сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-82-187

В.П.Гердт, А.Ю.Жарков

РАЗЛОЖЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДРОБИ В СИСТЕМЕ **REDUCE-2**

1982

Хорошо известно, что при аналитических преобразованиях математических выражений, содержащих рациональные функции, последние весьма часто приходится разлагать на элементарные дроби. В частности, эта операция является составной и наиболее трудоемкой частью выкладок, связанных с интегрированием и интегральными преобразованиями рациональных дробей. Многие программные системы для аналитических вычислений на ЭВМ[I] имеют встроенные процедуры, реализующие разложение рациональных дробей. Однако такая мощная система, как REDUCE-2 [2], обладающая широкими возможностями для манипуляций с рациональными выражениями, не имеет встроенного аппарата для их разложения на элементарные дроби.

В настоящей работе предложен алгоритм разложения рациональных дробей, эффективно учитывающий специфику системы REDUCE-2 и реализованный на ее внешнем языке. Алгоритм применим к правильным рациональным дробям, имеющим вид:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} ,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – полиномы по x, не имеющие общих корней и такие, что степень $P(x)$ меньше степени $Q(x)$.

Как известно[3], в этом случае $R(x)$ можно однозначно представить в виде следующей суммы элементарных дробей:

$$R(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{p_i} \frac{c_{ij}}{(x-r_i)^j} . \qquad (I)$$

Здесь N – число корней r_i с кратностями p_i полинома $Q(x)$.

Задача состоит в определении коэффициентов c_{ij}. Широко используемые методы решения этой задачи[4], такие, как метод неопределенных коэффициентов и метод подстановки, основаны либо на решении системы линейных алгебраических уравнений на коэффициенты c_{ij} в (I), либо на многократном дифференцировании равенства (I).

Рассмотрим другой подход к вычислению коэффициентов разложения (I), гораздо более эффективный с точки зрения его реализации на языке REDUCE-2.

Предположим, что полином $Q(x)$ полностью факторизован и известны все его корни и их кратности. Покажем, как для фиксированного корня r_i определить набор чисел c_{ij} $(j=1,2,\dots p_i)$. С этой целью умножим равенство (I) на полином

$$\varphi_i(x) = \frac{Q(x)}{(x-r_i)^{p_i}} \qquad (2)$$

и сделаем замену переменных

$$x = y + r_i ,$$

после чего получим равенство

$$P(y+r_i) = \varphi_i(y+r_i)\left[\sum_{j=0}^{p_i-1} c_{i,p_i-j}\, y^j + y^{p_i} F_i(y)\right] . \qquad (3)$$

Заметим, что функции $\varphi_i(y+r_i)$ и $F_i(y)$, определяемые формулами (2) и (3), не имеют полюсов в точке $y=0$. Выделяя в равенстве (3) коэффициенты при y^k $(k=0,1,\dots p_i-1)$, получим рекуррентные соотношения

$$c_{i,p_i} = a_0^{(i)}/b_0^{(i)} ,$$
$$c_{i,p_i-j} = (a_j^{(i)} - \sum_{k=1}^{j} c_{i,p_i-j+k}\, b_k^{(i)})/b_0^{(i)} \qquad (j=1,2\dots p_i-1), \qquad (4)$$

где $a_k^{(i)}$ и $b_k^{(i)}$ определяются из разложений

$$P(y+r_i) = \sum_{k\geq 0} a_k^{(i)} y^k ,$$
$$\varphi_i(y+r_i) = \sum_{k\geq 0} b_k^{(i)} y^k , \qquad b_0^{(i)} = \varphi_i(r_i) \neq 0. \qquad (5)$$

Описанная процедура повторяется N раз (для каждого корня r_i).

Привлекательной особенностью данного алгоритма является то, что полиномы $P(y+r_i)$ и $\varphi_i(y+r_i)$ достаточно знать с точностью до членов порядка y^{p_i}. Это приводит к значительному сокращению объема необходимых выкладок в случае больших N и малых p_i.

В системе REDUCE-2 имеются адекватные встроенные процедуры для реализации описанного алгоритма. Прежде всего сюда относятся процедуры обрывания степенных рядов в процессе вычисления и аппарат

выделения массива полиномиальных коэффициентов, используемые при вычислениях по формулам (5).

Алгоритм реализован нами в системе REDUCE-2 (версия 1979 г.) на ЭВМ ЕС-1060.

Временное поведение алгоритма было проанализировано на простом примере

$$R(x) = \frac{1}{x^m (x+1)^m} .$$

Следующая таблица показывает, как нарастает время вычислений с ростом m:

m	I0	20	30	40	50
t(m)	II"	23"	46"	I'24"	2'I5"

Как видно из таблицы, в рассматриваемой области изменения m машинное время нарастает квадратично:

$$t(m) \sim m^2/20 . \qquad (6)$$

Детальный анализ алгоритма показывает, что с ростом m машинное время растет, во-первых, за счет вычислений по рекуррентным соотношениям (4) и, во-вторых, за счет вычисления коэффициентов разложений (5). Время первой группы нарастает квадратично, второй – экспоненциально $\sim 2^{m/20}$.

Таким образом, предложенный алгоритм относится к классу экспоненциальных алгоритмов. Однако в практически интересной области (в случае рассмотренного выше примера для $m \leq 100$) квадратичный вклад в машинное время доминирует над экспоненциальным. При $m=50$ отклонение от квадратичного поведения (6) составляет около 8%.

Если степень знаменателя $Q(x)$ нарастает за счет увеличения числа корней r_i, то зануление в (5) коэффициентов при степенях y, больших p_i-1, дает существенную оптимизацию. Так, для функции

$$R(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{8} (x-i)^5}$$

это сокращает время счета в 2 раза и требует всего 36" времени ЕС-1060. Наиболее громоздкий из тестовых примеров – разложение на элементарные дроби функции

$$R(x) = \frac{(x+2)^{90}}{x^{50}(x+1)^{50}}$$

потребовал на ЭВМ ЕС-1060 4'30" машинного времени.

Процедура разложения правильных рациональных функций на элементарные дроби включена нами в библиотеку текстов для системы REDUCE-2. Для использования данной процедуры необходимо включить в пакет управляющих карт для ЕС-1060 следующие карты:

```
//DD1 DD DSN=LIB4.REDTX(FRACT),DISP=OLD,
//           UNIT=5Ø61,VOL=SER=SYSPRV
```

а после входа в систему REDUCE-2 дать команду

```
IN DD1;
```

Обращение к процедуре имеет вид:

```
FRACT(NR,X,R,P,C,N);
```

Поясним значения формальных параметров процедуры:

NR – полином в числителе рациональной функции;
R – имя массива корней знаменателя;
P – имя массива соответствующих кратностей;
C – имя функции двух целых переменных, обозначающей коэффициенты разложения c_{ij} в (I);
N – число различных корней знаменателя.

Прежде чем обратиться к процедуре FRACT , пользователь должен задать значения корней знаменателя и их кратностей. При этом, разумеется, корни могут быть не только числовыми, но и символьными выражениями.

В результате выполнения процедуры FRACT элементам C(I,J) будут присвоены значения коэффициентов разложения (I). Кроме того, будут распечатаны все слагаемые правой части равенства (I).

Пример обращения к процедуре FRACT и распечатка результата ее работы содержатся в Приложении.

Процедура FRACT интенсивно использовалась нами в работе /5/ при решении с помощью системы REDUCE-2 цепочки линейных разностных уравнений с рациональной неоднородной частью, определяющих общее решение уравнений Чу-Лоу для статического p-волнового πN -рассеяния.

Выше отмечалась ориентация предложенного алгоритма именно на внешний язык системы REDUCE-2. Конечно, использование более тонких математических методов, опирающихся на модульную арифметику, позволяет конструировать более эффективные алгоритмы для манипуляций с символьными выражениями. В частности, в совсем недавней работе /6/, на этом пути был предложен новый высокоэффективный алгоритм разложения рациональных функций на элементарные дроби. Однако отсутствие в системе REDUCE-2 подходящего встроенного математического аппарата препятствует адаптации к этой системе алгоритма работы /6/.

В заключение авторы выражают благодарность А.С.Хёрну, В.А.Ростовцеву и А.П.Крюкову за полезные обсуждения вопросов, затронутых в настоящей работе.

Приложение

Пример обращения к процедуре FRACT для разложения выражения $(2x+5)/(x^2\ (x-1)^3)$ на элементарные дроби и распечатка результата.

```
COMMENT  DECOMPOSITION OF (2*X+5)/X**2/(X-1)**3;
ARRAY R(2),P(2);
R(1) =Ø$
R(2) =1$
P(1) =2$
P(2) =3$
A =2*X+5$
FRACT(A,X,R,P,C,2)$
```

$(- 5)/X^2$

$(- 17)/X$

$7/(X - 1)^3$

$(- 12)/(X - 1)^2$

$17/(X - 1)$

Литература

1. Гердт В.П., Тарасов О.В., Ширков Д.В. УФН, 1980, т.130, вып.1, с.113.
2. Hearn A.C. Reduce User's Manual.Second Edition. Univ. of Utah, 1973.
3. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра, "Наука", М., 1976, с.133.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики.,т. I, "Наука", М., 1974, с.461.
5. Гердт В.П., Жарков А.Ю. ОИЯИ, Р2-81-435, Дубна, 1981.
6. Wang P.S. In: Proc. of the 1981 ACM Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. Snowbird, Utah, 1981, p.212.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 марта 1982 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Гердт В.П., Жарков А.Ю. P5-82-187

Разложение рациональных функций на элементарные дроби в системе REDUCE-2

Разработан алгоритм разложения правильных рациональных функций одной переменной на элементарные дроби. Предполагается, что известны корни знаменателя и их кратности. Разработанный алгоритм удобен для реализации на внешнем языке системы REDUCE-2, являющейся одной из наиболее развитых программных систем для аналитических вычислений на ЭВМ. Дан анализ эффективности предложенного алгоритма, который реализован в виде процедуры, записанной в библиотеку текстов для системы REDUCE-2 на ЭВМ ЕС-1060 в ОИЯИ.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Gerdt V.P., Zharkov A.Yu. P5-82-187

Elementary Fraction Decomposition of Rational Functions in REDUCE-2 System

The algorithm of elementary function decomposition of rational functions based on the knowledge of roots of denominator and their multiplicity is constructed. The algorithm is valid in the case of developed rational fractions and is implemented in the external language of the REDUCE-2 system. The efficiency analysis of the suggested algorithm is presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automatization, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.