сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-81-792

В.П.Акопян, Е.П.Жидков,
Нгуен Монг, А.В.Федоров

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ КВАЗИРЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

1981

1. ПРИБЛИЖЕННОЕ КВАЗИРЕШЕНИЕ

В качестве некорректно поставленной задачи [1,2] будем рассматривать задачу решения уравнения первого рода:

$$A x = f, \qquad /1.1/$$

где A - вполне непрерывный оператор, действующий из гильбертова пространства X в гильбертово пространство F.

В этом случае квазирешение уравнения /1.1/ можно представить в виде ряда по собственным элементам оператора A^*A [1,2], где A^* - оператор, сопряженный оператору A.

Пусть

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n \le \dots$$

- полная система собственных значений самосопряженного положительного,вполне непрерывного оператора A^*A, действующего из X в X,а

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$$

- соответствующая полная ортонормированная система его собственных элементов. Тогда квазирешение $\bar{x}$ уравнения /1.1/ на множестве S_R:

$$S_R = \{ x \in X, \quad ||x|| \le R \},$$

выражается формулами [1,2]:

$$\bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n} \phi_n, \qquad /1.2/$$

если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{\lambda_n^2} < R^2, \qquad /1.3/$$

и

$$\bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\beta + \lambda_n} \phi_n, \qquad /1.4/$$

если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{\lambda_n^2} \ge R^2. \qquad /1.5/$$

Здесь β - корень уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{(\lambda_n+\beta)^2} = R^2 , \qquad /1.6/$$

а b_n - коэффициенты разложения элемента A^*f по собственным элементам оператора A^*A:

$$A^*f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n . \qquad /1.7/$$

Заметим, что квазирешение $\bar{x}$ уравнения /1.1/ на множестве S_R является решением уравнения

$$A^*Ax = A^*f , \qquad /1.8/$$

если выполняется условие /1.3/, и решением уравнения

$$A^*Ax + \beta x = A^*f , \qquad /1.9/$$

если выполняется условие /1.5/.

Поставим целью приблизить к квазирешению $\bar{x}$ уравнения /1.1/ решения уравнения

$$A^*Ax_\alpha + \alpha x_\alpha = A^*f, \qquad /1.10/$$

где $\alpha > 0$ - некоторый положительный параметр, если выполняется неравенство /1.3/, или уравнения

$$A^*Ax_\alpha + (\beta+\alpha)x_\alpha = A^*f, \qquad /1.11/$$

если выполняется условие /1.5/.

Имеет место следующая

Теорема 1. Для регуляризованного решения уравнения /1.10/ или уравнения /1.11/ справедливо асимптотическое разложение:

$$x_\alpha = \bar{x} + \sum_{k=1}^{m} c_k \alpha^k + \omega_m , \qquad /1.12/$$

где c_k - элементы пространства X, не зависящие от параметра α, а элемент $\omega_m \in X$ удовлетворяет условию

$$\|\omega_m\| \le C\alpha^{m+1} , \quad C = \text{const} . \qquad /1.13/$$

Доказательство. Пусть выполнено условие /1.3/. Тогда в качестве приближенных квазирешений уравнения /1.1/ можно взять решения /1.10/, которые будем искать в виде ряда

$$x_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n . \qquad /1.14/$$

Используя разложение /1.7/, нетрудно показать, что коэффициенты ряда /1.14/ могут быть вычислены по формуле

$$a_n = \frac{b_n}{\lambda_n+\alpha}, \quad n=1,2,\dots, \qquad /1.15/$$

Рассмотрим функцию

$$\gamma(\alpha) = \frac{1}{\lambda+\alpha}, \quad \alpha \ge 0.$$

Она бесконечно дифференцируема в окрестности $\alpha=0$, если $\lambda>0$. и разлагается в ряд Тейлора:

$$\gamma(\alpha) = \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k \alpha^k}{\lambda^{k+1}} + \rho_m(\alpha), \qquad /1.16/$$

где остаток $\rho_m(\alpha)$ имеет вид

$$\rho_m(\alpha) = 0(\alpha^m).$$

Таким образом, коэффициенты a_n ряда /1.14/ можно представить в виде

$$a_n = b_n\left[\frac{1}{\lambda_n} + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k \alpha^k}{\lambda_n^{k+1}} + \rho_m(\alpha)\right],$$

и, следовательно, для решения x_α уравнения /1.10/ справедливо представление

$$x_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n}\phi_n + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \alpha^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n^{k+1}}\phi_n + \omega_m(\alpha) = \bar{x} + \sum_{k=1}^{m} C_k \alpha^k + \omega_m(\alpha),$$

где

$$\bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n}\phi_n$$

- квазирешение уравнения /1.1/,

$$c_k = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n^{k+1}}\phi_n , \quad k=1,2,\dots,m,$$

$$\omega_m(\alpha) = 0(\alpha^m).$$

Разложение /1.12/ и неравенство /1.13/ доказаны в случае, когда выполнено условие /1.3/.

Аналогично можно доказать справедливость разложения /1.12/ и неравенства /1.13/ в случае, когда выполнено условие /1.5/. Теорема доказана.

Из разложения /1.12/ нетрудно видеть, что регуляризованное решение x_α отличается от квазирешения $\bar{x}$ на величину порядка α:

$$\|\bar{x} - x_\alpha\| \le C\alpha , \quad C = \text{const} .$$

Пусть заданы числа

$$\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \dots \ge \alpha_m > 0$$

и для каждого параметра α_i решена задача нахождения x_{α_i}. Тогда с помощью разложения /1.12/ можно построить решение $\bar{x}$, отличающееся от квазирешения уже на величину порядка α^m.

Имеет место следующая

Теорема 2. Пусть числа $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ таковы, что

$$\sum_{i=1}^{m} \nu_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \nu_i \alpha_i^k = 0, \quad k = 1, \dots, m-1. \qquad /1.17/$$

Тогда для экстраполированного решения

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{\alpha_i} \qquad /1.18/$$

справедлива оценка

$$\|\bar{x} - x\| \le C \sum_{i=1}^{m} |\nu_i| \alpha_i^m, \quad C = \text{const}.$$

Доказательство этой теоремы очевидно.

2. УСТОЙЧИВОСТЬ

Известно, что квазирешение уравнения /1.1/ устойчиво по исходным данным A и f. Пусть оператор A и правая часть f задаются неточно, то есть вместо уравнения /1.1/ рассматривается уравнение

$$A_h v = f_\delta . \qquad /2.1/$$

Здесь A_h - вполне непрерывный линейный оператор, действующий из пространства X в пространство F, а f_δ - элемент пространства F. Пусть

$$\|A_h - A\| \le h, \quad \|f_\delta - f\| \le \delta, \quad 0 \le h \le h_0, \quad 0 \le \delta \le \delta_0 .$$

Известно, что /2.1/, как и исходное уравнение /1.1/, имеет единственное квазирешение, которое может быть принято за приближенное квазирешение уравнения /1.1/. Для нахождения приближенного квазирешения уравнения /2.1/ рассматривается задача решения уравнения

$$A_h^* A_h v_\alpha + \alpha v_\alpha = A_h^* f_\delta , \qquad /2.2/$$

если выполняется условие /1.3/, или уравнения

$$A_h^* A_h v_\alpha + (\alpha + \beta) v_\alpha = A_h^* f_\delta , \qquad /2.3/$$

если имеет место условие /1.5/. Здесь A_h^* - оператор, сопряженный оператору A_h, α - положительный параметр.

В самом деле, в качестве приближенного решения уравнения /1.1/ берется не квазирешение аппроксимирующего уравнения /2.1/, а решение уравнения /2.2/ или /2.3/ при достаточно малом значении параметра α. Следовательно, точность приближенного квазирешения уравнения /1.1/ определяется не только ошибками аппроксимации h и δ, но и погрешностью регуляризации - функцией от α.

Лемма 1. Пусть x_α - регуляризованное решение уравнения /1.1/, а v_α - регуляризованное решение уравнения /2.1/. Тогда справедлива оценка

$$\|v_\alpha - x_\alpha\| \le \frac{C_1 \delta + C_2 h}{C_3 + \alpha},$$

где C_1, C_2, C_3 - не зависящие от δ, h, α константы.

Доказательство. Пусть выполнено условие /1.3/. Пусть $y_\alpha = v_\alpha - x_\alpha$. Тогда нетрудно видеть, что элемент $y_\alpha \subset X$ удовлетворяет уравнению второго рода:

$$A^* A y_\alpha + \alpha y_\alpha = F , \qquad /2.4/$$

где

$$F = A^* f - A_h^* f_\delta + A_h^* A_h v_\alpha - A^* A v_\alpha . \qquad /2.5/$$

Так как $A^* A$ - самосопряженный положительно определенный оператор, существует такая константа $C_3 > 0$, что

$$\|y_\alpha\| \le \frac{\|F\|}{C_3 + \alpha}.$$

Из выражения /2.5/ следует, что существуют константы C_1, C_2, не зависящие от δ, h, и такие, что

$$\|F\| \le C_1 h + C_2 \delta.$$

Отсюда

$$\|y_\alpha\| \le \frac{C_1 h + C_2 \delta}{C_3 + \alpha}.$$

Второй случай, когда выполняется условие /1.5/, доказывается аналогично. Лемма доказана.

Пусть задана последовательность параметров α:

$$\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \dots \ge \alpha_m > 0.$$

Пусть

$$v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, \dots, v_{\alpha_m}$$

- соответствующая последовательность регуляризованных квазирешений уравнения /2.1/. Для нахождения этой последовательности приближенных квазирешений может быть использован алгоритм, предложенный в работе [3] для регуляризованных решений системы алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей.

Пусть найдено решение v_{α_1}. В качестве начального приближения к решению v_{α_2} можно взять решение v_{α_1}:

$$v^0_{\alpha_2} = v_{\alpha_1}.$$

Пусть найдены

$$v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, \ldots, v_{\alpha_k}, \quad k \geq 1.$$

Тогда в качестве начального приближения для решения $v_{\alpha_{k+1}}$ берется элемент

$$v^0_{\alpha_{k+1}} = \sum_{i=1}^{k} \nu_i \, v_{\alpha_i}, \qquad /2.6/$$

где коэффициенты ν_i, $i=1,\ldots,k$, вычисляются по формуле

$$\nu_i = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}, \quad i=1,2,\ldots,k.$$

Формула /2.6/ определяется следующим утверждением.

Лемма 2. Справедлива оценка

$$\| v_{\alpha_{k+1}} - v^0_{\alpha_{k+1}} \| \leq C\alpha_1^k,$$

где C - константа, не зависящая от параметров $\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\alpha_{k+1}$.

Доказательство этой леммы аналогично случаю системы алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей, который рассматривается в [3], поэтому мы его не приводим.

После отыскания решения v_{α_m} предложенным выше алгоритмом окончательное приближенное квазирешение уравнения /1.1/ строится по формуле

$$v = \sum_{k=1}^{m} a_k v_{\alpha_k}, \qquad /2.7/$$

где коэффициенты a_k, $k=1,\ldots,m$, вычисляются по формуле

$$a_k = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} \frac{-\alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i}, \quad k=1,\ldots,m.$$

Справедлива следующая

Теорема 3. Для экстраполированного решения v, построенного по формуле /2.7/, справедлива оценка

$$\|v - x\| \leq \sum_{k=1}^{m} |a_k| \frac{C_1\delta + C_2 h}{C_3 + \alpha_k} + \omega_m(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m), \qquad /2.8/$$

где $\omega_m(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) = 0(\alpha_1^m)$.

Доказательство. Неравенство /2.8/ легко следует из теоремы 2 и леммы 2:

$$\|v - x\| = \|\sum_{k=1}^{m} a_k v_{\alpha_k} - x\| \leq$$

$$\leq \|\sum_{k=1}^{m} a_k (v_{\alpha_k} - x_{\alpha_k})\| + \|\sum_{k=1}^{m} a_k x_{\alpha_k} - x\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} |a_k| \frac{C_1\delta + C_2 h}{C_3 + \alpha_k} + C \sum_{k=1}^{m} |a_k| \alpha_k^m;$$

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_m.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. "Наука", М., 1979.
2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. "Наука", М., 1978.
3. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. "Наука", М., 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 декабря 1981 года.