1085/82

9/III-82

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-81-793

В.П.Акопян, Е.П.Жидков,
Нгуен Монг, А.В.Федоров

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

1981

В работе [1] разложение приближенного решения по малому параметру применяется для повышения точности решений многих задач математической физики. В [1,2] показаны возможности повышения точности регуляризованных решений систем линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей. Обычно для достижения высокой точности регуляризованного решения параметр регуляризации приходится брать достаточно малым. Уменьшение же параметра регуляризации ухудшает сходимость численного процесса нахождения регуляризованного решения. Поэтому целесообразно находить регуляризованные решения для не слишком маленьких значений параметра регуляризации, а затем уточнить его методом экстраполяции.

В [2] получено асимптотическое разложение регуляризованного решения системы линейных алгебраических уравнений по степеням малого параметра регуляризации. В настоящей работе аналогичное разложение будет получено для линейных операторных уравнений в гильбертовых пространствах.

Будем рассматривать уравнение

$$Az = u, \qquad /1/$$

где A - линейный непрерывный оператор, действующий из гильбертова пространства H в гильбертово пространство G. Пусть задача /1/ имеет единственное решение $z^T \in H$, обратный оператор A^{-1} существует, но не является непрерывным.

Метод регуляризации сводит задачу нахождения приближенного решения уравнения /1/ к вариационной задаче минимизации сглаживающего функционала [3]:

$$M^{\alpha}[z, u] = \rho^2(Az, u) + \alpha\Omega[z].$$

Согласно [3,4] в гильбертовых пространствах в качестве сглаживающего функционала можно брать функционал

$$M^{\alpha}[z^{\alpha}, u] = \|Az^{\alpha} - u\|^2 + \alpha\|Lz^{\alpha}\|^2, \qquad /2/$$

где L - линейный оператор, действующий из пространства H в H, такой, что существует константа $K>0$ и выполнено условие, что для любого $z \in H$

$$\|Lz\| \geq K\|z\|. \qquad /3/$$

В сделанных предположениях задача минимизации функционала /2/ имеет единственное решение z^{α} [4], и справедлива следующая

Теорема 1. Для элемента $z^{\alpha} \in H$, минимизирующего функционал /2/, справедливо разложение

$$z^{\alpha} = z^T + \sum_{k=1}^{m} \alpha^k c_k + \omega(\alpha, A, L), \qquad /4/$$

где $c_k \in H$ и не зависит от α:

$$\|\omega(\alpha)\| \le C\alpha^m. \qquad /5/$$

<u>Доказательство</u>. Элемент z^α, минимизирующий функционал /2/, удовлетворяет уравнению Эйлера, которое имеет вид

$$A^*Az^\alpha + \alpha L z^\alpha = A^*u.$$

Рассмотрим произвольный набор не зависящих от α элементов $c_j \in H$, $j = 1,\dots,m$, и определим функцию $\omega(\alpha)$ по формуле

$$\omega(\alpha) = z^\alpha - z^T - \sum_{k=1}^{m} \alpha^k c_k, \qquad /6/$$

$$\omega(\alpha) \in H.$$

Для завершения доказательства выберем $c_k \in H$, $k = 1,\dots,m$, таким образом, чтобы удовлетворялось неравенство /5/. Из выражения /6/ выделим z^α и, подставив его в уравнение Эйлера, получим

$$(A^*A + \alpha L)\Big(z^T + \sum_{k=1}^{m} \alpha^k c_k + \omega\Big) = A^*u. \qquad /7/$$

Выберем теперь элементы c_k, $k = 1,\dots,m$, как решения уравнений

$$A^*Ac_1 + Lz^T = 0,$$

$$A^*Ac_2 + Lc_1 = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$A^*Ac_m + Lc_{m-1} = 0.$$

Они, очевидно, существуют в силу требований, наложенных на оператор L, и требования единственности решения задачи /1/.

Для этого конкретного набора элементов c_k, $k = 1,\dots,m$, тождество /7/ имеет вид

$$(A^*A + \alpha L)\,\omega + \alpha^{m+1} Lc_m = 0.$$

Отсюда получаем

$$\|\omega\| \le \alpha^{m+1}\|L\|\,\|c_m\|\,\|(A^*A + \alpha L)^{-1}\|. \qquad /8/$$

Для оценки нормы обратного оператора используем неравенство Коши-Буняковского:

$$\|(A^*A + \alpha L)v\|^2\|v\|^2 \ge |((A^*A + \alpha L)v, v)|^2 = ((A^*A + \alpha L)v, v)^2 =$$

$$= ((A^*Av, v) + \alpha(Lv, v))^2 \ge \alpha^2K^2\|v\|^4,$$

$$\|(A^*A + \alpha L)v\| \ge \alpha K\|v\|.$$

Следовательно,

$$\|(A^*A + \alpha L)^{-1}\| \le \frac{1}{\alpha K}, \qquad /9/$$

и неравенство /8/ окончательно принимает вид

$$\|\omega\| \le \alpha^m \frac{\|L\|\,\|c_m\|}{K} \le C\alpha^m,$$

то есть неравенство /5/ установлено. Теорема доказана.

<u>Замечание</u>. Из разложения /4/ вытекает

$$\|z^\alpha - z^T\| \le C\alpha.$$

Пусть теперь оператор A и правая часть u заданы неточно, то есть рассматривается задача

$$A_h v = u_\delta,$$

где оператор A_h и правая часть u_δ удовлетворяют условиям

$$\|A - A_h\| \le h, \quad \|u_\delta - u\| \le \delta,$$

h, δ – малые параметры; $0 \le h \le h_0$; $0 \le \delta \le \delta_0$. Сглаживающий функционал $M^\alpha[z,u,h,\delta]$ имеет вид

$$M^\alpha[z,u,h,\delta] = \|A_hv^\alpha - u_\delta\|^2 + \alpha\|Lv^\alpha\|^2.$$

Известно /3,4/, что существует единственный элемент v^α, минимизирующий функционал $M^\alpha[z,u,h,\delta]$, и

$$\lim_{\alpha,h,\delta \to 0} v^\alpha = z^T.$$

<u>Лемма</u>. Для любого $\alpha > 0$, определенного из условий регуляризации /3,4/, и для любых h и δ

$$0 \le h \le h_0, \quad 0 \le \delta \le \delta_0,$$

где h_0 и δ_0 – фиксированные числа, справедлива оценка

$$\|v^\alpha - z^\alpha\| \le \frac{C_1h + C_2\delta}{K\alpha + \beta}, \qquad /10/$$

здесь β – неотрицательная константа.

<u>Доказательство</u>. Элементы z^α и v^α соответственно удовлетворяют уравнениям

$$A^*Az^\alpha + \alpha Lz^\alpha = A^*u,$$

$$A_h^*A_hv_h^\alpha + \alpha Lv^\alpha = A_h^*u_\delta. \qquad /11/$$

Обозначая $r^\alpha = v^\alpha - z^\alpha$, из уравнений /11/ получим

$$(A_h^*A_h + \alpha L)r^\alpha = (A_h^*u_\delta - A^*u) + (A^*A - A_h^*A_h)z^\alpha.$$

Отсюда, учитывая оценку /9/ нормы обратного оператора, легко получить оценку /10/. Лемма доказана.

Используя разложение /4/, для последовательности параметров регуляризации:

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_m > 0,$$

можно построить уточненное решение z по формуле

$$z = \sum_{i=1}^{m} \nu_i v^{a_i}, \qquad /12/$$

где ν_i, $i = 1,\dots,m$, определяются из соотношений

$$\nu_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{m} \frac{-a_k}{a_i - a_k}, \quad i = 1,\dots,m. \qquad /13/$$

Теорема 2. Оценка отклонения точного решения задачи /1/ от экстраполированного решения /12/ определяется следующим выражением:

$$\|z - z^T\| \leq \sum_{i=1}^{m} |\nu_i| \Delta(h,\delta,a_i) + C \sum_{i=1}^{m} |\nu_i| a_i^m, \qquad /14/$$

где

$$\Delta(h,\delta,a) = \frac{C_1 h + C_2 \delta}{Ka + \beta},$$

C - константа, не зависящая от a_i, $i = 1,\dots,m$.

Доказательство. Так как $\nu_1,\dots,\nu_m$ определены соотношением /13/, то имеет место неравенство

$$\|\sum_{i=1}^{m} \nu_i z^{a_i} - z^T\| \leq C \sum_{i=1}^{m} |\nu_i| a_i^m.$$

Используя неравенство треугольника и утверждение леммы, получаем оценку /14/:

$$\|z - z^T\| \leq \|\sum_{i=1}^{m} \nu_i v^{a_i} - \sum_{i=1}^{m} \nu_i z^{a_i}\| + \|\sum_{i=1}^{m} \nu_i z^{a_i} - z^T\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} |\nu_i| \Delta(h,\delta,a_i) + C \sum_{i=1}^{m} |\nu_i| a_i^m.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. "Наука", М., 1979.
2. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, Р5-81-595, Дубна, 1981.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. "Наука", М., 1979.
4. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. "Наука", М., 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 декабря 1981 года.