сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-81-52

П.П.Физиев

ДЕЙСТВИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КАК ФУНКЦИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

1981

1. В связи с предложенным в [1] вариантом теоремы Э.Нетер было введено действие $\Phi(p,q,t)$ как функция на пространстве состояний M^{2n+1}_{pqt} механической системы с n степенями свободы. Специальный вид такого действия встречался в работе Гамильтона [2], но не получил дальнейшего развития. Однако именно такое действие необходимо для построения "динамической функции" и изучения свойств симметрии механической системы [1]. Как будет показано в последующих работах, эту функцию действия можно с успехом применять для изучения функциональных интегралов при квантовании механических систем.

Мы намерены изучить свойства $\Phi(p,q,t)$ и методы его нахождения, подчеркивая различия по сравнению с обычным подходом к действию.

История введения и применения действия в классической механике излагается, например, в [3] и в курсах теоретической механики [4-10]. Мы напомним основные факты и введем обозначения.

Гамильтон [2] ввел свою главную функцию действия $S(q,t;q^\circ,t^\circ) = S_{q^\circ}$ как функцию на $M^{n+1}_{qt} \times M^{n+1}_{q^\circ t^\circ}$ /где M^{n+1}_{qt} $-n+1$ -мерное пространство событий/. Эта функция порождает каноническое преобразование $(p^\circ,q^\circ)\to(p,q)$, которое определяет эволюцию от начального состояния $(p^\circ,q^\circ,t^\circ)$ до конечного (p,q,t). Здесь $p=\{p_1,\dots,p_n\}$ и $q=\{q^1,\dots,q^n\}$ - наборы соответствующих обобщенных импульсов и координат. На языке 1-формы Картана-Пуанкаре $\Theta = pdq - \mathcal{H}dt$, где $pdq=\sum_{i=1}^{n} p_i dq^i$, $\mathcal{H}(p,q,t)$ -гамильтониан, такое преобразование задается соотношением

$$\Theta = pdq - \mathcal{H}dt = p^\circ dq^\circ + dS, \qquad /1.1/$$

откуда $p=\partial_q S$, $p^\circ=-\partial_{q^\circ} S$. Эти уравнения определяют замену $(p^\circ,q^\circ)\to$ $\to(p,q)$ локально-однозначно. По любому набору (q,t) и (q°,t°) S удовлетворяет нелинейному уравнению в частных производных первого порядка [2-4].

Эволюцию можно описать и каноническими уравнениями

$$\dot q = \partial_p \mathcal{H} = \hat H_t q, \qquad /1.2/$$
$$\dot p = -\partial_q \mathcal{H} = \hat H_t p,$$

где точкой обозначено дифференцирование по t, а $\hat{H}_t$ есть оператор эволюции /гамильтоново векторное поле [8,9] /:

$$\hat{H}_t = \partial_t + [\ ,\ \mathcal{H}\ ]. \qquad /1.3/$$

Здесь $[\ ,\ ]$ - скобка Пуассона. С помощью/1.3/ можно записать решение /1.2/, удовлетворяющее начальным условиям $p(t^\circ) = p^\circ$, $q(t^\circ) = q^\circ$ в виде

$$q = q_{extr}\ (t\,; p^\circ, q^\circ, t^\circ) = \exp(\tau \hat{H}_{t^\circ})\, q^\circ \,|_{\tau = t - t^\circ}\ , \qquad /1.4/$$

$$p = p_{extr}\ (t; p^\circ,\ q^\circ,\ t^\circ) = \exp(\tau \hat{H}_{t^\circ})\, p^\circ \,|_{\tau = t - t^\circ}\ ,$$

где $\hat{H}_{t^\circ}$ - оператор /1.3/, записанный в переменных $(p^\circ, q^\circ, t^\circ)$. Более простой вариант /1.4/ излагается, например, в [11].

Действие S_{q° можно найти, вычисляя значение A_{extr} функционала действия /по Гамильтону/

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \Theta = \int_{t_1}^{t_2} (pdq - \mathcal{H}dt) \qquad /1.5/$$

на экстремалях /1.4/, выбирая $t_1 = t^\circ$, $t_2 = t$. Если выразим из /1.4/ p° через $(q, t; q^\circ, t^\circ)$ и подставим в A_{extr}, мы получим S_{q°. Такая процедура возможна только в том случае,если экстремали /1.4/не проходят через каустики [4,5,8,12]. В противном случае нельзя однозначно выразить p° через $(q, t;\ q^\circ, t^\circ)$, и это приводит к ряду усложнений [8,16].

Свойства S_{q° хорошо изучены. Она играет важную роль при построении квазиклассического приближения в квантовой механике[12],а также при квантовании механических систем методом функционального интегрирования [13].

Якоби [14] закончил построение метода решения /1.2/ при помощи канонических преобразований, доказав, что достаточно рассмотреть S как функцию на M^{n+1}_{qt} и потребовать, чтобы она удовлетворяла нелинейному уравнению в частных производных первого порядка

$$\partial_t S + \mathcal{H}(\partial_q S, q, t) = 0. \qquad /1.6/$$

S_{q° является полным интегралом этого уравнения[15] и удовлетворяет начальному условию $S_{q^\circ} = 0$ при $t = t^\circ$. Полный интеграл, для которого $S(q, t^\circ) = S_0(q)$, можно записать в виде $S = S_0(q^\circ) + S_{q^\circ}(q, t)$ [12]. Он задает замену $(P^\circ, Q^\circ) \to (p, q)$ согласно равенству $pdq - \mathcal{H}dt = P^\circ dQ^\circ + dS$, где (P°, Q°) - новые константы движения, определяемые однозначно выбором S. Выраженные через (p, q, t),

они задают полный набор канонически сопряженных первых интегралов /1.2/ и, следовательно, удовлетворяют уравнению для первых интегралов * $I = I(p, q, t)$:

$$\hat{H}_t I = 0. \qquad /1.7/$$

Ненулевое $S_0(q)$ соответствует замене $(p^\circ, q^\circ) \to (P^\circ = p^\circ + \partial_{q^\circ} S_0,\ Q^\circ = q^\circ)$ в импульсной части $M^{2n+1}_{p^\circ q^\circ t^\circ}$, т.е. калибровочному преобразованию.

Геометрические проблемы, связанные с уравнением /1.6/, являются довольно сложными из-за его нелинейности [8,12,15-17]. Известно, что задание $S_0(q)$ соответствует однозначному выбору n-мерной лагранжевой поверхности Λ^n в фазовом пространстве M^{2n}_{pq} вместе с выбранной системой координат на этой поверхности.

Несколько непривычный формализм симплектических структур изложен в [18].Мы ограничимся применением некоторых результатов и терминов из этой монографии.

2. Действие $\Phi(p, q, t)$ на M^{2n+1}_{pqt} определялось в [1] как решение уравнения

$$\hat{H}_t \Phi = \mathcal{L}, \qquad /2.1/$$

где $\mathcal{L} = \mathcal{L}(p, q, t) = p\partial_p \mathcal{H} - \mathcal{H}$ - лагранжиан системы, выраженный в гамильтоновых переменных (p, q, t), а $p\partial_p = \sum_{i=1}^{n} p_i\ \partial_{p_i}$. Отсюда на экстремалях $\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{L}_{extr}$, т.е. физические значения $\frac{d\Phi}{dt}$ и $\frac{dS}{dt}$ совпадают. Это дает право называть Φ также действием, хотя это новая функция $2n+1$ переменных (p, q, t) со своими особыми свойствами.

В отличие от /1.6/ уравнение /2.1/ является линейным. Между решениями Φ и S этих двух уравнений имеется связь, что, на наш взгляд, объясняет, почему часто удается решить сложное нелинейное уравнение Гамильтона-Якоби.

Отметим еще два простых, но важных факта. Общее решение /2.1/ можно записать как

$$\Phi = \Phi_0 + I, \qquad /2.2/$$

где Φ_0 - частное решение неоднородного уравнения /2.1/, а I - произвольный первый интеграл /общее решение /1.7//. Это является-

---

* Мы рассматриваем первые интегралы локально и допускаем в качестве таковых любые решения /1.7/, в том числе и многозначные функции M^{2n+1}_{pqt}.

ся отражением того, что физические значения действия определены с точностью до слагаемого, которое есть константа движения.

Задание начального условия

$$\Phi(p,q,t)\big|_{t=t^\circ} = W(p,q;t^\circ) \qquad /2.3/$$

на гиперплоскости постоянного времени:

$$t = t^\circ \qquad /2.4/$$

определяет однозначным образом решение /2.1/. Одна из наших целей - связать выбор W с выбором физических величин.

На языке дифференциальных форм описанный в [1] переход от функции действия /1.5/ к "динамическому функционалу" означает замену формы Θ на 1-форму

$$\Delta = \Theta - d\Phi\,, \qquad /2.5/$$

которую будем называть формой Дирака. Ясно, что решения /2.1/ определяют по этой формуле целую совокупность таких форм. При помощи /2.1/ можно записать

$$\Delta = \sum_i \left[(p_i - \partial_{q^i}\Phi)(dq^i - \partial_{p_i}\mathcal{H}\,dt) - \partial_{p_i}\Phi\,(dp_i + \partial_{q^i}\mathcal{H}\,dt) \right]. \qquad /2.6/$$

3. Уже отмечалось, что действие S является производящей функцией определенного канонического преобразования. Согласно /2.5/ Θ и Δ отличаются на полный дифференциал $d\Phi$. Следовательно, переход $\Theta \to \Delta$ можно рассматривать как каноническое преобразование, в котором Φ играет роль производящей функции. Из /2.5/ следует, что существуют новые канонические переменные (P,Q) и новый гамильтониан $\mathcal{H}^0$, такие, что

$$\Delta = P\,dQ - \mathcal{H}^\circ dt. \qquad /3.1/$$

Отсюда и из /2.5/ получаем связь между P,Q и Φ:

$$\begin{aligned} &\sum_m P_m \partial_{q^i} Q^m = p_i - \partial_{q^i}\Phi && (a), \\ &\sum_m P_m \partial_{p_i} Q^m = \quad - \partial_{p^i}\Phi && (b), \\ &\sum_m P_m \partial_t Q^m = \mathcal{H}^\circ - \mathcal{H} - \partial_t \Phi && (c). \end{aligned} \qquad /3.2/$$

Изучение более простой системы уравнений такого типа /без /3.2 c// при произвольной $\Phi(p,q,t)$ проводится в [19]. Считая, что Φ задано, найдем P,Q и $\mathcal{H}$ из /3.2/. Условие совмести-

мости этой системы проще всего найти внешним дифференцированием /2.5/, что приводит к $d\Delta = d\Theta$. Расписывая его покомпонентно, получим два типа условий совместимости:

а/ эквивалентные условию каноничности P и Q

$$[Q^i, Q^j] = 0\,, \quad [P_i, P_j] = 0\,, \quad [Q^i, P_j] = \delta^i_j\,, \qquad /3.3/$$

б/ эквивалентные требованию

$$\sum_m \{ [B, P_m]\,\partial_t Q^m + \partial_t P_m [Q^m, B] \} = [B, \mathcal{H}^\circ - \mathcal{H}] \qquad /3.4/$$

для произвольной величины $B(p,q,t)$. Можно доказать

<u>Утверждение 1</u>. В результате инвариантности скобок Пуассона и оператора эволюции $\hat{H}_t$ при канонических преобразованиях условие /3.4/ выполняется тождественно, если выполнено /3.3/.

Следовательно, условия совместимости /3.2/ сводятся к требованию каноничности (P,Q) /3.3/. Тогда P и Q удовлетворяют каноническим уравнениям типа /1.2/:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \partial_P \mathcal{H}^\circ = \hat{H}^\circ_t Q\,, \\ \dot{P} &= -\partial_Q \mathcal{H}^\circ = \hat{H}^\circ_t P\,, \end{aligned} \qquad /3.5/$$

где $\hat{H}^\circ_t$ получается в переменных P,Q согласно /1.3/ при помощи $\mathcal{H}^\circ$.

<u>Утверждение 2</u>. Благодаря уравнению /2.1/ новый гамильтониан $\mathcal{H}^\circ$ из /3.2/ оказывается однородной функцией первой степени импульсов P.

В самом деле, нетрудно получить эквивалентное /3.2с/ равенство

$$\sum_m P_m \hat{H}_t Q^m = \mathcal{H}^\circ - \mathcal{H} + p\partial_p \mathcal{H} - \hat{H}_t \Phi$$

и, учитывая $\hat{H}_t Q = \hat{H}^\circ_t Q$ и /3.5/, записать его в виде

$$\sum_m P_m \partial_{P_m} \mathcal{H}^\circ - \mathcal{H}^\circ = p\partial_p \mathcal{H} - \mathcal{H} - \hat{H}_t \Phi\,.$$

Из /2.1/ ясно, что правая часть равна нулю. Следовательно,

$$\sum_m P_m \partial_{P_m} \mathcal{H}^\circ = \mathcal{H}^\circ, \qquad /3.6/$$

что доказывает утверждение 2 и позволяет записать $\mathcal{H}^\circ$ в виде

$$\mathcal{H}^\circ = \Pi\,\alpha\Big(\frac{P_{(i)}}{\Pi}, Q^{(i)}, t\Big), \qquad /3.7/$$

где $\Pi(P)$ - некая зафиксированная однородная функция первой степени импульсов, а α - произвольная функция $2n+1$ переменных.

Здесь видна существенная разница между Φ и S, являющимися порождающими канонические преобразования функциями. В то время как S определяет однозначно новый гамильтониан: $\mathcal{H}^{\circ}_{S} = \mathrm{const}$, задавая Φ, мы можем определить $\mathcal{H}^{\circ}$ только в виде /3.7/. Как известно, такой гамильтониан является генератором однородных канонических преобразований M^{2n}_{PQ} из группы Матье [4,16].

Зафиксируем $\mathcal{H}^{\circ}$ типа /3.7/. Оказывается, что все еще нельзя определить однозначным образом P и Q. В самом деле, для этого имеются только уравнения /3.2a, b/. Так как из-за /3.3/ якобиан преобразования $(p,q) \to (P,Q)$ равен единице, можно получить эквивалентную /3.2a, b/ систему расщепленных уравнений для P и Q:

$$p\partial_p Q^i + [Q^i, \Phi] = 0,$$
$$p\partial_p P_i + [P_i, \Phi] = P_i. \qquad /3.8/$$

Однако эти уравнения не определяют P и Q однозначно.

Утверждение 3. При заданном решении уравнения /2.1/ Φ и гамильтониане $\mathcal{H}^{\circ}$ переменные (P,Q) определяются из /3.8/ с точностью до преобразования из группы Матье в пространстве M^{2n}_{PQ}.

Доказательство сводится к наблюдению, что если два набора, (P,Q) и (P',Q'), соответствуют одним и тем же Φ и $\mathcal{H}^{\circ}$, согласно /3.1/ и /2.5/ $PdQ = P'dQ'$.

Однородные канонические преобразования изучались Матье [20]. Он показал, что такие преобразования образуют подгруппы канонических преобразований и их генераторы являются функциями типа /3.7/ [4,10,16].

Утверждения 2 и 3 показывают, почему действие $\Phi(p,q,t)$ мало привлекало внимания. С точки зрения метода Гамильтона-Якоби оно совершенно непригодно для определения эволюции механической системы из-за неоднозначного определения P, Q и $\mathcal{H}^{\circ}$. Поэтому его нельзя называть функцией, порождающей каноническое преобразование. Заимствуя из [18] термин геометрического происхождения, было бы лучше назвать Φ "собственной функцией" канонического преобразования. Суть заключается в хорошо известном факте, что для однозначного определения преобразования нужно задать порождающую его функцию как функцию определенных переменных: половины старых и половины новых, в то время как Φ является функцией только "старых" переменных. Дополнительное требование, чтобы Φ удовлетворяло уравнению /2.1/,

приводит к тому специфическому виду неоднозначностей, который рассмотрен выше. В частности, согласно утверждению 2 механическая эволюция P и Q не выводит этих величин из того множества, с точностью до которого их определяет Φ, согласно утверждению 3.

4. Произвол в определении P и Q можно несколько ограничить. Имея в виду, что порождаемые S канонические преобразования приводят к новому гамильтониану $\mathcal{H}^{\circ}_{S} = \mathrm{const}$, можно требовать, чтобы и $\mathcal{H}^{\circ} = \mathrm{const}$, однако уже только в качестве дополнительного условия. При этом из /3.7/ следует, что константа должна равняться нулю:

$$\mathcal{H}^{\circ} = 0. \qquad /4.1/$$

Из /3.5/ видно, что тогда P и Q будут первыми интегралами /1.2/, т.е. кроме /3.3/ они будут удовлетворять и /1.7/. Форма /3.1/ примет более простой вид:

$$\Lambda = PdQ. \qquad /4.2/$$

С точки зрения геометрического подхода к механике [8,9] мы показали, что в M^{2n+1}_{pqt} существуют локальные координаты (P,Q), в которых Λ имеет вид /4.2/, а условие /4.1/ фиксирует эти координаты. Как следствие получаем:

Утверждение 4. Ранг форм Дирака /3.1/ постоянен на M^{2n+1}_{pqt} и равняется n.

Докажем следующее:

Утверждение 5. Любой полный набор канонически сопряженных первых интегралов (P,Q) определяет решение $\Phi_Q(p,q,t)$ уравнения /2.1/ согласно

$$d\Phi_Q = pdp - \mathcal{H}\,dt - PdQ. \qquad /4.3/$$

Меняя всевозможными способами набор (P,Q), мы получим по этой формуле все решения /2.1/.

Отметим сразу, что определенное /4.3/ Φ_Q может быть многозначной функцией, выбор ветви которой не определяется набором (P,Q). В этой работе мы не будем изучать глобальные свойства Φ_Q, изложенные в ней результаты имеют локальный характер.

Проведем доказательство в три этапа:

1/ 1 - форма $\delta\Phi_Q = pdq - \mathcal{H}\,dt - PdQ$ есть полный дифференциал. В самом деле, условие замкнутости $d(\delta\Phi_Q) = 0$ сводится к /3.3/ и /3.4/ при $\mathcal{H}^{\circ} = 0$. Первое из них удовлетворяется согласно условию утверждения. Как мы указали в утверждении 1, оно обеспечивает выполнение /3.4/ даже при $\mathcal{H}^{\circ} \neq 0$.

2/ В результате замкнутости 1-формы /4.3/ она определяет внешний дифференциал функции Φ_Q /вообще говоря, многозначной при наличии топологических особенностей M^{2n+1}_{pqt}/. Эта функция является решением /2.1/.

Действительно, покомпонентная запись /4.3/ дает систему /3.2/ при $\mathcal{H}^\circ=0$. Мы показали, что из нее следует равенство $p\partial_p\mathcal{H}-\mathcal{H}-\hat{H}_t\Phi = P\partial_P\mathcal{H}^\circ-\mathcal{H}^\circ$, что при $\mathcal{H}^\circ=0$ доказывает эту часть утверждения.

3/ Пусть (P,Q) и (P',Q') - два набора первых интегралов, удовлетворяющих условию утверждения. Тогда из-за /3.3/ переход $(P,Q)\to(P',Q')$ есть каноническое преобразование, порождаемое некоторой функцией $\phi(Q,Q',t)$ согласно $PdQ-P'dQ'=d\phi$, откуда $\partial_t\phi=0$, т.е. ϕ есть тоже первый интеграл/1.2/.Ясно, что, меняя произвольным образом (P',Q') при фиксированном наборе (P,Q), мы получим любой первый интеграл ϕ. Из /4.3/ получаем, что $d\Phi_{Q'}-d\Phi_Q=d\phi$, откуда локально $\Phi_{Q'}=\Phi_Q+\phi$. Согласно /2.2/ и смыслу Φ_Q и ϕ это есть общее решение /2.1/.

Утверждение 5 дает метод решения /2.1/ при помощи /4.3/ и указывает на интересную связь между решениями Φ_Q и симметриями динамических уравнений.

5. Утверждение 5 показывает также, что изменение начального условия /2.3/ эквивалентно каноническому преобразованию в M^{2n}_{PQ}. Рассмотрим подробнее связь между (P,Q) из /4.3/ и W из /2.3/.

<u>Утверждение 6</u>. Пусть решение /2.1/ $\Phi_0(p,q,t;t^\circ)$ удовлетворяет условию $\Phi_0(p,q,t^\circ,t^\circ)=0$, а $\Phi_Q(p,q,t)$ соответствует набору (P,Q) в смысле /4.3/ и, кроме того, удовлетворяет начальному условию /2.3/. Тогда

$$\Phi_Q(p,q,t)=\Phi_o(p,q,t;t^\circ)+W(p^\circ,q^\circ;\ t^\circ), \qquad /5.1/$$

где $p^\circ=p^\circ(p,q,t;t^\circ)$ и $q^\circ=q^\circ(p,q,t;t^\circ)$ - начальные условия для /1.2/, рассматриваемые как первые интегралы. Набор (P,Q) и $W(p,q;t^\circ)$ связаны уравнениями

$$\begin{aligned} &p\partial_p Q^\circ+[Q^\circ,W]=0, && /a/ \\ &p\partial_p P^\circ+[P^\circ,W]=P^\circ, && /b/ \end{aligned} \qquad /5.2/$$

где $Q^\circ(p,q)=Q(p,q,t^\circ)$и $P^\circ(p,q)=P(p,q,t^\circ)$.

Действительно, так как Φ_o есть решение /2.1/, можно положить $\Phi_Q=\Phi_0+I_Q$, где $I_Q(p,q,t)$ - некий первый интеграл /1.2/. Начальные условия (p°,q°) задают полную систему первых интегралов, так что $I_Q=I_Q[p^\circ(p,q,t;t^\circ),\ q^\circ(p,q,t;t^\circ)]$. Имея в виду, что $P^\circ(p,q,t^\circ;t^\circ)=p$ и $q^\circ(p,q,t^\circ;t^\circ)=q$, и начальные условия на Φ_o и Φ_Q, видим, что $I(p,q,t^\circ)\equiv W(p,q;t^\circ)$. Тогда $I_Q(p,q,t)=W[p^\circ(p,q,t;t^\circ);q^\circ(p,q,t;t^\circ)]$, что доказывает /5.1/. Систему /5.2/ получаем из /3.8/ при $t=t^\circ$, имея в виду /2.3/ и меняя обозначения (p°,q°) на (p,q).

Повторяя в обратном порядке рассуждения, которые привели от /3.1/ к /3.8/, мы можем записать при $t=t^\circ$ связь между W и (P,Q) в виде

$$P^\circ dQ^\circ=pdq-dW. \qquad /5.3/$$

Самое примечательное свойство соотношений /5.2/ и /5.3/ - в том, что они не зависят от $\mathcal{H}(p,q,t)$, т.е. от динамики системы. В этом смысле при заданном W можно выбирать P° и Q° единым, универсальным образом для всех механических систем /с данным числом степеней свободы/. Конечно, для разных $\mathcal{H}(p,q,t)$ сами функции $P(p,q,t)=P^\circ(p^\circ,q^\circ)$ и $Q(p,q,t)=Q^\circ(p^\circ,q^\circ)$ будут разными из-за различной зависимости p° и q° от (p,q,t).

Можно ставить и обратную задачу: при заданных P° и Q° найти W из /5.2/. Имея в виду дальнейшие приложения, полезно искать решение в два этапа.

<u>Утверждение 7</u>. а/ При заданных $Q^\circ(p,q)$ можно определить из /5.2a/ $W(p,q;t^\circ)$ в виде

$$W=\int^{(q)} p(q;C)\,dq\Big|_{C=Q^\circ(p,q)}+f[Q^\circ(p,q),t^\circ], \qquad /5.4/$$

где $p(q;C)$ нужно найти из системы уравнений

$$Q^\circ(p,q)=C. \qquad /5.5/$$

C - n произвольных констант из области значений Q°, а $f(Q^\circ,t^\circ)$- произвольная функция. В /5.4/ интеграл берется по произвольному пути на лагранжевой поверхности /5.5/, который заканчивается в точке $(p(q;C),q)$.

б/ Если известны и $P^\circ(p,q)$, можно определить с помощью/5.2b/ W с точностью до несущественного слагаемого $f(t^\circ)$.

Мы пропустим доказательство, основанное на /5.3/ и на свойствах лагранжевых поверхностей в M^{2n}_{pq} /12,16,17/. Отметим только, что заданием Q° сами P° определяются из /3.3/ в виде $P^\circ=\bar{P}^\circ-\partial_{Q^\circ}f$, где $f(Q^\circ,t^\circ)$ - та же самая функция, что и в /5.4/. Отметим также, что $W_Q=W[p(q^\circ;Q^\circ),q^\circ;t^\circ]$ есть производящая функция преобразования $(p^\circ,q^\circ)\to(P^\circ,Q^\circ)$, в то время как $W(p,q;t^\circ)$ есть его собственная функция.

Утверждение 7 дает еще один способ найти Φ_Q, если заданы Q° или (P°,Q°) и известно $\Phi_o(p,q,t;t^\circ)$.

Автор глубоко признателен Б.М.Барбашову за внимание к работе, стимулирующие обсуждения, полезные советы и за прочтение рукописи. Автор благодарен также И.С.Златеву, Г.В.Ефимову, И.Т.Тодорову, П.А.Николову, В.В.Нестеренко, А.Д.Донкову,

И.К.Захариеву, Д.А.Светогорскому и Р.П.Лазову за ценные дискуссии и советы на разных этапах изучения рассмотренных в работе вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fiziev P.P. Bulg.J.Phys., 1979, 6, No.3, p.272.
2. Hamilton W.R. On a General Method in Dynamics, Second Essey on a General Method in Dynamics, 1834.
3. Полак Л.С. Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике, Физматгиз, М., 1960.
4. Whittaker E.T. A Treatise on the Analytical Dynamics. Cambridge, 1965,
5. Парс Л.А. Аналитическая динамика. "Наука", М., 1971.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Физматгиз, М., 1965.
7. Голдстейн Г. Классическая механика. "Наука", М., 1975.
8. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. "Наука", М., 1979.
9. Abracham R., Marsden J.E. Foundations of Mechanics, New York, 1967.
10. Sudarshan E.C.G., Mucunda N. Classical Dynamics: A Modern Perspective, New York, 1973.
11. Зуланке Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. "Мир", М., 1975.
12. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. "Наука", М., 1976.
13. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. "Мир", М., 1968.
14. Jacobi C.G.J. Vorlesungen uber Dynamik, Berlin, 1884.
15. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. "Наука", М., 1966.
16. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. "Наука", М., 1979.
17. Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. "Наука", М., 1978.
18. Kijowski J., Tulczyjew W.M. A Symplectic Framework for Fiel Theories, Springer, 1979.
19. Caratu C. et al. Invariance and Symmetry in Classical Mechanics, 1, Mostra, 1977.
20. Mathieu E. Journ. de Math., 1874, X1X, p.265.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 января 1981 года.