сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-81-829

С.И.Сердюкова

К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ В C РАЗНОСТНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1981

В работах /I,2/ исследуются оптимальные численные методы решения гиперболических уравнений. Оптимальность понимается в следующем смысле. При счете разрывных решений важно, чтобы ширина зоны "размывания" изолированного разрыва была как можно уже. Для схем порядка точности q ширина зоны "размывания" изолированного разрыва – $O(h^{-1/(q+1)})$ /3/-/5/. В идеале хотелось бы иметь численные методы, "размывающие" изолированный разрыв на конечное число точек: $W(n)=O(1)$, $n\cdot\tau\le 1$. Кроме того, известно, что функции из C^N_α по значениям в узлах сетки с шагом h могут быть восстановлены с точностью $O(h^{N+\alpha})$. Отсюда возникает естественное желание иметь численные методы с погрешностью $O(h^{N+\alpha})$ на решениях из C^N_α. Удалось построить методы, обладающие свойствами, близкими к оптимальным. Для простейшего гиперболического уравнения $U_t+U_x=0$ рассматривается класс явных разностных схем максимального нечетного порядка точности, написанных по несимметричному четному набору точек

$$\begin{cases} U^{n+1}_\nu = \sum\limits_{\ell=-K}^{K-1} a_\ell U^n_{\nu+\ell}, & \nu=0,\pm 1,\pm 2,\dots, \\ U^0_\nu = f_\nu, & \\ a_\ell = a_{-K+z} = (-1)^{K+z}\dfrac{(K-\gamma)\dots(1-\gamma)\gamma(1+\gamma)\dots(K-1+\gamma)}{(2K-1)!}\,\dfrac{C^z_{2K-1}}{(-K+z+\gamma)}. \end{cases} \tag{I}$$

Эти схемы устойчивы в C /6,7/ при естественном ограничении на отношение шагов сетки $\gamma=\tau/h\le 1$. Ширина зоны "размывания" изолированного разрыва

$$W(n)=O(h^{-1/2K}),\quad n\tau\le 1.$$

Величина погрешности на решениях из C^N_α

$$E(n) = O(h^{N+\alpha-(1/2\kappa)}), \quad n\tau \le 1.$$

Доказано /I,2/, что при $\kappa = b \ln h^{-1}$

$$\vartheta(n) = O(\ln h^{-1}), \; E(n) = O(h^{N+\alpha} \ln\ln h^{-1}), \quad n\tau \le 1.$$

Таким образом, чтобы уменьшить ширину зоны "размывания" изолированного разрыва до $O(\ln h^{-1})$, нужно с уменьшением шага сетки увеличивать порядок точности схемы по логарифмическому закону. Желательно перенести полученные результаты на случай переменных коэффициентов. В работах /8-10/, на которые обычно ссылаются авторы при обсуждении устойчивости в случае переменных коэффициентов, речь идет об устойчивости в L_2. В предлагаемой работе исследуется устойчивость в C. Рассматривается (I), аппроксимирующая гиперболическое уравнение $U_t + \rho(x) U_x = 0$, $\gamma = \tau\rho(x)/h$. Предполагается, что $\rho(x)$ непрерывно дифференцируемая и $|\rho'(x)| \le C$, $x \subset R$. Интересно было бы рассмотреть случай липшиц-непрерывных $\rho(x)$. В дальнейшем предполагается также исследовать случай $\kappa = b \ln h^{-1}$. В предлагаемой работе для этого случая установлена равномерная по n оценка разностной функции Грина

$$\| \Gamma^n_\nu \|_{L_1} \asymp \ln\ln h^{-1}, \quad n\tau \le 1.$$

Ранее /I,2/ такая оценка была установлена для $n \gg \tau^{-\frac{1}{2}}$.

Итак, исследуется устойчивость в C в случае переменных коэффициентов. Введем в рассмотрение оператор перехода от слоя к слою G. G преобразует последовательность

$$\vartheta^n = \{ U^n_0, U^n_{\pm 1}, \dots, U^n_{\pm\nu}, \dots \}$$

в последовательность ϑ^{n+1} по формулам (I), где

$$a_\ell = a_\ell(\nu h), \quad \gamma = \tau\rho(x)/h.$$

Предполагается, что $\frac{1}{4} \le \gamma_\nu \le \frac{3}{4}$. Решение (I) может быть представлено в виде интеграла от резольвенты:

$$\vartheta^n = G^n \vartheta^0, \quad G^n = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (G - zI)^{-1} \cdot z^n \, dz.$$

Контур Γ охватывает все точки спектра оператора G, особые точки резольвенты $(G - zI)^{-1}$. Нам потребуется явный вид резольвенты.

Задача сводится к решению системы обыкновенных разностных уравнений с параметром z : $\sum_{\ell=-K}^{K-1} a_\ell(\nu h)\, u_{\nu+\ell} = z\, u_\nu + f_\nu$.

Сделав замену переменных

$$y_\nu = (u_{\nu+K-1}, \ldots, u_\nu, \ldots, u_{\nu-K+1})^*,$$

получаем одношаговую формулу

$$y_\nu = \mathcal{M}(z,\nu)\, y_{\nu-1} + g_\nu .$$

$\mathcal{M}(z,\nu)$ – резольвентная матрица:

$$\mathcal{M}(z,\nu) = \begin{Vmatrix} -a_{K-1}^{-1} a_{K-2} & \ldots & -a_{K-1}^{-1}(a_0 - z) & \ldots & -a_{K-1}^{-1} a_{-K} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$g_\nu = (a_{K-1}^{-1} f_\nu, 0, \ldots, 0)^*, \quad a_\ell = a_\ell(\nu h).$$

$\mathcal{M}(z,\nu)$ – аналитическая функция z, γ . Для каждого фиксированного ν при $\{|z|>1\} \cap \{|z-1|>\delta\}$ спектр $\mathcal{M}(z,\nu)$ разбивается на два непересекающихся подмножества $|\varkappa|<1$ и $|\varkappa|>1$. И, согласно теореме Т.Като /II/, определено аналитическое по z, γ преобразование подобия, которое приводит $\mathcal{M}(z,\nu)$ к блочному виду:

$$T\mathcal{M}T^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad |\mathrm{sp} A| < \sigma < 1, \quad |\mathrm{sp} B| > \sigma^{-1} .$$

$\mathcal{M}(1,\nu)$ имеет собственное значение, равное единице. Соответственно при $|z-1|<\delta$ определено аналитическое преобразование подобия, которое приводит $\mathcal{M}(z,\nu)$ к такому виду:

$$T\mathcal{M}T^{-1} = \begin{Vmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa & 0 \\ 0 & 0 & B \end{Vmatrix}, \quad |\mathrm{sp} A'| < \sigma, \quad \varkappa(1) = 1, \quad z = e^{i\varphi},$$

$$\varkappa(\psi) = \exp\left\{-i\frac{\psi}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma^{2K+1}}\psi^{2K} + O(\psi^{2K+1})\right\},$$

$$\beta = \frac{(K-\gamma)\dots(1-\gamma)\gamma(1+\gamma)\dots(K-1+\gamma)}{2K(2K-1)!}.$$

$\varkappa(\psi)$ – обратная функция характеристического многочлена

$$\lambda(\varphi) = \exp\left\{-i\gamma\varphi - \beta\varphi^{2K} + O(\varphi^{2K+1})\right\}.$$

В обоих случаях T, T^{-1} – аналитические функции z, γ. По предположению, $\gamma(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция и $|\gamma_x'| \le b$. Отсюда следует, что

$$|T_\nu - T_{\nu-1}| \le ch.$$

Чтобы получить явный вид резольвенты, сделаем еще одну замену переменных

$$T_\nu y_\nu = w_\nu.$$

В обоих рассмотренных выше случаях резольвентная матрица преобразуется к виду

$$\begin{pmatrix} A_\nu & 0 \\ 0 & B_\nu \end{pmatrix}, \quad |\mathrm{sp}\, A_\nu| \le 1, \quad |\mathrm{sp}\, B_\nu| > \sigma^{-1} > 1, \qquad |z| \geqslant 1.$$

Резольвентное уравнение принимает вид

$$w_\nu = \begin{pmatrix} A_\nu & 0 \\ 0 & B_\nu \end{pmatrix} w_{\nu-1} + T_\nu g_\nu + \begin{pmatrix} A_\nu & 0 \\ 0 & B_\nu \end{pmatrix}(T_\nu - T_{\nu-1})T_{\nu-1}^{-1} w_{\nu-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} A_\nu & 0 \\ 0 & B_\nu \end{pmatrix} w_{\nu-1} + T_\nu g_\nu + h\, C_\nu w_{\nu-1}. \tag{2}$$

Решение системы

$$w_\nu = \begin{pmatrix} A_\nu & 0 \\ 0 & B_\nu \end{pmatrix} w_{\nu-1} + T g_\nu \tag{3}$$

может быть выписано в явном виде

$$w_\nu^{I} = \sum_{s=0}^{\infty} A_\nu A_{\nu-1} \dots A_{\nu-s+1} (T g_{\nu-s})^{I}, \tag{4}$$

$$w_\nu^{II} = -\sum_{s=0}^{\infty} B_\nu^{-1} B_{\nu+1}^{-1} \dots B_{\nu+s}^{-1} (Tg_{\nu+s})^{II} .$$

Здесь w_ν^{I}, w_ν^{II} – соответственно верхние K и нижние $K-1$ компоненты вектора w_ν. При $\{|z|\geq 1\} \cap \{|z-1|>\delta\}$ эти ряды экспоненциально сходятся. Используя (4) в качестве начального приближения, методом простых итераций можно получить решение резольвентной системы (2). В самом деле, рассмотрим итерационный процесс

$$w_\nu^{(K+1)} = \begin{pmatrix} A_\nu & 0 \\ 0 & B_\nu \end{pmatrix} w_{\nu-1}^{(K+1)} + T_\nu g_\nu + h C_\nu w_{\nu-1}^{(K)} ,$$

$$w_\nu^{(0)} = 0 , \quad w_\nu^{(1)} \text{ – решение (3)}, \quad \Delta_\nu^{(1)} = w_\nu^{(1)} .$$

Последующие приращения $\Delta_\nu^{(K)} = w_\nu^{(K)} - w_\nu^{(K-1)}$ удовлетворяют системе

$$\Delta_\nu^{(K)} = \begin{pmatrix} A_\nu & 0 \\ 0 & B_\nu \end{pmatrix} \Delta_{\nu-1}^{(K)} + h C_\nu \Delta_{\nu-1}^{(K-1)} .$$

Это система (3), в которой правая часть $T_\nu g_\nu$ заменена на $h C_\nu \Delta_\nu^{(K-1)}$. Отсюда и из (4) следует оценка

$$|\Delta_\nu^{(K)}| \leq b h \max_{\ell} |\Delta_\ell^{(K-1)}| . \tag{5}$$

Ряды, представляющие решение (2),

$$w_\nu(h) = w_\nu^{(1)} + \Delta_\nu^{(2)} + \Delta_\nu^{(3)} + \dots , \tag{6}$$

экспоненциально сходятся при $bh < 1$. Итак, резольвента не имеет особенностей при $|z|\geq 1, z\neq 1$. В качестве Γ может быть взята окружность $|z|=1$. Часть единичной окружности, расположенная вне $|z-1|<\delta$, может быть перетянута в дугу окружности радиуса, меньшего единицы. Интегралы по этой дуге экспоненциально малы при больших n. Остается рассмотреть интегралы

$$\int_{-\delta}^{\delta} (G - e^{i\psi} \cdot I)^{-1} \exp i(n+1)\psi \, d\psi .$$

Блок A_ν содержит выделенное собственное значение $\varkappa_\nu, \varkappa_\nu(1)=1$. Соответственно в (4) выделяются ряды

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varkappa_\nu \varkappa_{\nu-1} \dots \varkappa_{\nu-s+1} (Tq_{\nu-s})_{(\kappa)} .$$

Множителям под знаком суммы отвечают интегралы

$$\Gamma^{n}_{\nu,s} = \int_{-\delta}^{\delta} exp\left\{s\left(-\frac{i\psi}{\bar{\gamma}_s} - \bar{\omega}_s \psi^{2\kappa} + O(\psi^{2\kappa+1})\right) + i(n+1)\psi\right\} d\psi ,$$

$$\frac{1}{\bar{\gamma}_s} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{\gamma_\nu} + \frac{1}{\gamma_{\nu-1}} + \dots + \frac{1}{\gamma_{\nu-s+1}}\right) = \frac{1}{\gamma(\nu h - \theta(s-1)h)} , \qquad \theta < 1 ,$$

$$\bar{\omega}_s = \frac{1}{s}\left(\frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu^{2\kappa+1}} + \frac{\beta_{\nu-1}}{\gamma_{\nu-1}^{2\kappa+1}} + \dots + \frac{\beta_{\nu-s+1}}{\gamma_{\nu-s+1}^{2\kappa+1}}\right) = \frac{\bar{\beta}_s}{\bar{\gamma}_s^{2\kappa+1}} .$$

После замены

$$\varkappa_s = exp\left\{-\frac{i\psi}{\bar{\gamma}_s} - \bar{\omega}_s \psi^{2\kappa} + O(\psi^{2\kappa+1})\right\} = exp(i\varphi)$$

получаем

$$\Gamma^{n}_{\nu,s} = \int_{-\delta'}^{\delta'} exp\left\{is\varphi - in\bar{\gamma}_s\varphi - n\bar{\beta}_s\varphi^{2\kappa} + O(\varphi^{2\kappa+1})\right\} d\varphi .$$

Известно/7/, что такие интегралы допускают оценку

$$|\Gamma^{n}_{\nu,s}| \le Cn^{-\frac{1}{2\kappa}} , \quad |s - \bar{\gamma}_s n| < b n^{\frac{1}{2\kappa}} ;$$

$$|\Gamma^{n}_{\nu,s}| \le cn^{-\frac{1}{2\kappa}} \left(j / n^{\frac{1}{2\kappa}}\right)^{-\frac{\kappa-1}{2\kappa-1}} \cdot exp - d\left(\frac{j^{2\kappa}}{n}\right)^{\frac{1}{2\kappa-1}}$$

при $|s - \bar{\gamma}_s n| \geqslant b n^{\frac{1}{2\kappa}}$, $j_s = s - \bar{\gamma}_s n$.

Если $\bar{\gamma}_s$ фиксировано, что отвечает постоянному ρ , то

$$\sum_s |\Gamma^{n}_{s}| \le B \qquad \text{равномерно по } n .$$

Однако в рассматриваемом случае γ_s меняется с изменением s. Положим $\gamma_0 = \min_s |\bar\gamma_s|$, $\gamma_0 = \gamma(\nu h - \theta' s_0 h)$, тогда

$$j_s = s - \bar\gamma_s n = s_0 + (s - s_0) - \gamma_0 n + n(\gamma(\nu h - \theta' s_0 h) - \gamma(\nu h - \theta'' s h)) =$$
$$= s_0 + (s - s_0) - \gamma_0 n + \gamma'_x(\tilde\nu h)[\theta''(s - s_0) + (\theta'' - \theta') s_0] nh.$$

По предположению $\gamma'_x(x)$ ограничена. Положим

$$n_0 h \max_x |\gamma'_x(x)| = \frac{1}{2}, \quad n_0 \tau = t_0 > \Delta > 0.$$

При $n \le n_0$ j_s монотонно возрастает с ростом s не медленнее, чем $\frac{1}{2}(s - s_0)$. Отсюда следует

$$\sum_s |\Gamma^n_{\nu,s}| \le 2 \sum_s |\Gamma^n_s| \le 2B, \qquad n \le n_0,$$

$$\sum_s |\Gamma^n_{\nu,s}| \le (2B)^{1/\Delta} = C, \qquad n\tau \le 1.$$

Из последней оценки и (4)-(6) получаем

$$\max_\nu |U^n_\nu| \le C \max_s |T_s q_s| \cdot \left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} (bh)^\ell\right) \le$$
$$\le C' \max_\nu |f_\nu| = C' \max_\nu |U^0_\nu|.$$

Устойчивость в C доказана. При $\kappa = b \ln h^{-1} \max(|Sp A'_\nu|, |Sp B^{-1}_\nu|)$, вообще говоря, может стремиться к единице. В этом случае требуется дополнительное исследование спектра резольвентной матрицы.

Во второй части работы для $\kappa = b \ln h^{-1}$ установлена равномерная по n оценка $|\Gamma^n_\nu| \times \ln \ln h^{-1}$. Рассматривается случай постоянных коэффициентов. Предполагается, что $\frac{1}{4} \le \gamma \le \frac{3}{4}$. В работе /1/ установлена оценка

$$\sum_{|j|>J_0} |\Gamma^n_j| < B\{\kappa \exp(-An\tau^{1/2}/4\kappa) + J_0^{-1}\},$$
$$0 < \gamma < 1, \quad J_0 = \max(1, An\kappa\tau^{1/2}),$$
$$A = \frac{\sin \gamma\pi}{\pi} \sqrt{\kappa\pi}\,(1 + O(\kappa^{-1})).$$

Для $n < \tau^{-\frac{1}{2}}\sqrt{K}$ эта оценка является основной. Покажем, что при $\frac{1}{4} < \gamma < \frac{3}{4}$ множитель K перед знаком экспоненты можно заменить на $\ln K$. Тем самым для всех $n\tau \leq 1$ будет установлена оценка $\| G^n \|_C \leq b \ln \ln h^{-1}$. В заключение будет показано, что эта оценка не улучшаема.

Множитель K перед знаком экспоненты дает первый член правой части (4) /2/

$$\int_{-3/2}^{3/2} f^n(\varphi) e^{ij\varphi} d\varphi = \mathcal{F}^n(\varphi) e^{ij\varphi} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{\xi'}{\xi^3} \right) \Bigg|_{-3/2}^{3/2} -$$

$$- \int_{-3/2}^{3/2} \left(\frac{\xi''}{\xi^3} - \frac{3(\xi')^2}{\xi^4} \right) \mathcal{F}^n(\varphi) e^{ij\varphi} d\varphi . \tag{7}$$

Постараемся его уничтожить, складывая с аналогичным членом в интеграле по $3/2 \leq |\varphi| \leq \pi$. По определению ,

$$Re\, \Psi(\gamma, \varphi_0) = A(\gamma) \int_0^{\varphi_0} \sin^{2K-1} \frac{u}{2} \cos(\gamma - \tfrac{1}{2}) u \, du = \frac{\sin \gamma \pi}{\sqrt{K}} .$$

При $\frac{1}{4} < \gamma < \frac{3}{4}$ $\varphi_0 > 2$ и

$$| f^n (e^{i\varphi_0}) | \leq \exp \left(- \frac{n \sin \gamma \pi}{2\sqrt{K}} \right).$$

На отрезке $[3/2, \varphi_0]$

$$\xi = ij - n A \sin^{2K-1} \frac{\varphi}{2} (\exp i(\gamma - \tfrac{1}{2})\varphi)(1 + \frac{R}{\sqrt{K}}) , \quad |R| < 2 .$$

Так как $|\gamma - \frac{1}{2}| < \frac{1}{4}$,

$$| \cos(\gamma - \tfrac{1}{2})\varphi | > | \sin(\gamma - \tfrac{1}{2})\varphi | .$$

Отсюда следует, что если

$$| n A \sin^{2K-1} \frac{\varphi}{2} \sin(\gamma - \tfrac{1}{2})\varphi | > |j| / 2 , \quad \text{то и}$$

$$| n A \sin^{2K-1} \frac{\varphi}{2} \cos(\gamma - \tfrac{1}{2})\varphi | > |j| / 2 .$$

Следовательно, в любом случае $|\xi| > |j|/2$. Отдельно рассматриваем $|j| \le K^2$ и $|j| > K^2$.

$$\mathcal{J} = \int_{3/2}^{\varphi_0} f^n(\varphi)\, e^{ij\varphi}\, d\varphi = f^n(\varphi)\,(ij)^{-1}\, e^{ij\varphi}\Big|_{3/2}^{\varphi_0} +$$

$$+ \int_{3/2}^{\varphi_0} nA \sin^{2K-1}\frac{\varphi}{2}\,(ij)^{-1} (\exp i(\gamma-\tfrac{1}{2})\varphi)\, \mathcal{F}^n(\varphi)\, e^{ij\varphi}\, d\varphi . \qquad (8)$$

Так как $\cos(\varphi_0/2)$ близок к нулю, нам потребуются некоторые специальные оценки. Справедливы соотношения:

$$Re\, \mathcal{F} = 1 - A \int_0^{\varphi} \sin^{2K-1}\frac{u}{2} \cos(\gamma-\tfrac{1}{2})\, u\, du = 1 - Re ,$$

$$|\mathcal{J}m\, \mathcal{F}| = A \int_0^{\varphi} \sin^{2K-1}\frac{u}{2} \sin|\gamma-\tfrac{1}{2}|\, u\, du = Im ,$$

$$Im = A \int_0^{\varphi} \sin^{2K-1}\frac{u}{2} \cos(\gamma-\tfrac{1}{2})\, u\, \mathrm{tg}\,|\gamma-\tfrac{1}{2}|\, u\, du \le Re .$$

Напомним, что $\varphi \le \pi$, $|\gamma-\frac{1}{2}| < \frac{1}{4}$.

$$|\mathcal{F}|^2 = (1-Re)^2 + (Im)^2 = 1 + \Psi ,$$

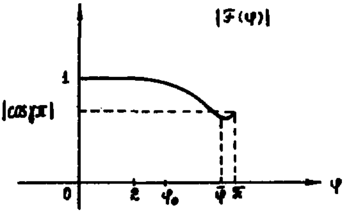
$$(|\mathcal{F}|^2)' = \Psi' = -2\, Re'(1-Re) + 2\, Im' \cdot Im = -2\, Re'(1 - Re -$$

$$- (\mathrm{tg}\,|\gamma-\tfrac{1}{2}|\varphi) \cdot Im) , \quad Re' = A \sin^{2K-1}\frac{\varphi}{2} \cos(\gamma-\tfrac{1}{2})\varphi \ge 0 .$$

Функции Re и Im монотонно возрастают с ростом φ. При малых φ $\Psi'(\varphi) < 0$. Если же при каком-то $\bar{\varphi}$ $\Psi'(\bar{\varphi}) = 0$, то далее $\Psi' > 0$ и, следовательно, Ψ монотонно возрастает. Мы знаем, что $\mathcal{F}(\pi) = \cos\gamma\pi\,(1 + O(K^{-\frac{1}{2}}))$, так что

$$\min|\mathcal{F}(\varphi)|\le|\cos\gamma\pi|\cdot(1+O(\kappa^{-\frac{1}{2}}))$$

и график $|\mathcal{F}(\varphi)|$ имеет вид



Если $Re\le 1/4$, то

$$|1-Re-Im\cdot tg|\gamma-\tfrac{1}{2}||\varphi|>\tfrac{1}{2}$$, соответственно

$$2Re'=2A\sin^{2\kappa-1}\tfrac{\varphi}{2}\cos(\gamma-\tfrac{1}{2})\varphi\le 2|\mathcal{F}^2|'=4|\mathcal{F}|\cdot|\mathcal{F}|'.$$

Справедлива оценка: если $Re\le 1/4$, то

$$A\sin^{2\kappa-1}\tfrac{\varphi}{2}\le 4|\mathcal{F}||\mathcal{F}|'. \tag{9}$$

Если же при некотором $\hat{\varphi}$ $Re\,\hat{\varphi}=\frac{1}{4}$, то для всех $\varphi>\hat{\varphi}$

$$|\mathcal{F}^n(\varphi)|<e^{-cn}.$$

Для дальнейшего потребуется

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2\kappa-1}u\,du=\frac{1}{\sqrt{2\kappa}}(1+O(\kappa^{-\frac{1}{2}})).$$

К (8) применяем (9), в результате получаем, что

$$|J_j|<C|j|^{-1}\cdot\exp(-nA\tau^{1/2}/2\kappa),$$

$$\sum_{|j|<\kappa^2}|J_j|\le b\ln\kappa\cdot\exp(-nA\tau^{1/2}/2\kappa).$$

Далее оцениваем $\mathfrak{I}_j$, $|j| > K^2$.

$$\int_{3/2}^{\varphi_0} f^n(\varphi) e^{ij\varphi} d\varphi = \frac{f^n(\varphi)}{\xi} e^{ij\varphi} \Big|_{3/2}^{\varphi_0} + \frac{\xi'}{\xi^2 ij} e^{ij\varphi} \mathcal{F}^n(\varphi) \Big|_{3/2}^{\varphi_0} -$$

$$- \int_{3/2}^{\varphi_0} (ij)^{-1} \left\{ \frac{\xi''}{\xi^2} - \frac{2(\xi')^2}{\xi^3} + \frac{\xi' n A \sin^{2K-1}\frac{\varphi}{2}}{\xi^2} \exp i\left(\gamma - \tfrac{1}{2}\right)\varphi \right\} f^n(\varphi)\, d\varphi .$$

Нижняя подстановка в первом слагаемом уничтожается с первым членом в (7). Результат верхней подстановки легко оценивается сверху:

$$\sum_{|j|>K^2} (|j|^{-1}) \exp(-n \sin\gamma\pi/2\sqrt{K}) \le \frac{nK}{K^2} \exp(-n\sin\gamma\pi/2\sqrt{K}) < \frac{c}{\sqrt{K}} .$$

При оценке оставшихся слагаемых используются соотношения:

$$|\xi'| < cnAK \sin^{2K-1}\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2} ,$$

$$|\xi''| < cnAK^2 \sin^{2K-2}\frac{\varphi}{2} \cos^2\frac{\varphi}{2} ,$$

$$|\mathcal{F}^n| \le \exp(-nA\sin^{2K}\frac{\varphi}{2}/2K) .$$

Второе слагаемое допускает оценку

$$\left|\frac{\xi'}{\xi^2 j} \mathcal{F}^n(\varphi)\right| \le \frac{c}{|j|^2} \exp(-nA\tau^{1/2}/2K) ,$$

$$\sum_{|j|>K^2} |\mathfrak{I}_j| \le c \exp(-nA\tau^{1/2}/2K) .$$

С помощью (9) оцениваем последнее слагаемое

$$\left|\frac{\xi''}{j\xi^2} f^n(\varphi)\right| \le \frac{cK^2}{|j|^3} |f^n|' ,$$

$$\left|\frac{\xi'^2}{j\,\xi^3} f^n(\varphi)\right| \le \frac{cK^3}{|j|^4}\,|f^n|',$$

$$\left|\frac{\xi' nA\sin^{2K-1}\frac{\varphi}{2}}{j\,\xi^2} f^n(\varphi)\right| \le \frac{cK^2}{|j|^3}\,|f^n|',$$

$$\sum_{|j|>K^2} |\mathfrak{I}_\nu| \le \frac{c}{K^2}\exp(-nA\tau^{4k}/2K).$$

Остается оценить интегралы по $|\varphi| \geqslant \varphi_0$. Напомним, что при $|\varphi| \geqslant \varphi_0$

$$|f^n(\varphi)| \le \exp\,(-n\sin\gamma\pi/2\sqrt{K}), \qquad (10)$$

а при $|\varphi| \geqslant \hat{\varphi}$, $Re(\hat{\varphi}) = \frac{1}{4}$,

$$|f^n(\varphi)| \le \exp\,(-cn).$$

Для $n>K$ достаточно оценки (10):

$$\sum_{|\nu|\le nK} |\mathfrak{I}_\nu| \le cnK\exp - \frac{n\sin\gamma\pi}{2\sqrt{K}} \le bn^2\exp - c\sqrt{n} \le B.$$

Если $n \le K$, поступаем следующим образом:

$$\int_{\varphi_0}^{\pi} f^n(\varphi)e^{ij\varphi}d\varphi = \mathcal{F}^n(\varphi)(ij)^{-1}e^{ij\varphi}\Big|_{\varphi_0}^{\pi} +$$

$$+\int_{\varphi_0}^{\pi} (j^{-1}nA\sin^{2K-1}\frac{\varphi}{2}\exp i(\gamma-\tfrac{1}{2})\varphi)\,\mathcal{F}^{n-1}(\varphi)\,e^{ij\varphi}\,d\varphi.$$

Оцениваем второе слагаемое, интеграл: при $\varphi_0 \le \varphi \le \hat{\varphi}$

$$|nA\sin^{2K-1}\frac{\varphi}{2}\,\mathcal{F}^{n-1}(\varphi)| \le |\mathcal{F}^n(\varphi)|';$$

при $\hat{\varphi} \le \varphi \le \pi$ $\qquad |\mathcal{F}^n(\varphi)| \le \exp(-cn)$,

$$(|j|^{-1})\,nA\exp(-cn)\int_0^{\pi}\sin^{2K-1}\frac{\varphi}{2}\,d\varphi \le |j|^{-1}\cdot n\exp(-cn).$$

Напомним, что $A = \sin\gamma\pi\sqrt{\frac{K}{\pi}}(1+O(K^{-1}))$. Тем самым доказана оценка ($n \le K$).

$$\sum_{|l|\le K} |J_l| \le c(\ln K)\cdot \exp(-n(\sin\gamma\pi)/2\sqrt{K}).$$

Итак, доказано, что при всех $n\tau \le 1$, $\frac{1}{4} < \gamma < \frac{3}{4}$, $\|G^n\| \le c \ln\ln h^{-1}$.

Покажем, что эта оценка не улучшаема. Для этого оценим сумму модулей коэффициентов разностной схемы (I):

$$A\sum_{l=-K}^{K-1} \frac{C_{2K-1}^{K+l}\, 2^{-(2K-1)}}{|l+\gamma|} = A\left(\sum_{\tau=0}^{K-1}\frac{C_{2K-1}^{\tau}\, 2^{-(2K-1)}}{K-\tau-\gamma} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\tau=0}^{K-1}\frac{C_{2K-1}^{\tau}\, 2^{-(2K-1)}}{K-\tau-(1-\gamma)}\right).$$

Используя асимптотику /I2/

$$2^{-(2K-1)}C_{2K-1}^{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\pi(K-\frac{1}{2})}}\, e^{-\frac{(\tau-K+\frac{1}{2})^2}{K-\frac{1}{2}}}\left(1+O\left(\frac{(K-\tau)^3}{K^2}\right)\right),$$

получаем

$$\sum_{\tau=0}^{K-1}\frac{2^{-(2K-1)}C_{2K-1}^{\tau}}{(K-\tau-\gamma)} = 2^{-(2K-1)}\left(\frac{C_{2K-1}^{K-1}}{1-\gamma} + \sum_{l=2}^{K}\frac{C_{2K-1}^{K-l}}{l-\gamma}\right) >$$

$$> \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(1-\gamma)\sqrt{\pi K}} + \frac{1}{\sqrt{\pi K}}\sum_{\tau=1}^{\sqrt{K}}\frac{1}{\tau}\right\}.$$

Известно /I3/, что

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \ln m\right) = 0,57721\ldots .$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{l=-K}^{K-1} |a_l| > \frac{\sin\gamma\pi}{4\pi}\ln K .$$

Литература

I. Сердюкова С.И. ДАН СССР, 1980, т.255, № 6, с. 1325.

2. Сердюкова С.И. ОИЯИ, Р5-80-474, Дубна, 1980.

3. V.Thomee. Numerical solution of partial differential equations. (Ed. by J.H.Bramble) Academic Press, New York, 1966, p.125.

4. G.H.Hedstrom. J. SIAM Numer. Anal., 1968, 5,No.2, p.363.

5. Сердюкова С.И. ЖВМ и МФ, 1971, т. II, № 2, с. 411.

6. V.Thomee. J. Differential Equations, 1965, I, p.273.

7. Сердюкова С.И. ЖВМ и МФ, 1967, т. 7, № 3, 497.

8. P.D.Lax. Comm. Pure Appl. Math., 1961, 14, p.497.

9. P.D.Lax and L.Nirenberg. Comm. Pure Appl. Math., 1966, 19, p.473.

10. P.D.Lax and B.Wendroff. Comm. Pure Appl. Math., 1964, 17, p.381.

11. T.Kato. Perturbation theory for linear operators., 1966, p.99. Springer - Verlag, Berlin. Heidelberg. New Jork.

12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей. М., "Мир", 1964, с.186.

13. Харди Г. Расходящиеся ряды. ИЛ, М., 1951, с. 409.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 декабря 1981 года.