8113

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Phys. Lett., 1974, v. 50A, N 1, c. 42-4

8113

Р5-8113

В.Г.Маханьков

О СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИМ УРАВНЕНИЮ БУССИНЕСА

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

P5-8113

В.Г.Маханьков

О СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИМ УРАВНЕНИЮ БУССИНЕСА

Направлено в ***Physics Letters***

1. В последнее время появилась серия аналитико-вычислительных работ, посвященных исследованию динамики образования и взаимодействия ленгмюровских солитонов /1–3/. Последние, как известно, являются стационарными решениями уравнения Шредингера для комплексной амплитуды электрического поля с самосогласованным потенциалом. Обычно используют два вида уравнения для потенциала: квазистатическое и волновое. В первом случае получают уравнение Шредингера с кубической нелинейностью /4/, которое имеет счетное множество интегралов движения и описывает невзаимодействующие солитоны. Во втором подходе - более последовательном с физической точки зрения - картина совершенно иная. Здесь солитоны уже взаимодействуют друг с другом и со звуковыми волнами. Два солитона могут слипаться, образуя один и излучая звуковые цуги и т.д. /подробнее см. /1–3/ /.

В работе /3/ было отмечено, что область применимости квазистатического приближения при описании образования и взаимодействия солитонов практически отсутствует. Там же было подчеркнуто, что использование волнового уравнения для потенциала /или, что то же самое, возмущение плотности/ справедливо для медленных солитонов, скорость которых меньше скорости звука.

При относительной скорости движения солитона - числах Маха - $M = v_g / v_s > 1/\sqrt{5}$ /здесь $v_g = 3k_0 v_e^2/\omega_{pe}$ - скорость солитона, $v_s = \sqrt{T_e / m_i}$ - скорость звука/ он представляет собой скорее звуковой импульс, нагруженный в.ч. полем, чем ленгмюровский солитон, так как основная доля его энергии сосредоточена в н.ч. самосогласованных движениях плазмы. Чем резче резонанс

$M \to 1$, тем большая доля энергии приходится на них, так как $|E^2/\delta n| \simeq 1-M^2$. Это означает, что при скоростях солитонов, близких к звуковым, волновое уравнение, полученное в [4] и использованное в [3], становится неприменимым.

Ниже мы получим уравнение для потенциала /возмущения плотности/, описывающее динамику околозвуковых ленгмюровских солитонов, и исследуем некоторые его решения.

2. Для нахождения уравнения, описывающего низкочастотные движения плазмы, удобно перейти к фурье-представлению. Тогда, используя предположение о слабой нелинейности и дисперсии ионно-звуковых волн, представим функцию плотности в виде

$$n = n_0 + \delta n = n_0 + n^{(1)} + n^{(2)} \qquad /1/$$

и уравнение Пуассона

$$k^2\phi = 4\pi e\left(n^{(1)} + n^{(2)} - n_0 \exp\left\{\frac{e\phi - u}{T_e}\right\}\right), \qquad /2/$$

где $n^{(1)}$ - линейная, а $n^{(2)}$ - нелинейная по полю часть возмущения плотности, ϕ - потенциал н.ч. возмущения, u - потенциал в.ч. силы Миллера.

Из /2/ имеем

$$k^2\phi = 4\pi e\left(n^{(1)} - n_0\frac{e\phi}{T_e} + n_0\frac{u}{T_e}\right) \qquad /3/$$

$$\frac{n^{(2)}}{n_0} = \frac{e^2\phi^2}{T_e^2} - 2\frac{e\phi u}{T_e^2} + \frac{u^2}{T_e^2}. \qquad /4/$$

Поступая стандартным образом[5], найдем

$$\frac{e\phi}{T_e} = -k^2 d_e^2\left(\frac{n^{(1)}}{n_0} + \frac{u}{T_e}\right) + \frac{n^{(1)}}{n_0} + \frac{u}{T_e}$$

$$n^{(1)} = -n_0\frac{k^2 e\phi}{\omega^2 m_i}, \qquad n^{(2)} = n_0\left(n^{(1)}/n_0\right)^2. \qquad /5/$$

Этих соотношений достаточно, чтобы получить искомое уравнение; действительно,

$$\omega^2\,\delta n = \omega^2 n_0\left(n^{(1)}/n_0\right)^2 + k^2 v_s^2\frac{e\phi}{T_e},$$

откуда, исключая $e\phi$ с помощью первой из формул /5/ и переходя к координатному представлению, получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_s^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - v_s^2 d_e^2\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)\frac{\delta n}{n_0} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\delta n}{n_0}\right)^2 =$$

$$= v_s^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{u}{T_e} + d_e^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{u}{T_e}\right), \qquad /6/$$

где $v_s = \sqrt{T_e/m_i}$, $d_e = v_e/\omega_{pe}$, $v_e = \sqrt{T_e/m_e}$.

Используя известное выражение для силы Миллера [4] и заменяя в нелинейном члене $(\partial^2/\partial t^2)$ через $(v_s^2\partial^2/\partial x^2)$, запишем /6/ в безразмерном виде:

$$U_{tt} - U_{xx} - \frac{4}{3}\mu\left(U^2 + \frac{1}{3}U_{xx}\right)_{xx} = \left(|\psi|^2 + \frac{4}{9}\mu|\psi|^2_{xx}\right)_{xx}; \qquad /7/$$

здесь безразмерные t, x, U и ψ определяются формулами

$$t = \frac{2}{3}\omega_{pe}\mu t, \quad x = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{\mu}\,x}{d_e}, \quad U = \frac{3}{4}\frac{\delta n}{\mu n_0},$$

$$\psi^2 = \frac{3}{64}\frac{E^2}{\mu\pi n_0 T_e}, \quad \mu = \frac{m_e}{m_i}.$$

Уравнение /7/ справедливо при скорости движения солитона, близкой к звуковой $|1-M^2| \ll 1$, поэтому в правой части /7/ можно пренебречь вторым членом.

Теперь полная система выглядит так:

$$-i\psi_t + \psi_{xx} + \lambda\psi = U\psi$$

$$U_{tt} - U_{xx} - \epsilon(U^2)_{xx} - \frac{\epsilon}{3} U_{xxxx} = (|\psi|^2)_{xx} \qquad /8/$$

$$\epsilon = \frac{4}{3}\mu .$$

3. Исследуем влияние малых членов, пропорциональных ϵ, в условиях

$$1 \gg |1-M^2| \gg \frac{m_e}{m_i}. \qquad /9/$$

В этой области сверхзвукового солитона не существует. Для дозвукового, $M<1$, солитона в системе $\xi = x - Mt$ получим для

$$\psi(\xi,t) = e^{-i\frac{Mx}{2}} \psi(x,t)$$

$$\psi_{\xi\xi} + \lambda\psi = U\psi \qquad \left(\gamma^2 = \frac{1}{1-M^2}\right) \qquad /10/$$

$$\gamma^{-2}U + \epsilon U^2 + \frac{\epsilon}{3} U_{\xi\xi} = -\psi^2 .$$

Систему /10/ можно решить методом последовательных приближений, представляя функции ψ и U в виде $\psi = \psi_0 + y$ и $U = U^{(0)} + U^{(1)}$, где y и $U^{(1)} \sim \epsilon$. Тогда в нулевом приближении по ϵ получим известное решение

$$\psi_0 = \frac{\psi_{m0}}{ch\left(\frac{\gamma\psi_{m0}}{\sqrt{2}}\xi\right)}, \quad \lambda = -\frac{\gamma^2}{2}\psi_{m0}^2 . \qquad /11/$$

Подставляя /11/ в /10/, получим уравнение для поправки

$$\frac{dy}{d\xi} - a(\xi)y = b(\xi)$$

$$a(\xi) = \gamma^2 \frac{\psi_0}{2\psi_{0\xi}}(\psi_{m0}^2 - 2\psi_0^2), \quad b(\xi) = \qquad /12/$$

$$= \frac{\epsilon}{3}\gamma^6 \frac{\psi_0^4}{2\psi_{0\xi}}(\psi_{m0}^2 - 2\psi_0^2) .$$

При получении /12/ пришлось положить

$$y_{max} = -\frac{\epsilon}{3}\gamma^4 \psi_{m0}^3 , \qquad /13/$$

чтобы исключить расходящиеся при $x \to \pm\infty$ решения; кроме того, теперь

$$\lambda = -\frac{\gamma^2}{2}\psi_{m0}^2\left(1 + \frac{2}{3}\epsilon\gamma^4\psi_{m0}^2\right) . \qquad /14/$$

Решение уравнения /12/ имеет вид

$$y = \frac{y_{max}}{ch\,\kappa\xi}\left(3 - 2\frac{1}{ch^2\kappa\xi}\right) . \qquad /15/$$

Используя интеграл движения /числа плазмонов/ $S_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^2\,dx$, найдем окончательно:

$$\psi = \frac{\gamma S_1/\sqrt{2}}{ch\,\kappa\xi}\left(1 + \frac{\epsilon}{18}\gamma^6 S_1^2 + \frac{\epsilon}{3}\gamma^6 S_1^2 / ch^2\kappa\xi\right) \qquad /16/$$

$$U = -(\gamma^4 S_1^2/2ch^2\kappa x)\left(1 - \frac{2}{9}\epsilon\gamma^6 S_1^2 + \frac{5}{3}\epsilon\gamma^6 S_1^2/ch^2\kappa\xi\right) \qquad /17/$$

$$\kappa = \frac{1}{2}\gamma^2 S_1\left(1 + \frac{5}{9}\epsilon\gamma^6 S_1^2\right) . \qquad /18/$$

Из выражений /16/-/18/ следует: во-первых, что поправка к возмущению плотности в солитоне приблизительно в два раза больше, чем к энергии в.ч. колебаний

ψ^2, во-вторых, учет нелинейности и дисперсии в уравнении для U приводит к обужению солитона и увеличению его амплитуды как для функции U, так и для ψ^2, при той же полной в.ч. энергии S_1.

Вышеприведенные решения /16/-/18/ справедливы в условиях, когда

$$1 - M^2 >> \epsilon^{1/3} S_1^{2/3}. \qquad /19/$$

К сожалению, получить аналитические решения системы /8/ в наиболее интересной области $|1-M^2| \sim \epsilon^{1/3} S_1^{2/3}$ пока не удается, поэтому в настоящее время предпринимаются попытки найти такие решения численными методами.

Литература

1. *Л.М.Дегтярев, В.Г.Маханьков, Л.И.Рудаков. Препринт ИПМ № 18, Москва, 1974; ЖЭТФ, 67, № 8, 1974.*
2. *Kh.O.Abdulloev, I.L.Bogolubskii, V.G.Makhankov. Preprint JINR, E9-7717, Dubna, 1974. Phys.Lett., 48A, 161 (1974).*
3. *Х.О.Абдуллоев, И.Л.Боголюбский, В.Г.Маханьков. Препринт ОИЯИ, Р9-7992, Дубна, 1974.*
4. *В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. ЖЭТФ, 61, 118 /1971/. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 62, 1745 /1972/.*
5. *Р.З.Сагдеев. В книге "Вопросы теории плазмы", т. 4, стр. 45, Атомиздат. М., 1964.*

Рукопись поступила в издательский отдел
17 июля 1974 года.