вид

$$\Omega^{i}_{j} = d\omega^{i}_{j} - \omega^{i}_{s} \wedge \omega^{s}_{j} . \qquad /67/$$

Простым вычислением получаем:

$$\begin{aligned}
&\Omega^{0}_{0} = a_{1}, \\
&\Omega^{\alpha}_{0} = a^{\alpha}_{3} , \\
&\Omega^{0}_{\alpha} = a_{2\alpha} , \\
&\Omega^{\alpha}_{\beta} = a^{\alpha}_{4\beta} .
\end{aligned} \qquad /68/$$

Следовательно, эта связность также ассоциирована с системой АКНС и соответствующая структура продолжения задается формулой /65/.

Для иллюстрации положим в /62/

$$r^{\alpha} = -\gamma^{\alpha\nu} q^{*}_{\nu}, \qquad /69/$$

$$\gamma = k^{2} \begin{pmatrix} I_{p} & 0 \\ 0 & -I_{q} \end{pmatrix} , \quad p+q = n, \quad k^{2} = \mathrm{const}. \qquad /70/$$

Тогда уравнения /62/ задают многокомпонентное нелинейное уравнение Шредингера с $U(p,q)$-симметрией:

$$iq_{\alpha t} = \frac{1}{2} q_{\alpha xx} + q_{\alpha} q_{\beta} \gamma^{\beta\nu} q_{\nu}^{*} . \qquad /71/$$

Условия НК, которые следуют из /65/, имеют вид

$$\zeta_{x} = \left(\begin{array}{c|c} -i\mu & q^{T} \\ \hline -\gamma q^{*} & i(2\lambda-\mu) I_{n} \end{array}\right) \zeta , \quad \zeta_{t} = \left(\begin{array}{c|c} 2i\lambda + \frac{1}{2i} q^{T} \gamma q^{*} & \frac{1}{2i} q^{T}_{x} - \lambda q^{T} \\ \hline \frac{1}{2i} \gamma q^{*} + \lambda \gamma q^{*} & -\frac{1}{2i} q (\gamma q^{*})^{T} \end{array}\right) \zeta, \qquad /72/$$

где q -вектор-столбец вида $\begin{pmatrix} q_{1} \\ \vdots \\ q_{n} \end{pmatrix}$.

Отметим, что полученные уравнения являются двухпараметрическими. Полагая в них $\gamma = I_{n}$, $\mu = \lambda$, получим условия НК, найденные Морисом /19/. Условия НК для уравнения Шредингера с $U(p,q)$-симметрией несущественным образом отличаются от найденных в работе /1/.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору В.Г.Маханькову и О.К.Пашаеву за стимулирующие дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Makhankov V.G., Makhaldiani N.V., Pashaev O.K. Phys.Lett., 1981, 81A, No.2,3, p.161.

2. Ablowitz M.J. et al. Phys.Rev.Lett.,1967, 19, p.1095.
3. Kaup D.J. Physica, 1980, 1D, No.4, p.391.
4. Cole J.D. Quant.Appl.Math., 1951, 3, p.225.
5. Hopf E. Comm. Pure Appl.Math., 1951, 9, p.225.
6. Gardner C. et al. Comm. Pure Appl.Math., 1974, 27, p.97.
7. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. "Мир", М., 1973.
8. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. "Наука", М., 1981.
9. Зуланке Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. "Мир", М., 1975.
10. Hermann R. Interdisciplinary Mathematics. Math.Sci.Press, Brooklyn, 1975, vol.X.
11. Estabrook F., Wahlquist H. J.Math.Phys., 1975, 16, p.1.
12. Wahlquist H., Estabrook F. J.Math.Phys., 1976, 17, p.1293.
13. Estabrook F., Wahlquist H. In: Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Spectral Transform. (Ed. F.Calogero), Pitmen, London, 1978, p.63.
14. Herman R. Interdisciplinary Mathematics. Math.Sci.Press, Brooklyn, 1976, vol.VII.
15. Morris H.C. J.Math.Phys., 1976, 17, p.1867.
16. Morris H.C. J.Math.Phys., 1976, 17, p.1870.
17. Morris H.C. J.Math.Phys., 1977, 18, p.285.
18. Morris H.C. J.Math.Phys., 1977, 18, p.530.
19. Morris H.C. J.Math.Phys., 1977, 18, p.533.
20. Dodd R., Gibbon J.D. Proc.Roy.Soc., 1978, A359, p.411.
21. Herman R. Phys.Rev.Lett., 1976, 36, p.835.
22. Sasaki R. Phys.Lett., 1979, 71A, p.390.
23. Heresmann C. Coll. de topologie, 1950, Bruxelles, p.29.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 марта 1982 года.