объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-81-785

В.В.Нестеренко

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА

Направлено в "Journal of Physics, ser.A"

1981

Геометрическая природа нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния, исследовалась в ряде работ /1-5/. Хорошо известна, например, связь уравнения синус-Гордона с внутренней геометрией псевдосферы. Естественную геометрическую интерпретацию находит при этом ассоциированная линейная спектральная задача, необходимая для решения исходного нелинейного уравнения методом обратной задачи рассеяния. Кроме того, удается придать геометрический смысл преобразованиям Бэклунда /2/ и бесконечным сериям законов сохранения /6/.

Методы классической дифференциальной геометрии можно использовать и для получения новых нелинейных уравнений, допускающих представление Лакса. Для этого необходимо взять некоторую поверхность и зафиксировать на ней криволинейную систему координат. Внутренняя геометрия поверхности в выбранной системе координат /т.е. ее метрический тензор/ будет определяться нелинейным уравнением в частных производных /уравнение Гаусса/. Конкретный вид этого уравнения зависит как от типа поверхности /сфера, псевдосфера, минимальная поверхность и т.д./, так и от выбранной координатной системы. Выписывая явно уравнения движения базиса на поверхности, получаем представление Лакса для соответствующего нелинейного уравнения.

В данной работе эта процедура будет проведена для сферы в трехмерном евклидовом пространстве с использованием криволинейной системы координат, в которой координатными линиями являются семейства геодезических эллипсов и гипербол /7,8/. В результате будет получено новое нелинейное уравнение, не обсуждавшееся в литературе, которое описывает внутреннюю геометрию сферы в выбранной системе координат /см. уравнение /12//. Для этого уравнения будет построена ассоциированная линейная спектральная задача в матрицах /3x3/, которая требуется в методе обратной задачи рассеяния /9,10/.

Рассмотрим сферу в обычном трехмерном евклидовом пространстве

$$\vec{r}^{\,2} = R^2, \quad \vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2). \qquad /1/$$

На поверхности сферы введем подвижный базис, образованный двумя касательными векторами $\vec{r}_{,1}$ и $\vec{r}_{,2}$ $(\vec{r}_{,i} = \partial_i \vec{r} = \partial\vec{r}/\partial u^i$, $i = 1,2)$ и единичной нормалью $\vec{n} = \vec{r}/R$. Изменение этого базиса при движении его начала по поверхности определяется метрическим тензором поверхности $g_{ij}(u^1,u^2)=\vec{r}_{,i}\vec{r}_{,j}$ и тензором второй квадратичной формы $b_{ij}(u^1,u^2)$ с помощью деривационных формул [11] Гаусса

$$\nabla_j \vec{r}_{,i} = b_{ij}\vec{n} \qquad /2/$$

и Вейнгартена

$$\partial_i \vec{n} = -\sum_{k,\ell=1}^{2} b_{ik} g^{k\ell} \vec{r}_{,\ell} \; ; \quad i,j,k,\ell = 1,2. \qquad /3/$$

Здесь $g^{k\ell}$ - тензор, обратный к g_{ij}: $g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k$, а ∇_j означает ковариантное дифференцирование по отношению к метрическому тензору g_{ij}.

$$\nabla_j \vec{r}_{,i} = \partial_j \vec{r}_{,i} - \Gamma_{ij}^k \vec{r}_{,k} \,, \qquad /4/$$

где Γ_{ij}^k - символы Кристоффеля для g_{ij}:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{k\ell}}{2}(\partial_j g_{\ell i} + \partial_i g_{\ell j} - \partial_\ell g_{ij}) \,. \qquad /5/$$

Мы рассмотрим на сфере такую параметризацию, в которой координатными линиями являются геодезические эллипсы и гиперболы [7,8]. Квадрат элемента длины в этом случае имеет вид

$$ds^2 = \frac{(du^1)^2}{\sin^2\theta/2} + \frac{(du^2)^2}{\cos^2\theta/2} \,. \qquad /6/$$

В системе координат /6/ выбранный нами подвижный репер $\{\vec{r}_{,1}, \vec{r}_{,2}, \vec{n}\}$ ортогональный, но не ортонормальный: $\vec{r}_{,1}^{\,2}=(\sin\theta/2)^2$, $\vec{r}_{,2}^{\,2}=(\cos\theta/2)^{-2}$, $\vec{r}_{,1}\vec{r}_{,2}=0$. Тем не менее, именно такой базис оказывается удобным для введения спектрального параметра в получаемое ниже представление Лакса.

Возможность выбора системы координат /6/ на сфере доказывается в классических курсах дифференциальной геометрии [8,12]. Однако функция $\theta(u^1,u^2)$ не может быть произвольной, она должна удовлетворять некоторому нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка. В дифференциальной геометрии вложенных многообразий [13] этим уравнением является уравнение Гаусса для двумерного риманова многообразия постоянной кривизны с метрикой /6/.

Уравнение Гаусса возникает как условие совместности системы линейных уравнений /2/, /3/, определяющих движение репера $\{\vec{r}_{,1}, \vec{r}_{,2}, \vec{n}\}$ по поверхности. Выпишем в явном виде уравнения /2/, /3/. Для этого необходимо учесть, что в случае сферы вторая квадратичная форма пропорциональна первой [11]

$$b_{11} = -\frac{1}{R}g_{11} = -\frac{1}{R}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-2}, \quad b_{22} = -\frac{1}{R}g_{22} = -\frac{1}{R}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-2},$$
$$b_{12} = -\frac{1}{R}g_{12} = 0, \qquad /7/$$

а символы Кристоффеля для метрики /6/ даются следующими выражениями:

$$\Gamma^1_{11} = -\phi_{,1}\cdot\mathrm{ctg}\,\phi, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\phi_{,2}\cdot\mathrm{ctg}\,\phi, \quad \Gamma^1_{22} = -\phi_{,1}\cdot\mathrm{tg}^3\phi,$$
$$\Gamma^2_{11} = \phi_{,2}\cdot\mathrm{ctg}^3\phi, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \phi_{,1}\cdot\mathrm{tg}\,\phi, \quad \Gamma^2_{22} = \phi_{,2}\cdot\mathrm{tg}\,\phi, \qquad /8/$$
$$\phi = 2\theta.$$

Теперь уравнения /2/, /3/ принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial u^j}\begin{pmatrix}\vec{r}_{,1}\\ \vec{r}_{,2}\\ \vec{n}\end{pmatrix} = \omega^j\cdot\begin{pmatrix}\vec{r}_{,1}\\ \vec{r}_{,2}\\ \vec{n}\end{pmatrix}, \quad j = 1,2, \qquad /9/$$

где /3x3/ матрицы ω^j определяются формулами:

$$\omega^1 = \begin{vmatrix} -\phi_{,1}\cdot\mathrm{ctg}\,\phi & \phi_{,2}\cdot\mathrm{ctg}^3\phi & -\frac{1}{R}(\sin\phi)^{-2} \\ -\phi_{,2}\cdot\mathrm{ctg}\,\phi & \phi_{,1}\cdot\mathrm{tg}\,\phi & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad /10/$$

$$\omega^2 = \begin{vmatrix} -\phi_{,2}\cdot\mathrm{ctg}\,\phi & \phi_{,1}\cdot\mathrm{tg}\,\phi & 0 \\ -\phi_{,1}\cdot\mathrm{tg}^3\phi & \phi_{,2}\cdot\mathrm{tg}\,\phi & -\frac{1}{R}(\cos\phi)^{-2} \\ 0 & \frac{1}{R} & 0. \end{vmatrix}.$$

Условие совместности линейных уравнений /9/

$$\omega^1_{,2} - \omega^2_{,1} = [\omega^2, \omega^1] \qquad /11/$$

сводится к следующему нелинейному уравнению гиперболического типа на функцию $\phi(u^1, u^2)$:

$$(\phi_{,1}\cdot\mathrm{tg}^2\phi)_{,1} - (\phi_{,2}\cdot\mathrm{ctg}^2\phi)_{,2} = \frac{2}{R^2}(\sin 2\phi)^{-1}. \qquad /12/$$

В дифференциальной геометрии[11] уравнение /11/ есть уравнение Гаусса

$$R_{1212} = b_{12}\cdot b_{12} - b_{11}\cdot b_{22},$$

где R_{1212} – тензор кривизны Римана-Кристоффеля для метрики /6/. Уравнения Петерсона-Кодацци для сферы удовлетворяются тождественно, поэтому вместо трех условий совместности для линейной системы /9/ имеет место одно условие /12/.

Если мы хотим использовать матрицы ω^i в /10/ для построения линейной вспомогательной спектральной задачи, которая необходима для решения уравнения /12/ методом обратной задачи рассеяния [9,10], то в ω^i надо внести зависимость от спектрального параметра λ. Для этого учтем тот факт, что нелинейное уравнение /12/ инвариантно относительно следующих преобразований:

$$u^i \to \lambda u^i, \quad i = 1,2, \quad R \to \lambda R, \quad \phi \to \phi, \qquad /13/$$

где λ – константа. Линейные уравнения /9/ неинвариантны при таких заменах, в результате которых матрицы ω^i начинают зависеть от спектрального параметра λ.

Таким образом, нелинейному уравнению /12/ мы можем поставить в соответствие следующую линейную спектральную задачу:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u^i} = \Omega^i(\lambda)\psi, \quad i = 1,2, \qquad /14/$$

где $\psi(u^1,u^2)$ – функция-столбец с тремя компонентами, а матрицы $\Omega^i(\lambda)$ имеют вид

$$\Omega^1(\lambda) = \begin{vmatrix} -\phi_{,1}\cdot \mathrm{ctg}\,\phi & \phi_{,2}\cdot \mathrm{ctg}^3\phi & -\frac{\lambda}{R}(\sin\phi)^{-2} \\ -\phi_{,2}\cdot \mathrm{ctg}\,\phi & \phi_{,1}\cdot \mathrm{tg}\,\phi & 0 \\ \frac{\lambda^{-1}}{R} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad /15/$$

$$\Omega^2(\lambda) = \begin{vmatrix} -\phi_{,2}\cdot \mathrm{ctg}\,\phi & \phi_{,1}\cdot \mathrm{tg}\,\phi & 0 \\ -\phi_{,1}\cdot \mathrm{tg}^3\phi & \phi_{,2}\cdot \mathrm{tg}\,\phi & -\frac{\lambda}{R}(\cos\phi)^{-2} \\ 0 & -\frac{\lambda^{-1}}{R} & 0 \end{vmatrix}.$$

Предложенный способ построения нелинейного уравнения, допускающего представление Лакса, очевидно, может быть применен и к другим поверхностям, отличным от сферы /например, минимальные поверхности, поверхности с постоянной средней кривизной и т.д./.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sasaki R. Phys.Lett., 1979, 71A, p.390.

2. Sasaki R. Nucl.Phys., 1979, B154, p.343.
3. Nesterenko V.V. Lett.Math.Phys., 1980, 4, p.451.
4. Barbashov B.M., Nesterenko V.V. Fortschr. der Phys., 1980, 28, p.427.
5. Chinea F.J. Phys.Lett., 1979, 72A, p.281.
6. Sasaki R., Bullough R.K. Proc.R.Soc.Lond., 1981, A376, p.401.
7. Eisenhart L.P. A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. Dover Publications Inc., New York, 1960, p.213.
8. Bianchi L. Vorlesungen über Differential-geometrie. Erste Liferung. Druck and Verlag von B.G. Teubner, Leipzig, 1896, S.163,252.
9. Захаров В.В. и др. Теория солитонов. Метод обратной задачи. "Наука", М., 1980.
10. Ablowitz M.J. et al. Phys.Rev.Lett., 1973, 30, p.1262; Stud.Appl.Math., 1974, 53, p.243.
11. Eisenhart L.P. An Introduction to Differential Geometry with Use of the Tensor Calculus. Princeton University Press, Princeton, 1940.
12. Darboux G. Lecons sur la Theorie generale des surfaces, II, 2 ed, Paris, 1914-1925.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 декабря 1981 года.