ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 8178

Л.Александров

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ТРАЕКТОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЬЮТОНОВСКОГО ТИПА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

P5 - 8178

Л.Александров

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ТРАЕКТОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЬЮТОНОВСКОГО ТИПА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Направлено в ЖВММФ

P5 - 8178

Александров Л.

Регуляризованные траектории приближения ньютоновского типа для решения нелинейных уравнений

Для решения нелинейных операторных уравнений вводятся непрерывные регуляризованные процессы Ньютона-Канторовича и Гаусса-Ньютона. Получены утверждения о существовании решений, в том числе и в случаях наличия точек вырождения. Найдены достаточные условия для применяемых аддитивных операторов регуляризации.

Результаты получены при помощи методов теории устойчивости нелинейных дифференциальных уравнений.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1974

P5 - 8178

Aleksandrov L.

Regularized Trajectories of the Newton Type Approximation for Solving Non-Linear Equations

The continuous regularized processes of Newton-Kantorovich and Gauss-Newton type are introduced for solving non-linear operator equations. The statements on the existence of solutions, including the cases with the degeneracy points, are proved. The sufficient conditions for the additive regularization operators are found.

The results are obtained by means of the non-linear differential equation stability theory.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1974

При решении нелинейных операторных уравнений на основе регуляризованных итерационных процессов /1–6/ прежде всего возникает вопрос об изучении общих свойств применяемых аддитивных операторов регуляризации.

В случае R -процессов ньютоновского типа можно получить достаточные условия для операторов регуляризации путем расширения существующих теорем о сходимости и существовании решения /7,8/. Так, например, для R -процессов Ньютона-Канторовича получены /1,5/ достаточные условия для операторов регуляризации, согласованные одновременно со сходимостью процесса и существованием решения. Эти результаты были перенесены на случай R -процессов Гаусса-Ньютона /2,3,5/. Другие достаточные условия о применяемых операторах регуляризации для R -процессов Гаусса-Ньютона получены в работах /4,6/.

В настоящей работе продолжается изучение свойств операторов регуляризации для процессов ньютоновского типа на основе теории непрерывных аналогов /9–11/. Вместе с этим получены утверждения о сходимости непрерывных R -процессов и существовании решений нелинейных уравнений. В частности, получены утверждения о существовании решений нелинейных уравнений в случаях, когда траектория приближения проходит через точки вырождения /теоремы 3 и 6, их следствия/.

При выводе основных результатов в работе применяются такие методы теории устойчивости нелинейных дифференциальных уравнений, как теорема об устойчивости генерального показателя /12/ и др.

§1. *Непрерывные аналоги* R *-процессов ньютоновского типа*

п.1. Пусть X и Y - банаховы пространства, f - нелинейный оператор, отображающий выпуклую подобласть $D_f \subseteq X$ в множество $R_f \subseteq Y$.

При заданном элементе $y \in R_f$ рассматривается решение нелинейного уравнения

$$fx = y\,. \qquad /1/$$

Будем предполагать, что в некотором шаре $S(x_0,\rho) = \{x / \|x - x_0\| < \rho, \rho > 0\} \subset D_f$ оператор f дифференцируем по Фреше и что в окрестности каждой точки из $S(x_0,\rho)$ производная $f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица.

Через $\mathfrak{R}_0(f')$ обозначим множество линейных операторных функций $r(x)$, определенных на $S(x_0,\rho)$ и действующих из $S(x_0,\rho)$ в R_f, таких, что в $S(x_0,\rho)$: а/ операторы $f'(x) + r(x)$ обладают ограниченными /по норме/ обратными операторами; б/ регуляризаторы $r(x)$ удовлетворяют локальному условию Липшица.

Задача Коши.

$$\frac{dx}{dt} = -(f'(x) + r(x))^{-1}\,(fx - y)\,, \qquad /2/$$

$$x(t_0) = x_0\,, \qquad /3/$$

где оператор $r(x)\, \mathfrak{R}(f')$, а решение $x(t) \in S(x_0,\rho)$, определенное для всех $t \in [t_0, \infty)$, является непрерывным аналогом R-процесса Ньютона-Канторовича[9].

Если существует предел $x_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$, решение $x(t)$ будем называть *регуляризованной траекторией приближения*.

Вдоль траектории приближения процесса /2/-/3/ в дальнейшем рассматриваем и *присоединенную задачу о невязке* $D(t) = fx(t) - y$ уравнения /1/:

$$\frac{d}{dt}\,D(t) = -f'(x(t))\,(f'(x(t)) + r(x(t)))^{-1}\,D(t)\,, \qquad /4/$$

$$D(t_0) = fx_0 - y \qquad (t_0 \le t < \infty)\,. \qquad /5/$$

Свойство а/ в определении регуляризирующего множества $\mathfrak{R}(f')$ является основным. Укажем два класса операторов f, для которых построение множества $\mathfrak{R}(f')$ особенно просто.

Класс расщепленного спектра. Пусть в комплексной области заданы прямые a_1 и a_2, параллельные мнимой оси, которые пересекают реальную ось, соответственно, в точках α_1 и α_2, где $\alpha_1 < \alpha_2$. Пусть оператор f такой, что прямые a_1 и a_2 разбивают спектр $\sigma(f'(x))$ /оператора $f'(x)$ / на две части σ_1 и σ_2 $(\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2)$, для которых при любых $x \in S(x_0,\rho)$ имеют место неравенства

$$-\infty < \operatorname{Re}\sigma_1(f'(x)) < \alpha_1\,, \quad \alpha_2 < \operatorname{Re}\sigma_2(f'(x)) < \infty\,.$$

В этом случае можно построить множество регуляризаторов $\mathfrak{R}(f')$, используя операторы $r(x) : S(x_0,\rho) \to R_f$ со свойством

$$\alpha_1 < \operatorname{Re}\sigma\, r(x) < \alpha_2 \qquad (\forall x \in S(x_0,\rho))\,.$$

Класс с выпуклой энергией. Пусть X и Y - вещественные гильбертовы пространства, f - потенциальный монотонный оператор в D_f /например, операторы типа Немыцкого[13, стр. 63] /. В этом случае оператор f имеет выпуклую энергию, т.е. производная $f'(x)$ является самосопряженным неотрицательным оператором.

Множеством регуляризаторов теперь может служить множество самосопряженных равномерно положительных операторов[12, стр. 50] $r(x) : S(x_0,\rho) \to R_f$ /обозначаемое в дальнейшем как $\hat{\mathfrak{R}}(f')$, /, для которых, кроме того, выполнено условие б/ в определении. Самый простой вид в этом случае имеет множество скалярных регуляризаторов $\hat{\mathfrak{R}}_\alpha(f') = \{\alpha E_X / 0 < \alpha < \infty\}$.

п.2. Пусть X и Y - гильбертовы пространства.

R -процессы Гаусса-Ньютона [2,3,4,6] занимают важное место в вычислительной практике на ЭВМ [14,15].

Под непрерывным аналогом R-процесса Гаусса-Ньютона для решения уравнения /1/ понимаем задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = -(f'^*(x)\, f'(x) + r(x))^{-1} f'^*(x)\,(fx - y), \qquad /6/$$

$$x(t_0) = x_0, \qquad /7/$$

где оператор регуляризации $r(x) \in \hat{\mathcal{R}}(f'^* f')$, а траектория приближения $x(t) \in S(x_0, \rho)$ существует для всех $t \in [t_0, \infty)$.

В связи с решением уравнения /1/ на основе задачи /2/-/3/ /задачи /6/-/7// в дальнейшем разграничим два вида точек шара $S(x_0, \rho)$. Точку $\bar{x} \in S(x_0, \rho)$ назовем *вырожденной* относительно оператора $f'(x)$ /относительно оператора $f'^*(x)\, f'(x)$ /, если оператор $f'(\bar{x})$ /оператор $f'^*(\bar{x})\, f'(\bar{x})$ / необратим. В противном случае говорим, что $\bar{x}$ является *простой точкой* относительно оператора $f'(x)$ /относительно оператора $f'^*(x)\, f'(x)$ /.

§2. Обоснование непрерывных R-процессов Ньютона-Канторовича в случае отсутствия точек вырождения

п.1. Дальнейшей целью работы является определение свойств операторов $r(x)$ в условиях существования решения уравнения /1/ и глобальной интегрируемости задачи /2/-/3/. Как правило, вместе с этим получается утверждения о разрешимости уравнения /1/ и устойчивой интегрируемости задачи /2/-/3/.

Предварительно приведем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть: 1/ задача /2/-/3/ интегрируема в интервале* $[t_0, T)$, *где* $t > t_0$ *и* $x(t) \in S(x_0, \rho)$ *при* $t_0 \le t < T$ *; 2/ в* $S(x_0, \rho)$ *производная* $f'(x)$ *и оператор регуляризации* $r(x) \in \mathcal{R}(f')$ *связаны соотношением*

$$\| r(x)\,(f'(x) + r(x))^{-1} \| \le \epsilon < 1 . \qquad /8/$$

Тогда невязка уравнений /1/ $D(t) = fx(t) - y$ *подчиняется оценке*

$$\| D(t) \| \le \| f x_0 - y \|\, e^{-(1-\epsilon)(t-t_0)} \quad (t_0 \le t < T). \qquad /9/$$

Доказательство. Перепишем уравнение /4/ в виде

$$\frac{d}{dt} D(t) = -D(t) + r(x)\,(f'(x) + r(x))^{-1} D(t) . \qquad /10/$$

В интервале $[t_0, T)$ /с учетом условия /5//, для невязки уравнения /1/ имеем

$$\| D(t) \| < e^{-(t-t_0)} \| f x - y \| + \epsilon \int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)} \| D(s) \| ds .$$

Из этого неравенства на основе леммы 2.2 [12, стр. 155] получаем требуемую оценку /9/.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие 1/ леммы 1, а также условия: 2'/ в шаре* $S(x_0, \rho)$ *производная* $f'(x)$ *и оператор регуляризации* $r(x) \in \mathcal{R}(f')$ *связаны как соотношением /8/, так и соотношением*

$$\| E - f'(x) - r(x) \| \le e \| x - x_0 \| , \qquad /11/$$

где e *- положительная постоянная, такая, что* $e < 1/\rho$ *; 3/ для радиуса шара* $s(x_0, \rho)$ *имеет место неравенство*

$$\rho \ge \rho_0 = \frac{2 e^{-(1-\epsilon) t_0}}{1-\epsilon} \| f x_0 - y \| . \qquad /12/$$

Тогда для любых чисел $\tau, t \in [t_0, T)$, *для которых* $\tau > t$, *справедливо соотношение*

$$\| x(t) - x(\tau) \| < \frac{1}{e} \left(\sqrt{1 - a(1 - e^{-(1-\epsilon)(t-t_0)})} - \sqrt{1 - a(1 - e^{-(1-\epsilon)(\tau - t_0)})} \right), \qquad /13/$$

где $a = e\rho_0 < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основе неравенств /9/ и /11/ для длины траектории $x(t)$ от t_0 до τ находим

$$\|x(\tau)-x_0\| \le \int_{t_0}^{\tau} \left\|\frac{dx}{dt}\right\| dt \le$$
$$\le \int_{t_0}^{\tau} \|(f'(x(t))+r(x(t)))^{-1}\| \; \|D(t)\| \, dt \le \qquad /14/$$
$$\le \|fx_0-y\| \int_{t_0}^{\tau} \frac{e^{-(1-\epsilon)t}}{1-e\|x(t)-x_0\|} \, dt .$$

Отметим, что в $S(x_0,\rho)$ справедливо неравенство $1-e\|x-x_0\|>0$ /так как по предположению $e<1/\rho$ /. Применяя к /14/ леммы об интегральном неравенстве Бихари [17], находим неравенство

$$\|x(\tau)-x\| \le \frac{1}{e}\left(1-\sqrt{1-a\left(1-e^{-(1-\epsilon)(\tau-t_0)}\right)}\right) . \qquad /15/$$

Используя оценки для $\|x(\tau)-x_0\|$ и $\|x(t)-x_0\|$ /неравенство /15/ справедливо при замене τ t /, получим требуемые соотношения/13/.

Имеет место следующее утверждение о построении траектории приближения для процесса /2/-/3/.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 2 / и 3/ леммы 2.*

Тогда: 1/ процесс /2/-/3/ имеет решение $x(t)$ *для всех* $t_0 \le t < \infty$, *которое не выходит из шара* $S(x_0,\rho)$; *2/ существует предел* $x_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$, *являющийся решением уравнения /1/; 3/ невязка* $D(t)$ $(t_0\le t<\infty)$ *убывает по экспоненциальному закону /9/; 4/ для скорости процесса /2/-/3/ справедлива оценка*

$$\|x(t)-x_\infty\| \le \frac{1}{e}\left(\sqrt{1-a\left(1-e^{-(1-\epsilon)(t-t_0)}\right)}-\sqrt{1-a}\right)$$
$$(t_0 \le t < \infty) . \qquad /17/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предположений о производной $f'(x)$ и операторе регуляризации $r(x) \in \mathfrak{R}(f')$ следуют как ограниченность в $S(x_0,\rho)$ правой части дифференциального уравнения /2/, так и выполнение для любой точки из $S(x_0,\rho)$ локального условия Липшица. Отсюда, для достаточно малого $T>t_0$ следует существование единственного решения $x(t)\in S(x_0,\rho)$ $(t_0\le t<T)$ задачи Коши /2/-/3/. Это означает выполнение условия 1/ леммы 1.

На основе лемм 1 и 2 получаем неравенства

$$\|x(t)-x_0\| \le \frac{1}{e}\left(1-\sqrt{1-a\left(1-e^{-(1-\epsilon)(t-t_0)}\right)}\right) < \rho_0$$
$$(t_0 \le t < T) .$$

Таким образом, траектория $x(t)$ при $t\in[t\;,T)$ целиком лежит внутри шара $S(x_0,\rho)$. Следовательно, решение $x(t)$ продолжаемо на всем интервале $[t_0,\infty)$, при этом оно не выходит из шара $S(x_0,\rho)$ /утверждение 1/.

Очевидно, оценка /9/ имеет место для всех $t\in[t_0,\infty)$, т.е. справедливо утверждение 3/.

Из условий 2/ и 3 ′/ /справедливых для теоремы/, с учетом утверждения 1/, следует, что неравенство /13/ выполнено для любых $\tau, t\in[t_0,\infty)$. Отсюда из утверждения 3/ теоремы вытекает справедливость утверждений 2/ и 4/. Этим теорема доказана.

Неравенство /11/ было использовано для получения оценок /13/ и /17/ на основе леммы Бихари. Использование /11/ приводит к определенной особенности в процессе /2/-/3/, так как в начальной точке x_0 регуляризатор должен иметь вид $r(x_0)=E-f'(x_0)$. Это означает, что в достаточно малой окрестности точки x_0 процесс /2/-/3/ является непрерывным аналогом метода наискорейшего спуска и только вне этой окрестности /2/-/3/ может превратиться в процесс ньютоновского типа. Такое сочетание желательно, так как эти два метода дополняют друг друга в указанном порядке.

Приведем одно обобщение теоремы 1 М.К.Гавурина [9] для процесса /2/-/3/, в котором неравенство /11/ заменено более слабым.

Теорема 2. *Пусть: 2″/ в сфере* $S(x_0,\rho)$ *производная* $f'(x)$ *и оператор регуляризации* $r(x)\in\mathfrak{R}(f')$ *связаны соотношением /8/ и соотношением*

$$\|(f'(x)+r(x))^{-1}\| \le \gamma , \qquad /19/$$

где число $\gamma < \infty$ *- заданный уровень регуляризации*/5/; *3'/ для радиуса сферы* $S(x_0, \rho)$ *справедливо неравенство*

$$\rho \ge \rho_0 = \frac{\gamma}{1-\epsilon} \| f x_0 - y \| .$$

Тогда имеют место утверждения 1/-3/ теоремы 1, а также следующее утверждение: 4' / скорость непрерывного процесса /2/-/3/ оценивается по закону

$$\| x(t) - x_0 \| \le \frac{\gamma}{1-\epsilon} e^{-(1-\epsilon)(t-t_0)} \quad (t_0 \le t < \infty) \quad /20/$$

Доказательство. Утверждения 1/-3/ доказываются аналогично, как и в случае теоремы 1. Для этой цели вместо неравенства /18/ используются неравенства

$$\| x(t) - x_0 \| \le \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{dx}{dt} \right\| dt \le$$

$$\le \frac{\gamma}{1-\epsilon} \| f x_0 - y \| (1 - e^{-(1-\epsilon)(t-t_0)}) < \rho$$

Оценка /20/ получается из неравенства $\| x(t) - x_\infty \| \le \int_{t_0}^{\infty} \left\| \frac{dx}{dt} \right\| dt$ на основе /8/ и /19/.

п.2. Рассмотрим важное ограничение, имеющее место при применении процесса /1/-/2/ и теорем 1,2.

Пусть $X = Y$ - гильбертово пространство; оператор f принадлежит классу с выпуклой энергией, т.е. для всех $x \in S(x_0, \rho)$ имеет место соотношение

$$\inf \{ (f'(x) y, y) / \| y \| = 1 \} = m(f'(x)) \ge 0 .$$

Пусть оператор регуляризации $r(x) \in \hat{\mathfrak{R}}(f')$ коммутирует с оператором $f'(x)$/в частности, таким является регуляризатор $r \in \hat{\mathfrak{R}}_\alpha$ /.

В этом случае для точки вырождения $\bar{x} \in S(x_0, \rho)$ /простой точки/ имеет место соотношение $m(f'(\bar{x})) = 0$ $(m f'(\bar{x}) > 0)$. Напомним, что по определению $m(r(\bar{x})) > 0$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $\bar{x} \in S(x_0, \rho)$ *является точкой вырождения /простой точкой/ для оператора* $f'(x)$, *тогда для спектрального радиуса* $\rho(P(\bar{x}))$ *оператора* $P(x) = r(x)(f'(x) + r(x))^{-1}$ *имеет место соотношение*

$$\rho(P(\bar{x})) = 1 \quad (\rho(P(\bar{x})) < 1) ,$$

Доказательство. Введем в пространстве X эквивалентную норму $(y, z)_* = (U(\bar{x}) y, U(\bar{x}) z)$ $(y, z \in X)$, где $U(x) = (f'(x) + r(x))(r(x))^{-1}$. /Обозначение зависимости операторов f', r, P и U от точки $\bar{x}$ в дальнейшем опускается/.

Оператор P является самосопряженным как в пространстве X, так и в пространстве X_*. Для его спектрального радиуса имеем

$$\rho(P) = \sup \{ \| P y \|_* / \| y \|_* = 1 \} = \sup_{y \in X_*} \sqrt{(Py, Py)_* / (y, y)_*} =$$

$$= \sup_{y \in X} \sqrt{(y, y) / (Uy, Uy)} = 1 / \sqrt{1 + \inf_{y \in X} \Delta(y)} ,$$

где

$$\Delta(y) = (f' r^{-1} (f' r^{-1} + 2E) y, y) / (y, y) .$$

Учитывая, что из соотношения $m(f') = 0$ $(m(f') > 0)$ следует соотношение $m(\Delta) = 0$ $(m(\Delta) > 0)$, делаем вывод о справедливости леммы 3.

Из доказанной леммы следует, что при наличии хотя бы одной точки вырождения в шаре $S(x_0, \rho)$ условие /8/ нарушается /для любой нормы в пространстве операторов $[X]$. / и таким образом теоремы 1 и 2 неприменимы.

§3. Обоснование непрерывных R-процессов Ньютона-Канторовича при наличии точек вырождения

п.1. Оказывается, что неравенство /8/ можно заменить более общим условием /в частном случае - интегральным неравенством/, которое обеспечивает построение траектории приближения и при наличии в $S(x_0, \rho)$ точек вырождения.

Предварительно приведем вспомогательное утверждение.

Лемма 4. *Пусть процесс /2/-/3/ имеет решение* $x(t)$ $(t_0 \le t < \infty)$, *не выходящее из сферы* $S(x_0, \rho)$. *Тогда для решения задачи о невязке /4/-/5/ справедлива оценка*

$$\| D(t) \| \le \| fx_0 - y \| e^{-q(t)} \qquad (t_0 \le t < \infty), \quad /21/$$

где $q(t) = t - t_0 - \int_{t_0}^{t} p(s)\, ds$,

$$p(t) = \| r(x(t))\,(f'(x(t)) + r(x(t)))^{-1} \| .$$

Доказательство. Проводится аналогично доказательству теоремы 3.1 /12, стр. 414/ об устойчивости генерального показателя. Вместо дифференциального уравнения с выделенной главной частью 3.1 /12, стр. 413/ решается уравнение о невязке в виде /10/. Для этого уравнения имеем $N = 1$, $\nu = 1$. . На основе леммы 2.2 /12, стр. 155/ из неравенства

$$\|D(t)\| \le \| fx - y \| e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)} p(s)\, \|D(s)\|\, ds$$

следует оценка /21/ /вместо оценки вида 3.7 /12, стр. 415/ /.

Теорема 3. *Пусть: 1′/ процесс /2/-/3/ обладает решением* $x(t)$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$, *не выходящим из шара* $S(x_0, \rho)$ [*процесс /2/-/3/ обладает для всех* $t \in [t_0, \infty)$ *решением* $x(t) \in S(x_0, \rho)$ *и для него существует предел* $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t)$] ; 2^{III}/ *в* $S(x_0, \rho)$ *производная* $f'(x)$ *и регуляризатор* $r(x) \in \mathfrak{R}(f')$ *связаны как соотношением /19/, так и соотношением*

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = +\infty , \qquad /21/$$

$$\int_{\bar t}^{\infty} e^{-q(s)} ds < +\infty , \qquad /22/$$

где $\bar t > t_0$ *- достаточно большая постоянная, такая, что неравенство* $q(t) > 0$ *выполнено для всех* $t > \bar t$ [*для всех* $x \in S(x_0, \rho)$ *справедливо неравенство /19/, а также выполнено соотношение /21/*] ; *3′/ радиус шара* $S(x_0, \rho)$ *подчинен неравенству*

$$\rho \ge \rho_0 = \gamma\, e^{-\bar q(\bar t - t_0)} \| fx_0 - y \| \int_{\bar t}^{\infty} e^{-q(s)} ds , \qquad /23/$$

где $\bar q = \max\{ q(t) \mid t_0 \le t \le \bar t \}$.

Тогда: 2/ существует предел $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_\infty \in S(x_0, \rho_0)$, *являющийся решением уравнения /1/* [*предел* x_∞ *является решением уравнения /1/*] ; *3′/ для всех* $t > \bar t$ *невязка* $D(t)$ *уравнения /1/ убывает по закону /21/.*

Замечание. Предположение в прямых скобках 1′/, 2^{III}/ и утверждение 2/ в прямых скобках, вместе с утверждением 3′/ представляют вторую часть теоремы 3.

Доказательство /1-ой части/.

На основе леммы 4, условия 3′/ теоремы и неравенства /19/ длина траектории задачи /2/-/3/ оценивается

$$\| x(t) - x_0 \| \le \gamma \| f x_0 - y \| \int_{t_0}^{t} e^{-q(s)} ds \le$$

$$\le \gamma \| fx_0 - y \| e^{-\bar q(\bar t - t)} \int_{\bar t}^{t} e^{-q(s)} ds \le \rho_0 . \qquad /24/$$

Утверждение 3′/ теоремы следует из предположения 1′/ и соотношений /21/ и /22/. Из оценки /24/ и утверждения 3′/ следует справедливое утверждение 2/ теоремы.

Доказательство 2-ой части теоремы 3 непосредственно следует из леммы 4.

п.2. Проиллюстрируем на простом нелинейном примере идею регуляризации и вместе с этим применение основной теоремы 3.

Пусть требуется решить уравнение

$$\cos x + 1 = 0 \qquad (0 \le x \le \pi) . \qquad /25/$$

Теоремы [9, 10], обосновывающие применение нерегуляризованного процесса /2/-/3/ ($r(x) = 0$), исключают случай решения /25/, так как в решении $x = \pi$ для производной имеем $f'(\pi) = -\sin\pi = 0$. Уравнение /25/ можно решить, применяя в /2/-/3/ регуляризацию и, в частности, на основе следующего процесса:

$$\frac{dx}{dt} = \cos x + 1 \qquad (1 \le t < \infty), \qquad x(1) = \frac{\pi}{2}, \qquad /26/$$

получаемого из /2/-/3/ для $r(x) = 1 - \sin x$. Действительно, для траектории приближения имеем

$x = \arc\cos \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $(1 \le t < \infty, \exists\, x_\infty = \pi)$. Неравенство /19/

выполнено для уровня регуляризации $\gamma = 1$. С другой стороны, $q(t) = \ln \frac{1+t^2}{2} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$, $\bar t = 1$, $\bar q = 1$, $\int_1^\infty e^{-q(s)} ds = \frac{\pi}{2}$,

так что условие 2/ /первой части теоремы 3/ выполнено.

Проверив условие 3'/, находим $\rho_0 = \frac{\pi}{2}$. Утверждение 3'/ теоремы 3 дает оценку для скорости убывания невязки

$$\| \cos x + 1 \| \le \frac{2}{1+t^2} \qquad (t > 1). \qquad /27/$$

Подставив в левую часть /27/ решение $x = \arc\cos \frac{1-t^2}{1+t^2}$, видим, что в оценке /27/ имеет место знак равенства.

§4. *Следствия теоремы 3*

Следствие 1, п. 1.

Пусть выполнено условие 1'/ 1-ой части теоремы 3, а также выполнены условия: $2^{(IV)}$/ в шаре $S(x_0, \rho)$, производная $f'(x)$ и оператор регуляризации $r(x) \in \mathfrak{K}(f')$ связаны как соотношением /19/, так и соотношением

$$\frac{1}{\tau_0} \int_t^{t+\tau_0} p(s)\, ds \le \epsilon < 1, \qquad /28/$$

где $\tau_0 > 0$ - некоторая постоянная;

3^{II}/ для радиуса шара $S(x_0, \rho)$ выполнено неравенство

$$\rho \ge \rho_0 = \frac{\gamma}{1-\epsilon} e^{\epsilon \tau_0} \| f x_0 - y \|.$$

Тогда справедливо утверждение 2/теоремы 3/1-ая часть/, а также имеют место следующие утверждения: 3^{II}/ невязка уравнения /1/ убывает по закону

$$\| D(t) \| \le e^{\epsilon \tau_0} \| f x_0 - y \| e^{-(1-\epsilon)(t-t_0)} \quad (t > t_0). \qquad /29/$$

4^{II}/ для скорости процесса /2/-/3/ справедлива оценка

$$\| x(t) - x_\infty \| \le \frac{\gamma}{1-\epsilon} e^{\epsilon \tau_0} \| f x_0 - y \| e^{-(1-\epsilon)(t-t_0)} \quad (t > t_0). \qquad /30/$$

Доказательство. Из неравенства /28/ для функции $q(t)$ следует неравенство

$$(1-\epsilon)(t-t_0) - \epsilon \tau_0 \le q(t) \qquad \text{при } t > t_0. \qquad /31/$$

На основе /31/ /как и в случае неравенств /24// для длины траектории /2/-/3/ находим оценку

$$\| x(t) - x_0 \| \le \frac{\gamma}{1-\epsilon} \| f x_0 - y \| e^{\epsilon \tau_0} (1 - e^{-(1-\epsilon)(t-t_0)}) < \rho_0. \qquad /32/$$

Утверждение 3^{II}/ следует из неравенств /21/ и /31/. Справедливость утверждения 4^{II}/ следует из неравенства /29/, если оценить величину $\| x(t) - x_0 \|$, аналогично получению неравенства /32/.

п.2. Теорема 3 и ее следствие 1 дают возможность применять R-процесс /2/-/3/ для решения уравнения /1/ и в тех случаях, когда траектория приближения $x(t)$ $(t_0 \le t < \infty)$ проходит через точки вырождения или стремится к точке вырождения.

Перед тем как привести следствия теоремы для этих случаев, уточним некоторые вспомогательные понятия.

Точку вырождения $\bar{x} \in S(x_0, \rho)$ называем *изолированной*, если существует число $\bar{\rho} > 0$ такое, что множество $(S(\bar{x}, \bar{\rho}) / \{\bar{x}\}) \cap S(x_0, \rho)$ состоит только из простых точек.

Пусть для некоторого внутреннего числа $\bar{t} \in [t_0, \infty)$ точка траектории приближения $x(\bar{t})$ является вырожденной. Точку $x(t)$ назовем *двусторонне-изолированной /правоизолированной/*, если существуют такие числа $\tau_e, \tau_r > 0$ $(\exists \tau_r > 0)$, что множество точек траектории приближения $\{x(t) / \bar{t} - \tau_e \leq \bar{t} < t \leq \bar{t} + \tau_r, \bar{t} > \tau_e + t_0\}$ $(\{x(t) / \bar{t} < t \leq \bar{t} + \tau_r\})$ состоит только из простых точек.

Кусок траектории $\{x(t) / t_0 \leq \bar{t}_e \leq t \leq \bar{t}_r < \infty\}$, состоящий только из простых точек и внутренних двусторонне-изолированных точек вырождения называем *невырожденным куском*.

Кусок траектории $\{x(t) / t_0 \leq \bar{t}_1 \leq t \leq \bar{t}_2 < \infty\}$, состоящий только из внутренних вырожденных точек $x(t)$ $(\bar{t}_1 < t < \bar{t}_2)$, называем *вырожденным куском*.

п.3. В следующих двух утверждениях будем предполагать, что выполнены предположения пункта 2; параграфа 2 о пространствах X, Y и об операторах $f'(x)$ и $r(x)$.

Из следствия 1 и леммы 3 вытекает

Следствие 2. *Пусть 1^{II}/ задача /2/-/3/ имеет решение $x(t) \in S(x_0, \rho)$ $(t_0 \leq t < \infty)$, для которого $x(t_0)$ - правоизолированная точка вырождения и существует внутренний кусок вырождения $\{x(t) / t_0 \leq \bar{t}_1 \leq t \leq \bar{t}_2 < \infty\}$, существует также предел $x_\infty = \lim_{t \to \infty} x(t)$, являющийся изолированной простой точкой /а остальные части траектории $\{x(t) / t_0 < t \leq \bar{t}_1\}$ и $\{x(t) / \bar{t}_2 \leq t < \infty\}$ являются невырожденными кусками; 2^{V}/ в сфере $S(x_0, \rho)$ выполнены условия /19/ и /28/, где в /28/ постоянная усредненная подчинена неравенству*

$$\tau_0 > \bar{t}_2 - \bar{t}_1 .$$

Пусть также выполнено условие 3^{II}/ следствия 1. Тогда справедливо утверждение 2/ теоремы 3 /1-ая часть/, а также имеют место утверждения 3^{II}/ и 4^{II}/ следствия 1.

На основе второй части теоремы 3 и леммы 3 доказывается следующее

Следствие 3. *Пусть: 1^{III}/ задача /2/-/3/ имеет решение $x(t)$ $(t_0 \leq t < \infty)$, и для него существует предел $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t)$, являющийся изолированной точкой вырождения, а любая часть траектории $\{x(t) / t_0 \leq t \leq \bar{t}_r\}$ /для любого фиксированного $\bar{t}_r \in [t_0, \infty)$ / - невырожденный кусок; 2^{VI} / для всех $x \in X$ производная $f'(x)$ и оператор регуляризации $r(x) \in \hat{\Re}(f')$ подчинены условию /19/, кроме того, для всех $t \geq \bar{t}$ / $\bar{t} > t_0$ - некоторая фиксированная постоянная/ справедлива оценка*

$$p(t) \leq \frac{\alpha t}{\alpha t + \beta},$$

где $\alpha, \beta > 0$ - постоянные.

Тогда: 2/ предел x_∞ является решением уравнения; 3^{III}/ невязка уравнения /1/ убывает при $t > \bar{t}$ согласно закону

$$\|D(t)\| \leq \| f x_0 - y \| \, e^{-\bar{q}(\bar{t} - t_0)} \left(\frac{\alpha \bar{t} + \beta}{\alpha t + \beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha}},$$

где число $\bar{q}$ определено в условии 3^{II}/ теоремы 3.

§5. *Обоснование непрерывных* R-*процессов Гаусса-Ньютона*

В параграфе приводится несколько утверждений о применимости процесса /6/-/7/ для решения уравнения /1/. Предполагается, что $X = Y$ - гильбертово пространство.

Лемма 5. *Пусть: 1/ задача /6/-/7/ интегрируема в интервале $[t_0, T)$, где $T > t_0$ и $x(t) \in S(x_0, \rho)$ при $t_0 \leq t < T$; ; 2/ в шаре $S(x_0, \rho)$ производная $f'(x)$ и оператор регуляризации $r(x) \in \Re(f'^* f')$ связаны соотношением*

$$((fx - y), v(x)(fx - y)) \geq \mu \|fx - y\|^2, \qquad /33/$$

где $v(x) = f'(x)(f'^*(x) f'(x) + r(x))^{-1} f'^*(x)$,

а $\mu > 0$ *- постоянная.*

Тогда в интервале $[t_0, T)$ *невязка* $D(t) = fx(t) - y$ *уравнения /1/ подчиняется оценке*

$$\|D(t)\| \le \|fx_0 - y\| e^{-\mu(t-t_0)} . \qquad /34/$$

Доказательство. В интервале $[t_0, T)$ рассматриваем решение присоединенной задачи Коши о норме невязки

$$\frac{d}{dt}\|D(t)\|^2 = -2(f'^*(x)(fx-y), \frac{dx}{dt}) , \qquad /35/$$

$$\|D(t_0)\| = \|fx_0 - y\|^2 . \qquad /36/$$

Применяя к правой части /35/ неравенство /33/, получаем

$$\frac{d}{dt}\|D(t)\|^2 = -2((fx-y), v(x)(fx-y)) \le -2\mu\|D(t)\|^2.$$

На основе этого неравенства и начального условия /36/ получается требуемая оценка /34/. Аналогично теореме 2 доказывается следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть: 2'/ в шаре* $S(x_0, \rho)$ *производная* $f'(x)$ *и оператор регуляризации* $r(x) \in \hat{\mathfrak{R}}(f'^*f')$ *связаны как соотношением /33/, так и соотношением*

$$\|(f'^*(x) f'(x) + r(x))^{-1} f'^*(x)\| \le \gamma < \infty , \qquad /37/$$

где γ *- некоторая постоянная. 3/ для радиуса шара выполнено неравенство*

$$\rho \ge \rho_0 = \frac{\gamma}{\mu} \|fx_0 - y\| . \qquad /38/$$

Тогда: 1/ процесс /6/-/7/ имеет решение $x(t)$ *для всех* $t_0 \le t < \infty$, *которое не выходит из* $S(x_0, \rho_0)$; *2/ существует предел* $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t)$, *являющийся решением уравнения /1/; 3/ невязка* $D(t)$ $(t_0 \le t < \infty)$, *определяемая задачей /35/-/36/, убывает по экспоненциальному закону /34/; 4/ для скоростей процесса /6/-/7/ имеет место оценка*

$$\|x(t) - x_\infty\| \le \frac{\gamma}{\mu} \|fx_0 - y\| e^{-\mu(t-t_0)} \qquad (t \le t < \infty) .$$

При рассмотрении непрерывных R-процессов ньютоновского типа можно воспользоваться общим дифференциальным уравнением, предложенным Я.И.Альбером [11]. В частности, вместо уравнения /6/ рассматриваем следующее уравнение

$$\frac{dx}{dt} = g(x)(f'^*(x) f'(x) + r(x))^{-1} f'^*(x)(fx-y), \qquad /39/$$

где $r(x) \in \hat{\mathfrak{R}}(f'^*f')$ и

$$g(x) = - \frac{\|fx-y\|^2}{((fx-y), v(x)(fx-y))} .$$

Предположим, что правая часть уравнения /39/ такова, что R-процесс /39/-/7/ имеет решение "в малом", тогда в силе следующее следствие общей теоремы 1 [12].

Теорема 5. *Пусть: 2''/ производная* $f'(x)$ *и оператор регуляризации* $r(x)$ *удовлетворяют для всех* $x \in S(x_0, \rho)$ *неравенству*

$$\|(f'^*(x) f'(x) + r(x))^{-1}\| \le C_1 \|fx-y\|^{\alpha_1} \le \qquad /40/$$

$$\le C_2 |((fx-y), v(x)(fx-y))|^{\alpha_2} ;$$

где C_1 , $C_2 > 0$ *- некоторые постоянные, а* $\alpha_1 > -1$,

$\alpha_2 > \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1 + 3}$ *- подходяще выбранные степенные показатели;*

3/ радиус шара $S(x_0, \rho)$ *подчинен неравенству*

$$\rho \ge \rho_0 = \|fx_0 - y\|^{\beta} \frac{C^{\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2}} C^{\frac{1}{\alpha_2}}}{\gamma\beta} ,$$

где $\beta = \alpha_1 + 3 - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$, *а* $\gamma \in (0,1)$ *- некоторая постоянная.*

Тогда: 1′/ процесс /39/-/7/ имеет решение $x(t)\in S(x_0,\rho_0)$ *для всех* $t\in[t_0,\infty)$ *; 2′/ существует предел* $x_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$, *который является решением уравнения /1/; 3′/ норма невязки* $D(t)=fx(t)-y$ *убывает при* $t>t_0$ *по закону*

$$\|D(t)\|\le\|fx_0-y\|\,e^{-(t-t_0)};$$

4′/ для скорости процесса /39/-/7/ справедлива оценка

$$\|x(t)-x_\infty\|<\gamma\rho_0\, e^{-\beta(t-t_0)} \qquad (t>t_0).$$

Условия /40/ теоремы 5 дают некоторую возможность для применения R-процесса /39/-/7/ в случае, когда в предельной точке x_∞ существует неограниченный по норме оператор

$$(f'^*(x_\infty)f'(x_\infty)+r(x_\infty))^{-1}.$$

Приведем еще одно утверждение о применимости более простого процесса /6/-/7/ для решения уравнения /1/, которое охватывает и случай наличия в $S(x_0,\rho)$ точек вырождения.

Предварительно отметим, что невязка $D(t)=fx(t)-y$, рассматриваемая вдоль траектории процесса /6/-/7/, является решением следующей присоединенной задачи:

$$\frac{d}{dt}D(t) = -D(t)-(E-v(x))\,D(t),\ D(t_0)=fx_0-y. \qquad /41/$$

Аналогично лемме 4 о задаче /41/ доказывается вспомогательное утверждение.

Лемма 6. *Если задача имеет решение* $x(t)$ *для всех* $t\in[t_0,\infty)$, *которое не выходит из шара* $S(x_0,\rho)$, *то для невязки* $D(t)$ *уравнения /1/ справедлива оценка*

$$\|D(t)\|<\|fx_0-y\|\,e^{-\tilde q(t)} \qquad (t>t_0), \qquad /42/$$

где $\tilde q(t)=t-t_0-\int_{t_0}^{t}\|E-v(x(s))\|\,ds$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть: 1′/ задача /6/-/7/ имеет решение* $x(t)\in S(x_0,\rho)$ *для всех* $t\in[t_0,\infty)$ *; 2‴/ для всех* $x\in S(x_0,\rho)$ *производная* $f'(x)$ *и оператор регуляризации связаны неравенством /37/, а также выполнены соотношения*

$$\lim_{t\to\infty}\tilde q(t)=+\infty,\quad \int_{t}^{\infty} e^{-\tilde q(s)}ds<+\infty,$$

где $\bar t>t_0$ *- достаточно большая постоянная, такая, что неравенство* $\tilde q(t)>0$ *выполнено для всех* $t>\bar t$ *; 3′/ радиус шара* $S(x_0,\rho)$ *подчинен неравенству*

$$\rho\ge\rho_0=\gamma\, e^{-\bar q(\bar t-t_0)}\,\|fx_0-y\|\int_{t}^{\infty} e^{-\tilde q(s)}\,ds,$$

/где $\bar q=\max\{\tilde q(t)\,/\,t_0\le t\le\bar t\}$ */.*

Тогда: 2″/ существует предел $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=x_\infty\in S(x_0,\rho)$, *который является решением уравнения /1/;* 3^{II}*/ норма невязки* $D(t)$ *убывает при* $t>\bar t$ *по закону /42/.*

Доказательство теоремы 6 проводится аналогично доказательству первой части теоремы 3. В то же время, как и в теореме 3, можно сформулировать вторую часть теоремы 6.

Отметим в конце, что для R-процесса Гаусса-Ньютона /6/-/7/ имеют место следствия теоремы 6, аналогичные следствиям 1-3 из §4.

Литература

1. *Л.Александров. Сообщение ОИЯИ, Р5-5136, Дубна, 1970. /ЖВМ и МФ, т. 11, 1, 1971/.*
2. *Л.Александров. Сообщение ОИЯИ, Р5-5137, Дубна, 1970.*
3. *Л.Александров. Сообщение ОИЯИ, Р5-5515, Дубна, 1970.*
4. *В.Е.Шаманский. Укр.мат.ж., т. 22, 1970, стр. 514-526. /см. там же, т. 23, 1971, стр. 138/.*
5. *Л.Александров. Сообщение ОИЯИ, Р5-7258, Дубна, 1973.*
6. *H. Schwetlick. ЖВМ и МФ, т. 13,, 6, 1973.*
7. *Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. Функциональный анализ*

в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.

8. *Л.Коллатц. Функциональный анализ и вычислительная математика. М., Мир, 1969.*
9. *М.К.Гавурин. Изв. вузов, сер. матем. 5/6/, 1968, стр. 18-31.*
10. *Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. ДАН СССР, 180, 1, 1968, стр. 18-21.*
11. *Я.И.Альбер. Дифференциальные уравнения, т. 7, 1971.*
12. *Ю.Л.Далецкий, М.К.Крейн. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., Физматгиз, 1970.*
13. *М.М.Вайнберг. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., Физматгиз, 1972.*
14. V. Bard. SIAM j. (Numer. Anal.) v. 7, №1, 1970.
15. *Л.Александров. Сообщение ОИЯИ, Р5-6862, Дубна, 1972.*
16. *Э.Беккенбах, Р.Белман. Неравенства, М., Мир, 1965.*

Рукопись поступила в издательский отдел
6 августа 1974 года.