объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-82-193

Е.П.Жидков, К.П.Кирчев

ЗАДАЧА КОШИ
ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ
КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА
С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ ТИПА СТУПЕНЬКИ

Направлено в "Сибирский математический журнал"

1982

После замечательной работы Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [1], где был открыт метод решения уравнения Кортевега-де Фриза /КдФ/, использующий обратную задачу рассеяния, было создано новое направление. Был проведен ряд исследований некоторых важных нелинейных уравнений, интегрируемых с помощью обратной задачи рассеяния /см., например, книгу [17] /.

Начальные данные и решения уравнений в основном рассматривались в двух наиболее естественных классах: быстро убывающие и периодические /почти периодические/ функции. Отметим, что периодическая задача для уравнения КдФ была решена в [2-5]. В [6] методами интегралов энергии и общей трауберовой теоремы изучена задача Коши для уравнения КдФ в предположении, что $u_0(x) \to -A$ при $|x| \to \infty$, $A > 0$.

Уравнение КдФ с начальными данными, имеющими разные пределы на $\pm\infty$, впервые рассматривалось в физических работах [7,8], где приближенным методом Уизема была найдена асимптотика решения при $t \to +\infty$. В работах [9,10], предполагая, что решение задачи Коши с начальными данными типа ступеньки для уравнения КдФ [9] и для модифицированного уравнения КдФ [10] существует, с помощью обратной задачи рассеяния получили асимптотики решения при $t \to +\infty$.

Обозначим через X^s, $s \geq 1$, множество функций $f(x)$, определенных на действительной оси R, таких, что для каждой функции $f(x)$ существует константа c, для которой выполняется

$$|||f|||_s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - c_f \operatorname{sgn}(x)]^2 dx + \sum_{k=1}^{s} \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(k)}(x)|^2 dx < \infty , \qquad /1/$$

где $f^{(k)} = d^k f/dx^k$ - обобщенная производная.

Линейное пространство X^s, $s \geq 1$, снабженное нормой /1/, является банаховым пространством абсолютно непрерывных на любом конечном интервале функций $f(x)$, для которых $\lim_{x \to +\infty} f(x) = - \lim_{x \to -\infty} f(x) = c_f$. Нетрудно показать, что имеет место оценка

$$|c_f| \leq \sup_{x \in R} |f(x)| \leq \mathrm{const}\, |||f|||_s . \qquad /2/$$

Следовательно, $f^2 - c_f^2 \in W^s$ $(W^s - W^s(R)$ - пространство Соболева с нормой $||g||_s^2 = \sum_{k=0}^{s} \int_{-\infty}^{\infty} |g^{(k)}(x)|^2 dx)$.

В настоящей работе с использованием метода псевдопараболической регуляризации /в [11] этот метод применен при решении задачи Коши для уравнения КдФ в пространстве Соболева/ показано существование, единственность и непрерывная зависимость от начальных данных решения задачи Коши для модифицированного уравнения КдФ:

$$u_t - u^2 u_x + u_{xxx} = 0,\ u(x,0) = f(x),\ x \in R,\quad t \geq 0, \qquad /3/$$

где начальные данные $f(x)$ принадлежат X^s, $s \geq 3$. Кроме того, доказана устойчивость формы решения вида уединенной волны, принадлежащего X^s для любого $t \geq 0$.

1. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ

$$u_t - u^2 u_x + u_{xxx} - \epsilon^2 u_{xxt} = 0,$$

$$u(x,0) = g(x),\quad x \in R,\quad t \geq 0,\quad 0 < \epsilon \leq 1. \qquad /1.1/$$

Обозначим через $\tilde{X}^s_T = C(0,T; X^s)$ пространства, состоящие из функций $u: R \times [0,T] \to R$, которые принадлежат X^s при фиксированном $t \in [0, T]$, и отображение $u: [0,T] \to X^s$ является непрерывным и ограниченным. Аналогично $\tilde{W}^s_T = C(0, T; W^s)$.

Для фиксированного $\epsilon > 0$ в /1.1/ сделаем замену

$$v(x,t) = \epsilon u(\epsilon(x-t),\ \epsilon^3 t). \qquad /1.2/$$

Тогда /1.1/ трансформируется в задачу

$$v_t + v_x - v^2 v_x - v_{xxt} = 0,$$

$$v(x,0) = h(x) = \epsilon g(\epsilon x),\quad x \in R,\ t \geq 0, \qquad /1.3/$$

Если $h(x) \in X^s$, $s \geq 2$, то, рассматривая интегральное уравнение

$$v(x,t) = h(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)[v(\xi,\tau) - \frac{1}{3} v^3(\xi,\tau)]\, d\xi\, d\tau, \qquad /1.4/$$

$$h(x) = v(x,0),\quad K(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) \exp[-|x|]$$

и соответствующим образом модифицируя рассуждения, приведенные в[12] относительно уравнения Бенжамена, Бона и Махони

$$v_t + v_x + v v_x - v_{xxt} = 0,$$

получаем, что для достаточно малого T существует единственное решение $v(x,t)$ $(x \in R,\ 0 \leq t \leq T)$ задачи /1.3/, которое принадлежит $\tilde{X}^s_T$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x,t) = \lim\limits_{x\to-\infty} v(x,t) = c_h$ для

любого $0 \leq t \leq T$. Глобальное решение по времени t можно получить, воспользовавшись законом сохранения:

$$2(3-c_h^2)\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} (v^2 - c_h^2)^2\, dx = 2(3-c_h^2)\int_{-\infty}^{\infty} h_x^2\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} (h^2 - c_h^2)^2\, dx. \qquad /1.5/$$

Равенство /1.5/ нетрудно вывести, дифференцируя по времени t и учитывая, что $v(x,t)$ удовлетворяет /1.3/.

Далее, используя индукцию и элементарные свойства преобразования Фурье, нетрудно показать, что глобальное решение $v(x,t)$ уравнения /1.3/ принадлежит $\tilde{X}^s_T$ для любого конечного T. Таким образом, обращая преобразование /1.2/ для фиксированного $\epsilon > 0$, мы получаем следующее утверждение:

Лемма 1

Пусть $g \in X^s$, $s > 2$. Тогда существует единственное решение u регуляризованной задачи /1.1/, которое принадлежит $\tilde{X}^s_T$ для любого конечного T. Кроме того, $\partial_t^\ell u \in \tilde{W}^{s-\ell}_T$, $1 \leq \ell \leq s$.

Следствие

Пусть $g \in X^s \cap C^\infty$ и пусть g_x вместе со всеми производными принадлежит L_2. Тогда всевозможные производные решения $u(x,t)$ задачи /1.1/ принадлежат $\tilde{W}_T$ для любого конечного T.

2. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ

Везде в этом параграфе мы будем предполагать, что $u(x,0) = g(x)$ удовлетворяет условиям следствие леммы 1. Множество таких функций мы будем обозначать через X^∞. Нетрудно показать, что для решения $u(x,t)$ регуляризованной задачи /1.1/ имеет место равенство

$$I_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} [u_x^2 + \frac{1}{6}(u^2 - c_g^2)^2]\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} [g_x^2 + \frac{1}{6}(g^2 - c_g^2)^2]\, dx. \qquad /2.1/$$

Умножим /1.1/ на $v(x,t) = u(x,t) - g(x)$ и проинтегрируем по R. После интегрирования по частям получим

$$\frac{d}{dt} E_\epsilon(v) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} (v^2 + \epsilon^2 v_x^2)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 u_x v\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} v u_{xxx}\, dx.$$

Подставляя в это неравенство оценки $\int v u_{xxx}\, dx \leq \|v\|\ \|g_{xxx}\|$,

$$\int u^2 u_x v\, dx \leq \sup|g|\ \ \|u^2 - c_g^2\|\ \|u_x\| + c_g^2 \|g_x\|\ \|v\|,$$

в силу /2.1/ получим

$$dE_\epsilon(v)/dt \leq C(E_\epsilon(v)^{1/2} + 1).$$

Отсюда имеем

$$||v||^2 \le E_\epsilon(v) \le C \exp[CT],$$

что вместе с /2.1/ дает следующую лемму:

Лемма 2. Пусть $g \in X^\infty$. Тогда

$$||v||_1 \le C, \qquad |||u|||_1 \le C \qquad /2.2/$$

для всех $t \in [0,T]$ независимо от $\epsilon \in [0,1]$. Константа C зависит от T и $|||g|||_3$.

Следствие

$$\sup_{x \in R,\ t \in [0,T]} |u(x,t)| \le C. \qquad /2.3/$$

Лемма 3. Пусть даны $T > 0$ и $g \in X^\infty$. Тогда существует ϵ_0, такое, что для всех $0 < \epsilon \le \epsilon_0$ и $t \in [0,T]$

$$|||u|||_2 \le C. \qquad /2.4/$$

Константа C зависит только от T и $|||g|||_3$.

Доказательство. Введем обозначения:

$$I_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (3u_{xx}^2 + (5u^2 - 3c_g^2)u_x^2 + \frac{1}{6}(u^2 - c_g^2)^3)\,dx,$$

$$\frac{d}{d\theta} I_2(u_1 + \theta u_2)|_{\theta=0} = (G_2(u_1), u_2),$$

$$G_2(u) = \operatorname{grad} I_2(u) = 6u_{xxxx} - 10uu_x^2 -$$

$$- 10u^2u_{xx} + 6c_g^2 u_{xx} + (u^2 - c_g^2)^2 u.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{d}{dt} I_2(u) = \epsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} G_2(u) u_{xx}\, dx. \qquad /2.5/$$

Интегрируя по частям, перепишем /2.5/ в виде

$$\frac{dV}{dt} = -\epsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} [5u^4 u_x u_{xt} - 6c_g^2 u^2 u_x u_{xt} - 20uu_x u_{xx} u_{xt} -$$

$$- 10uu_t u_{xx}^2]\,dx, \qquad /2.6/$$

где

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \{[3 + \epsilon^2(5u^2 - 3c_g^2)]u_{xx}^2 + (5u^2 - 3c_g^2)u_x^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}(u^2 - c_g^2)^3 + \epsilon^2(3u_{xxx}^2 + c_g^4 u_x^2/2 - 5u_x^4/2)\}\,dx.$$

В силу следствия леммы 2 существует достаточно малое $\epsilon_1 > 0$, такое, что для $0 < \epsilon \le \epsilon_1$ выполняется

$$1 \le 3 + \epsilon^2(5u^2 - 3c_g^2) \le 5. \qquad /2.7/$$

Интегрируя по t в /2.6/ и используя /2.7/ аналогично [13], можно получить систему интегральных неравенств:

$$D(t)^2 \le 2C + 2\epsilon(C+1)\int_0^t BD^2\, d\tau,$$

$$B(t)^2 \le C + C\int_0^t D^{1/2} B^2\, d\tau, \qquad /2.8/$$

где

$$D^2 = C + ||u_x||_1^2, \qquad B^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (u_t + \epsilon^2 u_{xt}^2)\,dx,$$

C - константа.

Тогда подобно тому, что делалось в [11] и [13], из /2.8/ вытекает утверждение леммы.

Лемма 4. Пусть $g \in X^\infty$, $0 < T < \infty$. Выберем $\epsilon_0 > 0$ в соответствии с леммой 3. Тогда при $0 < \epsilon \le \epsilon_0$ решение $u(x,t)$ ограничено в X_T^m, $m \ge 3$, гранью, зависящей только от T, ϵ_0, $|||g|||_m$ и $\epsilon|||g|||_{m+1}$.

Доказательство. Умножая /1.1/ на $u_{(2m)} = \partial^{2m} u$ и интегрируя по R, получаем

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} [u_{(m)}^2 + \epsilon^2 u_{(m+1)}^2]\,dx = \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty} (u^3)_{(m+1)} u_{(m)}\,dx. \qquad /2.9/$$

Применяя к /2.9/ правило Лейбница, можно аналогично лемме 5 из [13] вывести по индукции утверждение леммы.

Следствие. $\partial_t^\ell u$ ограничено в $\tilde{W}_T^k$ независимо от $0 \le \epsilon \le \epsilon_0$ для всех $\ell > 1$, k и T.

3. СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ ПРИ $\epsilon \downarrow 0$

В дальнейшем $\hat{f}(\check{f})$ обозначает преобразование Фурье /обратное преобразование Фурье/. Пусть $\phi(k)$ - четная C^∞- функция $0 < \phi < 1$, $\phi(0) = 1$, причем функция $\psi(k) = 1 - \phi(k)$ имеет в нуле нуль бесконечного порядка и, кроме того, ϕ стремится экспоненциально к нулю при $k \to \pm\infty$. Например, мы можем положить $\phi(k) = \exp[-r(k)]$, $r(k) = k^2 \exp[-1/k^2]$.

Пусть $g(x) \in X^s$, $s \ge 3$. Определим регуляризацию $g_\epsilon(x) = g(x) + [(1 - \phi(\epsilon^{1/6}k))\hat{g}_x(k)/ik]^\vee$. Из формулы $dg_\epsilon/dx = [\phi(\epsilon^{1/6}k)\hat{g}_x(k)]^\vee$ и свойства функции $\phi(k)$ вытекает, что $g_\epsilon(x) \in X^\infty$. Тогда в силу утверждения леммы 1 задача

$$u_t - u^2 u_x + u_{xxx} - \epsilon^2 u_{xxt} = 0,$$

$$u(x,0) = g_\epsilon(x), \quad t \geq 0, \quad x \in R, \quad 0 < \epsilon \leq 1, \qquad /3.1/$$

имеет единственное решение $u_\epsilon(x,t) = u(x,t,\epsilon) \in \tilde{X}^m_T$ для всех m и T. Кроме того, всевозможные пространственные и временные производные $u_\epsilon(x,t)$ принадлежат W_T.

Используя равенства Парсеваля и конструкции $g_\epsilon(x)$, нетрудно вывести следующие утверждения.

Лемма 5. Пусть $g(x) \in X^s$, $s \geq 3$. Тогда имеют место следующие оценки:

а/ $\epsilon^{(1/6)j} |||g_\epsilon|||_{s+j} \leq C|||g_\epsilon|||_s \Rightarrow |||g_\epsilon|||_{s+j} = O(\epsilon^{-(1/6)j})$, $j = 1,2,\dots$,

б/ $|||g - g_\epsilon|||_{s-j} = ||g - g_\epsilon||_{s-j} = o(\epsilon^{(1/6j)})$, $j = 1,2,\dots,s$,

в/ $|||g - g_\epsilon|||_s = ||g - g_\epsilon||_s = o(1)$.

Оценки /б/ и /в/ выполняются равномерно на сходящейся последовательности в X^s. Оценка /а/ выполняется равномерно на ограниченном подмножестве X^s. Оценка /б/ тоже будет выполняться равномерно на ограниченном подмножестве X^s, если заменить в /б/ o на O.

В силу леммы 4 имеем

Следствие 1

Пусть $s \geq 3$. Тогда независимо для достаточно маленьких ϵ

/а/ u_ϵ ограничено в $\tilde{X}^s_T$,

/б/ $\epsilon^{m/6} u_\epsilon$ ограничено в $\tilde{X}^{s+m}_T$.

Следствие 2. Пусть $s > 3$. Тогда независимо для достаточно маленьких ϵ

/а/ $\partial_t u_\epsilon$ ограничено в $\tilde{W}^{s-3}_T$,

/б/ $\epsilon^{m/6} \partial_x^{s+m-3} \partial_t u_\epsilon$ ограничено в $\tilde{W}_T$ при $m = 1,2,3$,

/в/ $\epsilon^{7/6} \partial_s^{s+1} \partial_t u_\epsilon$ и $\epsilon^{4/3} \partial_x^{s+2} \partial_t u_\epsilon$ ограничены в $\tilde{W}_T$.

Доказательство. Обращая оператор $(1-\epsilon^2\partial_x^2)$, запишем /3.1/ в виде $\partial_t u_\epsilon = K_\epsilon * (u_\epsilon^2 \partial_x u_\epsilon - \partial_x^3 u_\epsilon)$. Отсюда при помощи равенства Парсеваля и неравенства треугольника получаем следующие оценки:

$$||\partial_t u_\epsilon||_{s-3+m} \leq ||(u_\epsilon^2 - c_g^2)\partial_x u_\epsilon||_{s-3+m} + c_g^2 ||\partial_x u_\epsilon||_{s-3+m} + ||\partial_x^3 u_\epsilon||_{s-3+m},$$

$$||\partial_t u_\epsilon||_{s+1} \leq C\epsilon^{-1}||(u_\epsilon^2 - c_g^2)\partial_x u_\epsilon||_{s+1} + c_g^2||\partial_x u_\epsilon||_{s+1} + ||\partial_x^3 u_\epsilon||_{s+1},$$

$$||\partial_x \partial_t u_\epsilon||_{s+1} \leq C\epsilon^{-1}[||(u_\epsilon^2 - c_g^2)_x \partial_x u_\epsilon||_s + ||(u_\epsilon^2 - c_g^2)\partial_x^2 u_\epsilon||_s] + c_g^2||\partial_x^2 u_\epsilon||_{s+1} + ||\partial_x^4 u_\epsilon||_{s+1},$$

где C - некоторая константа.

Проводя несложные вычисления и используя следствие 1, из верхних неравенств получим утверждение следствия 2.

Лемма 6. Пусть $g(x) \in X^s$, $s > 3$. Тогда $\{u_\epsilon\}_s$ является обобщенной последовательностью /о.п./ Коши в X_T при $\epsilon \downarrow 0$.

Доказательство. Пусть $\delta \leq \epsilon$. Так как $c_{g_\epsilon} = c_{g_\delta} = c_g$, то $W = u_\epsilon - u_\delta$ принадлежит $\tilde{W}_T$ вместе со всеми своими производными для любого конечного T и удовлетворяет следующему уравнению:

$$w_t - [\tfrac{1}{3}w^3 + u_\epsilon^2 w - u_\epsilon w^2]_x + w_{xxx} - \delta^2 w_{xxt} = (\epsilon^2 - \delta^2)u_{xxt}, \qquad /3.2/$$

$$w(x,0) = g_\epsilon(x) - g_\delta(x).$$

Исходя из /3.2/ и повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 7 в [13], в силу следствия 1 и 2 леммы 5 получим, что $|||w|||_s = ||w||_s \to 0$ при $\epsilon \downarrow 0$.

Следствие

$\{u_t(x,t,\epsilon)\}$ является о.п. Коши в $\tilde{W}^{s-3}_T$ при $\epsilon \downarrow 0$.

Теорема 1. Пусть $g(x) \in X^s$, где $s > 3$. Тогда существует единственное решение $u(x,t)$ уравнения /3/, принадлежащее $\tilde{X}^s_T$, $0 < T < \infty$ и $u(x,0) = g(x)$.

Доказательство. Единственность вытекает сразу из следующих стандартных вычислений. Допустим, что существуют два решения, u и v, и пусть $w = u - v$. Тогда

$$w_t - \frac{1}{3}[w(u^2+uv+v^2)]_x + w_{xxx} = 0,\ w(x,0)=0,\ w \in \tilde{W}^s_T\ . \qquad /3.3/$$

Умножая /3.3/ на w и интегрируя по R, получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx = -\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty}(u^2+uv+v^2)\,w\,w_x\,dx \le C\int_{-\infty}^{\infty} w^2(x,t)\,dx\ .$$

Отсюда $\int_{-\infty}^{\infty} w^2(x,t)\,dx = 0$ и из непрерывности w вытекает, что $w \equiv 0$. Пусть g_ϵ обозначает регуляризацию функции g, а $u_\epsilon(x,t)$ – соответствующее решение регуляризованной задачи /3.1/. В силу утверждения леммы 6 и ее следствия существуют $u \in \tilde{X}^s_T$ и $v \in \tilde{W}^{s-3}_T$ такие, что $\|u_\epsilon - u\|_{\tilde{X}_T} = \|u_\epsilon - u\|_{\tilde{W}_T} \to 0$ и $\partial_t u_\epsilon \to v$ в $\tilde{W}^{s-3}_T$ при $\epsilon \downarrow 0$. Отсюда вытекает, что $\partial_x(u^3_\epsilon) \to \partial_x(u^3)$ в $\tilde{W}^{s-1}_T$, $\partial^3_x(u_\epsilon) \to \partial^3_x u$ в $\tilde{W}^{s-3}_T$, а так как $u_\epsilon \to u$, $\partial_t u_\epsilon \to \partial_t u$ в смысле распределений, то $u_t = v$. Из следствия 2 леммы 5 вытекает, что $\epsilon^2\partial^2_x\partial_t u_\epsilon \to 0$ в $\tilde{W}_T \Rightarrow \epsilon^2\partial^2_x\partial_t u_\epsilon \to 0$ в смысле распределений. Таким образом, делая предельный переход в /3.1/, получаем, что в смысле распределений $u_t - u^2 u_x + u_{xxx} = 0$, $u(x,0) = g(x)$. Отсюда, так как $u \in \tilde{X}^s_T$ и $u_t \in \tilde{W}^{s-3}_T$, ясно, что $u(x,t)$ является L_2-решением задачи /3/, если $s=3$, и классическим решением в случае $s>3$ /термин L_2- решения означает, что все члены в /3/ являются L_2-функциями от x и уравнение /3/ удовлетворяется для каждого t почти всюду по x/.

Пусть $u_N(x,t)$ означает решение /3/ на $R\times[0,N]$, где $N=1,2,\ldots$. Определим на $R\times[0,\infty]$ функцию $u(x,t) = u_N(x,t)$ при $t \le N$. Функция $u(x,t)$ корректно определена в силу единственности и представляет глобальное решение /3/, которое принадлежит $\tilde{X}^s_T$ для любого конечного T.

4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Пусть $g(x) \in X^\infty$ и $u(x,t)$ является соответствующим решением /3/. Непосредственно можно проверить, что $I_0(u) = I_0(g)$, где $I_0(u) = \int_{-\infty}^{\infty}(u^2 - c^2_g)\,dx$. Положим

$$v(x,t) = u^2(x - c^2_g t, t) + \sqrt{6}\,u_x(x - c^2_g t, t) - c^2_g\ . \qquad /4.1/$$

Преобразование /4.1/ подобно преобразованию Миуры, и нетрудно убедиться, что $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению КдФ

$$v_t - v v_x + v_{xxx} = 0,\quad v(x,0) = g^2 - c^2_g + \sqrt{6}\,g_x\ .$$

Так как $v(x,0) \in W^\infty$ / C^∞ - функции, которые вместе со своими производными принадлежат L_2/, то существует [14] бесконечная последовательность полиномиальных законов сохранения, которую можно записать в форме

$$I_{k-1}(v) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(v^2_{(k-1)} + \frac{2k-1}{3}\,v v^2_{(k-2)} + p(v, v_{(1)}, \ldots, v_{(k-3)}) + a v^{k+1}\right)dx. \qquad /4.2/$$

Здесь $a \ne 0$. Подставляя /4.1/ в /4.2/, получаем бесконечную последовательность полиномиальных законов сохранения для /3/ при $u(x,0) = g(x)$. Эту последовательность можно записать в форме

$$I_k(u) = \int_{-\infty}^{\infty}\Big\{u^2_{(k)} + \Big[\frac{2k-1}{3}(u^2 - c^2_g) + \frac{2}{3}u^2\Big]u^2_{(k-1)} + b(u^2 - c^2_g)^{k+1} +$$

$$+ Q(u, u_{(1)}, \ldots, u_{(k-2)})\Big\}dx,\quad b \ne 0,\quad k \ge 2\ , \qquad /4.3/$$

$$I_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty}\Big[u^2_x + \frac{1}{6}(u^2 - c^2_g)^2\Big]dx\ .$$

<u>Теорема 2.</u> Пусть $g \in X^s$, $s \ge 3$ и пусть $u(x,t)$ является соответствующим решением /3/ на $R\times[0,\infty]$. Тогда $I_k(u)$, $k = 1,2,\ldots, s$ существуют и не зависят от времени.

<u>Доказательство.</u> Пусть $u_\epsilon(x,t)$ является решением регуляризованной задачи /3.1/. Для краткости вместо u_ϵ будем писать u. Дифференцируя $I_k(u)$ по t и используя /3.1/, получаем

$$\frac{dI_k}{dt} = (\operatorname{grad} I_k(u), u_t) = \epsilon^2(\operatorname{grad} I_k(u), u_{xxt})\ . \qquad /4.4/$$

Обозначим

$$J_k(u) = \int_{-\infty}^{\infty}\Big\{u^2_{(k)}\Big[1 + \epsilon^2\Big(\frac{2k+1}{3}u - \frac{2k-1}{3}c^2_g\Big)\Big] + \epsilon^2 u^2_{(k+1)} +$$

$$+ \frac{2k+1}{3}u^2 u^2_{(k-1)} - \frac{2k-1}{3}c^2_g u^2_{(k-1)} + R_k(u, u_{(1)}, \ldots, u_{(k-2)})\Big\}dx\ ,$$

где

$$R_k(u, u_{(1)}, \ldots, u_{(k-2)}) = b(u^2 - c^2_g)^{k+1} + Q(u, u_{(1)}, \ldots, u_{(k-2)}).$$

Интегрируя по частям в /4.4/, а потом интегрируя по t, нетрудно получить равенство

$$J_k(u) = J_k(g_\epsilon) + \epsilon^2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\sum_{j=0}^{k-2}\frac{\partial R_k}{\partial u_{(j)}}u_{t,(j+2)} +$$

$$+ 2\frac{2k+1}{3}u\,u_{xxt}\,u^2_{(k-1)} - 4u_{t,(k)}\,u\,u_x\,u_{(k-1)} + 2u^2_{(k)}\,u\,u_t\Big\}dx\,d\tau. \qquad /4.5/$$

В силу леммы 5 $J_k(g_\epsilon) \to I_k(g)$ при $\epsilon \downarrow 0$, $k=1,\dots,s$. Кроме того, из следствия 1 леммы 5 вытекает, что $J_k(u_\epsilon) \to I_k(u)$ при $\epsilon \downarrow 0$, где u - решения уравнения /3/. Используя следствия 1 и 2 леммы 5, имеем, что интеграл в правой части формулы /4.5/ стремится к нулю при $\epsilon \downarrow 0$. Таким образом, переходя к пределу в /4.5/ при $\epsilon \downarrow 0$, получаем, что $I_k(u) = I_k(g)$, $k=1,\dots,s$ для каждого $t \geq 0$.

Используя теорему 2, индуктивно можно доказать следующее утверждение.

Следствие. Пусть $g \in X^s$, $s \geq 3$, и пусть $u(x,t)$ является соответствующим решением /3/ на $R \times [0,\infty]$. Тогда $|||u|||_k$, $k=1,\dots,s$, равномерно ограничены по $t \in [0,\infty]$. Другими словами, для $g \in X^3$, $s \geq 3$, существует единственное глобальное решение $u(x,t)$ задачи Коши /3/, которое принадлежит пространству $\tilde{X}^s_\infty$.

5. НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Пусть $g(x) \in X^s$, $s>3$. Тогда в силу следствия теоремы 2 $U(g) = u(x,t)$ отображает X^s в пространство $\tilde{X}_\infty$. Решение уравнения /3/ вида уединенной волны, которое мы рассмотрим в следующем разделе, показывает, что U не является непрерывным.

Однако, если рассматривать конечный интервал времени, имеет место следующая

Теорема 3. Пусть $0<T<\infty$ и пусть $u(x,t) = U(g): X^s \to \tilde{X}^s_T$, $g \in X^s$, $s \geq 3$ - сужение на $[0,T]$ глобального решения и уравнения /3/. Тогда U является непрерывным.

Доказательство. Пусть $g_n \to g$ в X^s, $s \geq 3$. Необходимо показать, что $u^n = U(g_n) \to u = U(g)$ в $\tilde{X}^s_T$ или, другими словами, $|||u^n - u|||_s \to 0$ равномерно по $t \in [0,T]$. Имеем

$$|||u^n - u|||_s \leq |||u^n - u^n_\epsilon|||_s + |||u^n_\epsilon - u_\epsilon|||_s + |||u_\epsilon - u|||_s. \qquad /5.1/$$

Здесь u_ϵ и u^n_ϵ - решения /3.1/ с гладкими g_ϵ и $g_{n\epsilon}$. Аналогично[13] для $t \in [0,T]$ имеют место оценки

$$|||u - u_\epsilon|||_s = ||u - u_\epsilon||_s \leq \mathrm{const}\,(\epsilon^{1/6} + ||g - g_\epsilon||_s),$$

$$|||u^n - u^n_\epsilon|||_s = ||u^n - u^n_\epsilon||_s \leq \mathrm{const}\,(\epsilon^{1/6} + ||g_n - g_{n\epsilon}||_s),$$

которые показывают, что $||u^n - u^n_\epsilon||_s \to 0$, $||u - u_\epsilon||_s \to 0$ при $\epsilon \downarrow 0$ равномерно по $t \in [0,T]$ и $n = 1,2\dots$ и, следовательно, из /5.1/ видно, что для того, чтобы получить утверждение теоремы, достаточно доказать, что $|||u^n_\epsilon - u_\epsilon|||_s \to 0$ при $n \to \infty$ для фиксированного ϵ равномерно по $t \in [0,T]$.

Применяя трансформацию /1.2/, сведем регуляризованную задачу /3.1/ к задаче

$$v_t + v_x - v^2 v_x - v_{xxt} = 0, \quad v(x,0) = h(x) = \epsilon g_\epsilon(x). \qquad /5.2/$$

Пусть v^n и v являются решениями /5.2/ соответственно для $h_n(x) = \epsilon g_{n\epsilon}(x)$ и $h(x) = \epsilon g_\epsilon(x)$. Тогда, если мы докажем, что $v^n \to v$ в X^s_R для произвольного конечного R, то, обращая /1.2/ /ϵ - фиксировано/, получим, что $u^n_\epsilon \to u_\epsilon$ в $\tilde{X}^s_T$.

В силу леммы 5 $g_{n\epsilon} \to g_\epsilon$ в X^k для всех k /при $k>s$ сходимость зависит от ϵ /. Следовательно $h_n, h \in X^\infty$. Умножим уравнение /5.2/ на $v^n_{(2j)}$, $j \geq 1$, и проинтегрируем по частям, получим

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}[(v^n_{(j)})^2 + (v^n_{(j+1)})^2]dx = \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty}[(v^n)^3]_{(j+1)}(v^n)_{(j)}\,dx.$$

Отсюда, используя индукцию и правило Лейбница, можно показать, что $|||v^n|||_k < C_n$, $t \in [0,R]$, где C_n зависят от $|||h_n|||_k$ и R. Учитывая, что $h_n \to h$ в X^k для всех k, получим

$$|||v^n|||_k \leq \mathrm{const}, \quad t \in [0,R]. \qquad /5.3/$$

$w^n = v^n - v$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$w^n_t + w^n_x - (w^n)^2 w^n_x - (vv^n w^n)_x - w^n_{xxt} = 0,$$
$$w^n(x,0) = h_n(x) - h(x) = f_n(x). \qquad /5.4/$$

Далее для краткости вместо w^n будем писать w. Умножая /5.4/ на $w_{(2j)}$, интегрируя по R и по $[0,t]$, после соответствующего интегрирования по частям получим

$$W_j(t) = W_j(0) + (-1)^j 2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}[w^2 w_x + (v^2 w)_x + (vw^2)_x]w_{(2j)}\,dx\,d\tau, \qquad /5.5/$$

где

$$W_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty}[(w^2 - c^2_{f_n}) + w^2_x]dx, \quad W_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty}[w^2_{(j)} + w^2_{(j+1)}]dx, \quad j \geq 1.$$

Отметим, что в силу /5.3/ $|||w|||_k \leq C$, $t \in [0,R]$, причем C не зависит от n. При $j=0$ из /5.5/ вытекает, что

$$W_0(t) \leq W_0(0)\exp[Ct] \Rightarrow |||w^n|||_1 \leq C|||f_n|||_1 \exp[CR],$$

где C - константа и, следовательно, $|||w^n|||_1 \to 0$ ($|||f_n|||_1 \to 0$) равномерно по $t \in [0,R]$. Далее, используя индукцию и применяя правило Лейбница к /5.5/, получим, что $|||v^n - v|||_k = |||w^n|||_R \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно на ограниченном временном интервале для всех $k \geq 0$. Теорема доказана.

Попутно мы получили следующее утверждение:

Теорема 4. Пусть $g(x) \in X^s$, $s \geq 2$. Тогда существует единственное решение задачи $u_t + u_x - u^2 u_x - u_{xxt} = 0$, $u(x,0) = g(x)$,

$x\in R$, $t\geq 0$, которое принадлежит $\tilde{X}^s_T$ для всех конечных T. $u(x,t)$ зависит непрерывно в $\tilde{X}^s_T$ от начальных данных g в X^s.

6. УСТОЙЧИВОСТЬ ФОРМЫ РЕШЕНИЯ ВИДА УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЫ

1. Для удобства в этом разделе модифицированное уравнение КдФ будем рассматривать в форме

$$u_t - 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0,\quad u(x,0) = f(x) \in X^s,\ s\geq 3,\ x\in R,\ t\geq 0. \qquad /6.1/$$

Уравнение /6.1/ имеет решение вида уединенной волны:

$$\Phi(y) = a\,\mathrm{th}(ay),$$

где

$$0 < a < \infty, \quad y = x + 2a^2 t.$$

Легко проверяется, что $a\,\mathrm{th}(ax) \to b\,\mathrm{th}(bx)$ в X^s при $a \to b$ в R. А с другой стороны, $a+b \leq \varliminf_{t\to\infty} \sup_{x\in R} |\Phi_a - \Phi_b|$. Следовательно, Φ_a не стремится к Φ_b в $C(R)$ /а значит, и в X^s/ равномерно по $t\in[0,\infty]$. Однако, используя метод Бенжамена[15], мы покажем устойчивость формы $\Phi(y)$.

<u>Определение устойчивости</u>. Решение Φ уравнения /6.1/ устойчиво относительно метрик d_I и d_{II}, если для каждого $\epsilon>0$ существует такое δ, что из $[d_I(u,\Phi)]_{t=0} \leq \delta$ следует $d_{II}(u,\Phi)\leq\epsilon$, $\forall t\geq 0$.

Пусть τ - группа сдвигов на оси x, $\tau f(x) = f(x-\zeta)$, $\zeta\in R$. В дальнейшем $d_I(u,\Phi) = |||u-\Phi|||_1$, а метрику d_{II} зададим формулой

$$d_{II}(u,\Phi) = \inf_{\tau} |||\tau u - \Phi|||_1. \qquad /6.2/$$

Мы покажем, что решение $\Phi(y)$ устойчиво относительно метрик d_I и d_{II}. В частности, как видно из /2/ и /6.2/, это означает, что малое начальное возмущение мало меняет форму $\Phi(y)$. Обозначим $[d_I(u,\Phi)]_{t=0} = \delta$, $\lim_{x\to+\infty} u(x,0) = c_u$, $\Psi = c_u \mathrm{th}[c_u(x+2c_u^2 t)]$.

В силу /2/ нетрудно получить оценки

$$d_I(u,\Psi) \leq d_I(u,\Phi) + d_I(\Phi,\Psi) \leq \delta + C(c_u - a) \leq (1+C)\delta \quad \text{при } t=0,$$

$$d_{II}(u,\Phi) \leq d_{II}(u,\Psi) + d_{II}(\Phi,\Psi) \leq d_{II}(u,\Psi) + C\delta, \qquad \forall t\geq 0,$$

где C обозначает константу. Таким образом, не уменьшая общности, мы можем считать, что $c_u=a$, $\Psi=\Phi$. Существенную роль в доказательстве устойчивости Φ будет играть нелинейный функционал $M(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (u_x^2 + (u^2 - a^2)^2)\,dx$, который не зависит от t, когда

u - решение /6.1/ и $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = a$. Положим $u=h+\Phi$ и запишем

$$\Delta M = M(u) - M(\Phi)$$

в виде

$$\Delta M = \int_{-\infty}^{\infty}[h_x^2 + 2(2-3\mathrm{ch}^{-2}(ay))\,a^2h^2]\,dx + 4\int_{-\infty}^{\infty}\Phi h^3\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} h^4\,dx =$$
$$= \delta^2 M + \delta^3 M + \delta^4 M. \qquad /6.3/$$

Так как $|||h|||_1 = ||h||_1$ ($\lim u = \lim\Phi$ при $x\to\pm\infty$), в силу инвариантности ΔM относительно t из /6.3/ вытекает оценка

$$\Delta M \leq m\delta^2 + 2a\sqrt{2}\delta^3 + 2^{-1}\delta^4 = \gamma(\delta) = \gamma, \qquad /6.4/$$

где $m = \max(1, 4a^2)$.

Покажем, что существует такое конечное $b=b(t)$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}[u(x-b,t) - \Phi(x)]^2\,dx = \inf_{\zeta\in R}\int_{-\infty}^{\infty}[u(x-\zeta,t) - \Phi(x)]^2\,dx = \Delta. \qquad /6.5/$$

Действительно, если $\lim \int_{-\infty}^{\infty}[u(x,t) - \Phi(x-\zeta_n)]^2\,dx = \Delta$ при $n\to\infty$, то последовательность $\{\zeta_n\}$ имеет хотя бы одну конечную точку сгущения b, для которой выполняется /6.5/. В противном случае, если допустить, что $\lim_n |\zeta_n| = \infty$, то придем к противоречию в силу леммы Фату.

Из определения ΔM и метрик d_{II} видно, что, не уменьшая общности, можно считать $u(x-b,t) = \Phi(x) + h(x,t)$. Тогда на основании того, что интеграл в правой стороне /6.5/ стационарен относительно ζ в точке $\zeta=b$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x,t)\,\Phi'(x)\,dx = 0. \qquad /6.6/$$

2. Оценка снизу для $\delta^2 M(h)$. Разложим h на четную и нечетную части $h=f+g$. Так как $\mathrm{ch}^{-2}(ax)$ является четной функцией, имеем $\delta^2 M(h) = \delta^2 M(f) + \delta^2 M(g)$. Для того чтобы оценить

$$\delta^2 M(g) = 2a\int_0^{\infty}[g'^2 + 2(2-3\mathrm{ch}^{-2}z)\,g^2]\,dz,$$

где $z=ax$, $dg/dz=g'$, введем интеграл

$$J(g) = \int_0^{\infty}[g'^2 + (\mu - 12\mathrm{ch}^{-2}z)\,g^2]\,dz$$

и рассмотрим задачу на собственные значения:

$$\psi'' + (12\mathrm{ch}^{-2}z + \lambda)\psi = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad 0\leq z<\infty. \qquad /6.7/$$

Для $g\in L_2(0,\infty)$ существует преобразование

$$G(\lambda) = \int_0^{\infty}\psi(z;\lambda)\,g(z)\,dz, \quad g(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(z;\lambda)\,G(\lambda)\,d\rho(\lambda),$$

где $\rho(\lambda)$ - неубывающая функция. Кроме того, $g\in W^1[0,\infty)$ и g' стремится к нулю при $z\to\infty$ /так как в силу теоремы 1 $h(x,t)\in W^s(R)$, $s>3$, $t\ge 0$) и, следовательно, из /6.7/ и равенства Парсеваля вытекает

$$\int_0^\infty [g'^2-(12ch^{-2}z)g^2]dz = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda G^2(\lambda)d\rho(\lambda). \qquad /6.8/$$

Задача /6.7/ имеет ровно одно собственное значение /см. 4.17 в /16/ / $\lambda_1=-4$ с соответствующей собственной функцией

$$\psi_1(z) = (15/2)^{1/2}\, sh z\cdot ch^{-3} z.$$

Тогда из /6.8/ следует, что

$$J(g) = (\mu-4)G_1^2 + \int_0^\infty \lambda G^2(\lambda)d\rho(\lambda).$$

Полагая $\mu=4$ и сравнивая $\delta^2 M(g)$ с $J(g)$, получаем оценку

$$\delta^2 M(g) = aJ(g) + a\int_0^\infty (g'^2+4g^2)dz \ge \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{2}g^2 + 2a^2g^2\right)dx. \qquad /6.9/$$

Аналогично рассмотрим задачу $\phi''+(6ch^{-2}z+\lambda)\phi=0$, $\phi'(0)=0$, $0\le z<\infty$, с одним собственным значением $\lambda_1=-4$ см. §4.17 в /16/ с собственной функцией $\phi_1(z) = /3/2/^{1/2} ch^{-2} z$. Так как из /6.6/ вытекает, что $\int_0^\infty f(z)\phi_1(z)dz = 0$, то

$$K(f) = \int_0^\infty [f'^2-(6ch^{-2}z)f^2]dz = \int_0^\infty \lambda F^2(\lambda)d\sigma(\lambda) \ge 0,$$

где

$$\mathcal{F}(\lambda) = \int_0^\infty \phi(z;\lambda)f(z)\,dz, \quad f(z) = \int_{-\infty}^\infty \phi(z;\lambda)F(\lambda)d\sigma(\lambda),$$

$\sigma(\lambda)$ - неубывающая функция. Тогда

$$\delta^2 M(f) = aK(f) + \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{2}f^2 + a^2f^2\right)dx + 6\int_0^\infty a^2(1-ch^{-2}(ax))f^2dx,$$

$$\delta^2 M(f) \ge \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{2}f_x^2 + a^2f^2\right)dx. \qquad /6.10/$$

Объединяя /6.9/ и /6.10/, получим оценку для $\delta^2 M(h)$:

$$\delta^2 M(h) \ge \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{2}h_x^2 + a^2h^2\right)dx. \qquad /6.11/$$

3. Доказательство устойчивости. Для $\delta^3 M$ имеем оценку

$$\delta^3 M \ge -4a\sup|h|\int_{-\infty}^\infty h^2dx \ge -a2\sqrt{2}\,\|h\|_1\|h\|^2.$$

Отсюда, обозначая $p=p(t)=\|h_x\|$, $q=q(t)=\|h\|$, в силу /6.3/ и /6.11/ получим

$$\Delta M \ge \ell(p^2+q^2) - c_1(p+q)q^2;\ \ell=\min(1/2,a^2),\ c_1=2^{3/2}a. \qquad /6.12/$$

Отметим, что

$$q(t) = \|u(x,t)-\Phi(x+b(t))\| = \inf_{\zeta\in R}\|u(x,t)-\Phi(x+\zeta)\|$$

является непрерывной функцией для $t\ge 0$. Это следует из оценки $|q(t_1)-q(t_2)|\le \|u(\cdot,t_1)-u(\cdot,t_2)\|_2$ в силу теоремы 1.

Из /6.3/ и /6.4/ вытекает, что $p^2=\int_{-\infty} h_x^2dx \le \gamma + 2a^2q^2 + 4a(p+q)q^2$. Решая это неравенство относительно p, получаем

$$p\le 2aq + [\gamma + 2a(aq^2+2q^3+2aq^4)]^{1/2} = Y(q). \qquad /6.13/$$

Подставляя /6.13/ в /6.12/, получим

$$\gamma \ge \Delta M \ge \ell(p^2+q^2) - c_1(q+Y(q))q^2 \ge$$
$$\ge q^2(\ell - c_1Y(q)) - c_1q^3 = Z(q). \qquad /6.14/$$

Выберем δ_1 так, чтобы $Y(0)=(\gamma(\delta))^{1/2}<\ell/c_1$ при $\delta<\delta_1$. Тогда $Z'(q)>0$ на некотором интервале $(0,q_0)$ и функция $Z(q)$ будет расти от нуля до $Z_m=Z(q_0)$. Так как Z_m растет при $\gamma\to 0$, то существует такое δ_2, что $\gamma(\delta)<Z_m$ при $\delta<\delta_2$. Тогда в силу непрерывности $q(t)$ из /6.14/ вытекает, что $q(t)\le q_\gamma$, где q_γ - наименьший положительный корень $Z(q)=\gamma$. Отметим, что q_γ не зависит от t. Отсюда, возвращаясь к /6.14/, получим

$$\ell p^2 \le \gamma + c_1(q+Y(q))q^2 \le \gamma + c_1(q_\gamma+Y(q_\gamma))q_\gamma^2,$$

$$\|h\|_1^2 = p^2+q^2 \le q_\gamma^2 + (1/\ell)[\gamma + c_1(q_\gamma+Y(q_\gamma))q_\gamma^2].$$

Так как $q_\gamma\to 0$ при $\gamma\to 0$, то для $\epsilon>0$ выберем δ_3 таким образом, чтобы при $\delta<\delta_3$ выполнялось

$$q_\gamma^2 + (1/\ell)[\gamma + c_1(q_\gamma+Y(q_\gamma))q_\gamma^2] < \epsilon^2.$$

Тогда при $\delta<\delta=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ получим окончательно

$$d_{II}(u,\Phi)\le\|h\|_1<\epsilon.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Gardner C.S. et al. Phys.Rev.Lett., 1967, 19, p. 1095-1097.
2. Марченко В.А. Матем.сб., 1974, 95 /137/, с. 331-356.
3. Новиков С.П. Функц.анализ, 1974, 8, вып.3, с. 54-66.
4. Итс А.Р., Матвеев В.Б. ТМФ, 1975, 23, №1, с. 51-68.
5. Lax P.D. Comm.Pure Appl.Math., 1975, 28, p. 141-188.
6. Бубнов Б.А. ДАН СССР, 1980, 251, 4, с. 777.

7. Гуревич А.В., Питаевский А.П. Письма в ЖЭТФ, 1973, 17, вып.5, с. 268-271.
8. Гуревич А.В., Питаевский А.П. ЖЭТФ, 1973, 65, вып. 2 /8/, с. 590-604.
9. Хруслов Е.Я. Матем.сб., 1976, 99 /141/, с. 261-281.
10. Mayumi OHMiya. J.Math.Tokushima Univ., 1978, vol.12, p. 9-17.
11. Bona J.L., Smith R. Phil.Trans. R. Soc.Lond, 1975, A278, p. 555.
12. Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J. Phol.Trans.R. Soc. Rond., 1972, A272, p. 47.
13. Жидков Е.П., Кирчев К.П. ОИЯИ, P5-81-130, Дубна, 1981.
14. Miura R.M., Gardner C.S., Kruskal M.D. J.Math.Phys., 1968, 9, p. 1204.
15. Benjamin T.B. Proc. R. Soc. Lond., 1972, A238, p. 153.
16. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. ИЛ, М., т. 1, 1960.
17. Теория солитонов. Метод обратной задачи /под ред. С.П.Новикова/. "Наука", М., 1980.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 марта 1982 года.

Жидков Е.П., Кирчев К.П. Задача Коши для модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с начальными данными типа ступеньки — P5-82-193

Для нелинейного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза показаны существование, единственность и непрерывная зависимость решения задачи Коши в пространстве, состоящем из гладких функций типа ступеньки. Кроме того, доказана устойчивость формы решения вида уединенной волны.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Zhidkov E.P., Kirchev K.P. The Initial-Value Problem for the Modified Korteweg-de Fries Equation with the Step Type Initial Data — P5-82-193

In space of smooth step type functions existence, uniqueness, regularity and continuous dependence theorems for the initial value problem for the modified Korteweg-de Fries equation are established. The stability of the shape of solitary-wave solutions is proved.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.