объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна



P5-81-372

Н.Ф.Трускова

# ПОЛИСФЕРОИДАЛЬНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ

*Направлено в ЯФ*

1981

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена решениям уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)W = 0 \qquad /1.1/$$

в полисфероидальных системах координат, соответствующих $N$ - мерным $/N \geq 4/$ вытянутым или сжатым эллипсоидам или гиперболоидам вращения.

Необходимость изучения таких решений возникла в связи с предложенной А.Т.Филипповым релятивистской моделью составных мезонов[1,2]. Оказалось, что дифференциальное уравнение, решаемое в этой модели, совпадает с частным случаем уравнения, которое можно получить при разделении переменных в /1.1/ в системах координат четырехмерных эллипсоидов или гиперболоидов вращения.

Вместе с тем различные частные случаи решений /1.1/ в упомянутых выше $N$-мерных системах координат применимы при решении задачи двух центров квантовой механики [3-5], задачи трех тел с кулоновским взаимодействием[5-7], задач рассеяния и дифракции скалярных и электромагнитных волн на вытянутых или сжатых эллипсоидах вращения[8-10], задач на собственные колебания используемых в лазерах открытых резонаторов[5,11-13] и ряда других[5,14-16].

Все это приводит к необходимости всестороннего исследования и классификации решений уравнения /1.1/ в $N$-мерных полисфероидальных системах координат.

В работе получены непрерывные и однозначные в соответствующих областях решения /1.1/ в таких системах координат. При этом показано, что все уравнения, возникающие при разделении переменных в /1.1/ в названных системах координат, сводятся к уравнениям для уже известных специальных функций, а также к уравнениям вида:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{2(\mu-\nu+(\nu+\mu+1)\cos 2v)}{\sin 2v}\frac{\partial}{\partial v} - 2q\cos 2v + \lambda\right] V = 0 , \qquad /1.2а/$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{2(\mu-\nu+(\nu+\mu+1)\,\mathrm{ch}\, 2u)}{\mathrm{sh}\, 2u}\frac{\partial}{\partial u} + 2q\,\mathrm{ch}\, 2u - \lambda\right] U = 0 . \qquad /1.2б/$$

При частных значениях параметров /1.2/ переходят в уравнения Матье[17,18], в уравнения для сфероидальных [5,8,18-22] и гиперсфероидальных /или обобщенных сфероидальных/ [11,13,23,24] функций, в гипергеометрическое уравнение [18], в уравнения для угловых и радиальных волновых функций водородоподобного атома с энергией $E=0$ в сфероидальной системе координат и в некоторые другие. При произвольных значениях параметров /1.2/ не сводятся ни к каким известным автору уравнениям.

Для случая $\nu, \mu > -1$ в работе найдены ограниченные при всех действительных v и периодические с периодом $\pi$ решения уравнения /1.2а/, а также являющиеся их аналитическим продолжением в область чисто мнимых значений $v\,(v=iu)$ решения уравнения /1.2б/, которые названы соответственно полисфероидальными периодическими функциями и модифицированными полисфероидальными периодическими функциями. Для этих функций получены разложения в виде рядов по полиномам Якоби и функциям Бесселя и рассмотрены их основные свойства и частные случаи.

## 2. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ И ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Введем в $(N+M)$-мерном $/N, M=1,2,3\ \dots/$ евклидовом пространстве $E_{N+M}$ следующие полисфероидальные системы координат:

$$\begin{aligned}
x_1 &= f\,\mathrm{ch}\,u\cos v\cos\alpha_{N-1},\\
x_2 &= f\,\mathrm{ch}\,u\cos v\sin\alpha_{N-1}\cos\alpha_{N-2},\\
&\ \vdots\\
x_{N-1} &= f\,\mathrm{ch}\,u\cos v\sin\alpha_{N-1}\dots\sin\alpha_2\cos\alpha_1,\\
x_N &= f\,\mathrm{ch}\,u\cos v\sin\alpha_{N-1}\dots\sin\alpha_2\sin\alpha_1,\\
x_{N+1} &= f\,\mathrm{sh}\,u\sin v\cos\beta_{M-1},\\
x_{N+2} &= f\,\mathrm{sh}\,u\sin v\sin\beta_{M-1}\cos\beta_{M-2},\\
&\ \vdots\\
x_{N+M-1} &= f\,\mathrm{sh}\,u\sin v\sin\beta_{M-1}\dots\sin\beta_2\cos\beta_1,\\
x_{N+M} &= f\,\mathrm{sh}\,u\sin v\sin\beta_{M-1}\dots\sin\beta_2\sin\beta_1.
\end{aligned} \qquad /2.1/$$

Переменные $u, v, \alpha_k, \beta_\ell$ изменяются в пределах:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 = \beta_0 = 0;\quad & 0 \le v < 2\pi, && \text{если } N = M = 1;\\
& 0 \le v < \pi, && \text{если } N = 1,\ M > 1;\\
& -\frac{\pi}{2} \le v < \frac{\pi}{2}, && \text{если } N > 1,\ M = 1;\\
& 0 \le v < \frac{\pi}{2}, && \text{если } N > 1,\ M > 1;
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&0 \le u < \infty;\quad 0 \le \alpha_1 < 2\pi,\quad 0 \le \alpha_k < \pi,\quad k = 2,3,\dots, N-1;\\
&\qquad\qquad\quad\ 0 \le \beta_1 < 2\pi,\quad 0 \le \beta_\ell < \pi,\quad \ell = 2,3,\dots, M-1.
\end{aligned} \qquad /2.2/$$

Поверхности, на которых u или v постоянны, являются в случае $N+M \ge 3$ конфокальными эллипсоидами или гиперболоидами вращения:

$$\frac{(x_1^2+\dots x_N^2)}{f^2\,\mathrm{ch}^2 u} + \frac{(x_{N+1}^2+\dots\ x_{N+M}^2)}{f^2\,\mathrm{sh}^2 u} = 1, \quad \frac{(x_1^2+\dots x_N^2)}{f^2\cos^2 v} - \frac{(x_{N+1}^2+\dots\ x_{N+M}^2)}{f^2\sin^2 v} = 1. \qquad /2.3/$$

В случае $N = M = 1$ эти поверхности вырождаются соответственно в конфокальные эллипсы или гиперболы.

Фокальными поверхностями конфокальных систем /2.3/ при $N \ge 3$ являются сферы

$$x_1^2 + \dots\ x_N^2 = f^2,\quad x_{N+1} = x_{N+2} = \dots\ x_{N+M} = 0. \qquad /2.4/$$

При $N=2$ эти сферы вырождаются в окружности, а при $N=1$ – в точки.

Дифференциал длины дуги $ds^2$ в системах координат /2.1/ имеет вид:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= f^2(\mathrm{ch}^2 u - \cos^2 v)(du^2 + dv^2) + f^2\mathrm{ch}^2 u\cos^2 v\, d\alpha_{N-1}^2 +\\
&+ f^2\mathrm{ch}^2 u\cos^2 v\sin^2\alpha_{N-1} d\alpha_{N-2}^2 + \dots + f^2\mathrm{ch}^2 u\cos^2 v\sin^2\alpha_{N-1}\dots\sin^2\alpha_2\, d\alpha_1^2 +\\
&+ f^2\mathrm{sh}^2 u\sin^2 v\, d\beta_{M-1}^2 + f^2\mathrm{sh}^2 u\sin^2 v\sin^2\beta_{M-1} d\beta_{M-2}^2 + \dots\\
&+ f^2\mathrm{sh}^2 u\sin^2 v\sin^2\beta_{M-1}\dots\sin^2\beta_2\cdot d\beta_1^2.
\end{aligned} \qquad /2.5/$$

Таким образом, системы /2.1/ являются ортогональными системами координат, и, следовательно, при разделении переменных в уравнении /1.1/ можно пользоваться коэффициентами Ламэ. Вычисляя эти коэффициенты и подставляя их в уравнение /1.1/, получаем

$$\begin{aligned}
&\{\frac{1}{(\mathrm{ch}^2 u - \cos^2 v)}[\frac{1}{\mathrm{ch}^{N-1}u\,\mathrm{sh}^{M-1}u}\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{ch}^{N-1}u\,\mathrm{sh}^{M-1}u\frac{\partial}{\partial u} +\\
&+ \frac{1}{\cos^{N-1}v\,\sin^{M-1}v}\frac{\partial}{\partial v}\cos^{N-1}v\,\sin^{M-1}v\frac{\partial}{\partial v}] +
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\mathrm{ch}^2 u\cos^2 v\, H_\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{H_\alpha}{H^2_{\alpha_1}}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_1}+\dots\frac{\partial}{\partial\alpha_{N-1}}\left(\frac{H_\alpha}{H^2_{\alpha_{N-1}}}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_{N-1}}\right]+$$

$$+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 u\sin^2 v\, H_\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(\frac{H_\beta}{H^2_{\beta_1}}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_1}+\dots\frac{\partial}{\partial\beta_{M-1}}\left(\frac{H_\beta}{H^2_{\beta_{M-1}}}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_{M-1}}\right]+f^2k^2]W=0, \qquad /2.6/$$

$$H_{\alpha_k}=\prod_{i=k+1}^{N-1}\sin\alpha_i,\ k=1,\dots,N-2;\ H_\alpha=\prod_{k=1}^{N-1}H_{\alpha_k};\ H_\beta=\prod_{\ell=1}^{M-1}H_{\beta_\ell},\ H_{\beta_\ell}=\prod_{i=\ell+1}^{M-1}\sin\beta_i,\quad \ell=1,\dots,M-2.$$

Представим решение $W=W(u,v,\alpha_1,\dots,\alpha_{N-1},\beta_1,\dots,\beta_{M-1};f^2k^2)$ в виде

$$W=\chi(v)\,Y(u)\,\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_{N-1})\,F(\beta_1,\dots,\beta_{M-1}), \qquad /2.7/$$

где

$$\chi(v)=\chi(v,f^2k^2),\ Y(u)=Y(u,f^2k^2),\ \Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_{N-1})=\prod_{k=1}^{N-1}\Phi_k(\alpha_k),$$
$$F(\beta_1,\dots,\beta_{M-1})=\prod_{\ell=1}^{M-1}F_\ell(\beta_\ell).$$

Переменные $u, v, \alpha_k, \beta_\ell$ в уравнении /2.6/ разделяются, и мы приходим к необходимости решать в области /2.2/ следующую систему уравнений:

$$\left[\frac{1}{\cos^{N-1}v\sin^{M-1}v}\frac{\partial}{\partial v}\cos^{N-1}v\sin^{M-1}v\frac{\partial}{\partial v}-\frac{\nu_{N-1}(\nu_{N-1}+N-2)}{\cos^2 v}-\right. \qquad /2.8а/$$

$$\left.-\frac{\mu_{M-1}(\mu_{M-1}+M-2)}{\sin^2 v}-\frac{c^2}{2}\cos 2v+\kappa\right]\chi(v)=0, \qquad /2.8б/$$

$$\left[\frac{1}{\mathrm{ch}^{N-1}u\,\mathrm{sh}^{M-1}u}\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{ch}^{N-1}u\,\mathrm{sh}^{M-1}u\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\nu_{N-1}(\nu_{N-1}+N-2)}{\mathrm{ch}^2 u}-\right.$$

$$\left.-\frac{\mu_{M-1}(\mu_{M-1}+M-2)}{\mathrm{sh}^2 u}+\frac{c^2}{2}\mathrm{ch}2u-\kappa\right]Y(u)=0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+\nu_1^2\right)\Phi_1(\alpha_1)=0, \qquad /2.8в/$$

$$\left[\frac{1}{\sin^{k-1}\alpha_k}\frac{\partial}{\partial\alpha_k}\sin^{k-1}\alpha_k\frac{\partial}{\partial\alpha_k}-\frac{\nu_{k-1}(\nu_{k-1}+k-2)}{\sin^2\alpha_k}+\nu_k(\nu_k+k-1)\right]\Phi_k(\alpha_k)=0,$$

$$k=2,3,\dots,N-1; \qquad /2.8г/$$



$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta_1^2}+\mu_1^2\right)F_1(\beta_1)=0, \qquad /2.8д/$$

$$\left[\frac{1}{\sin^{\ell-1}\beta_\ell}\frac{\partial}{\partial\beta_\ell}\sin^{\ell-1}\beta_\ell\frac{\partial}{\partial\beta_\ell}-\frac{\mu_{\ell-1}(\mu_{\ell-1}+\ell-2)}{\sin^2\beta_\ell}+\mu_\ell(\mu_\ell+\ell-1)\right]F_\ell(\beta_\ell)=0,$$

$$c^2=f^2k^2;\quad \ell=2,3,\dots,M-1; \qquad /2.8е/$$

где $\kappa,\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_{N-1},\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{M-1}$ - константы, возникающие при разделении переменных. Если $N=1$, то уравнения /2.8в/-/2.8г/ отсутствуют и $\nu_0=0$. Аналогично, если $M=1$, то уравнения /2.8д/-/2.8е/ отсутствуют и $\mu_0=0$.

Константы

$$A_N=-\nu_{N-1}(\nu_{N-1}+N-2),\quad B_M=-\mu_{M-1}(\mu_{M-1}+M-2) \qquad /2.9/$$

представляют собой соответственно собственные значения оператора Лапласа на единичных сферах $S^{N-1}$ и $S^{M-1}$/при $N,M>2$/ или на единичных окружностях /при $N,M=2$/. Если $\nu_1,\dots,\nu_{N-1}$, $\mu_1,\dots,\mu_{M-1}$ - целые неотрицательные числа и $\nu_1\le\nu_2\le\dots\nu_{N-1}$, $\mu_1\le\mu_2\le\dots\mu_{M-1}$, то решения уравнений /2.8в/-/2.8е/ непрерывны и однозначны на этих сферах или окружностях и имеют вид [25,26]

$$\Phi(\alpha_1)=\exp(\pm i\nu_1\alpha_1),\quad N=2; \qquad /2.10а/$$

$$\Phi(\alpha_1,\dots,\alpha_{N-1})=\exp(\pm i\nu_1\alpha_1)\prod_{k=2}^{N-1}\sin^{\nu_{k-1}}\alpha_k\,C^{\nu_{k-1}+\frac{k-1}{2}}_{\nu_k-\nu_{k-1}}(\cos\alpha),\ N>2 \qquad /2.10б/$$

$$F(\beta_1)=\exp(\pm i\mu_1\beta_1),\quad M=2; \qquad /2.10в/$$

$$F(\beta_1,\dots,\beta_{M-1})=\exp(\pm i\mu_1\beta_1)\prod_{\ell=2}^{M-1}\sin^{\mu_{\ell-1}}\beta_\ell\,C^{\mu_{\ell-1}+\frac{\ell-1}{2}}_{\mu_\ell-\mu_{\ell-1}}(\cos\beta_\ell),\ M>2. \qquad /2.10г/$$

Здесь $C^\nu_n(\cos\alpha_k)$, $C^\mu_m(\cos\beta_\ell)$ - полиномы Гегенбауэра[27].

Представим решения уравнений /2.8а/-/2.8б/ в виде

$$\chi(v)=(\cos v)^{\nu_{N-1}}(\sin v)^{\mu_{M-1}}V,\ Y(u)=(\mathrm{ch}\,u)^{\nu_{N-1}}(\mathrm{sh}\,u)^{\mu_{M-1}}U. \qquad /2.11/$$

Функции $V=V(v,c^2)$, $U=U(u,c^2)$ удовлетворяют уравнениям

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial v^2}+\frac{2(\mu-\nu+(\nu+\mu+1)\cos 2v)}{\sin 2v}\frac{\partial}{\partial v}-2q\cos 2v+\lambda\right]V=0, \qquad /2.12а/$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{2(\mu-\nu+(\nu+\mu+1)\,\mathrm{ch}\,2u)}{\mathrm{sh}\,2u}\frac{\partial}{\partial u}+2q\,\mathrm{ch}\,2u-\lambda\right]U=0, \qquad /2.12б/$$

в которых

$$\nu = \nu_{N-1} + \frac{N-2}{2}, \quad \mu = \mu_{M-1} + \frac{M-2}{2}, \quad q = \frac{c^2}{4}, \quad \lambda = \kappa - (\nu+\mu+2)^2 + \frac{(N+M)^2}{4}.$$

Уравнения /2.12/ инвариантны относительно одновременной замены

$$\nu \leftrightarrow \mu, \quad q \to -q, \quad v \to -v + \frac{\pi}{2}, \quad u \to u + \frac{i\pi}{2},$$

а также относительно замены $\nu \to -\nu$, $\lambda \to \lambda + 4\nu(\mu+1)$, $V \to (\cos v)^{2\nu} V$, $U \to (\mathrm{ch}\, u)^{2\nu} U$ и замены $\mu \to -\mu$, $\lambda \to \lambda + 4\mu(\nu+1)$, $V \to (\sin v)^{2\mu} V$, $U \to (\mathrm{sh}\, u)^{2\mu} U$.

В случае $\nu = \pm 1/2$, $\mu = \pm 1/2$ уравнения /2.12/ сводятся к уравнениям Матье /17, 18/, в случае $\nu = \pm 1/2$ или $\mu = \pm 1/2$ – к уравнениям для сфероидальных функций /5,8,18-22/, в случае $\mu = 0$ – к уравнениям для гиперсфероидальных /или обобщенных сфероидальных/ функций /11,13,23,24/, в случае $\nu = \mu = m = 0,1,2\dots$ – к уравнениям для угловой и радиальной волновых функций водородоподобного атома с энергией $E = 0$ в сфероидальной системе координат, в случае $q = 0$ – к гипергеометрическому уравнению /18/, в случае $\nu = 1$, $\lambda = -4(\mu+1) - 2q$ или $\mu = 1$, $\lambda = -4(\nu+1) + 2q$ – к уравнению Бесселя /30/. Если в /2.12/ перейти к переменным $x = 2\sqrt{q}\cos v$, $y = 2\sqrt{q}\,\mathrm{ch}\, u$, то полученные уравнения при $q=0$ также сводятся к уравнению Бесселя. Если $\nu = 1$, $\mu = m = 1,2\dots$, то /2.12б/ с помощью замены $x = \mathrm{sh}\, u$, $f = x^m(x^2+1)U$ переходит в уравнение, предложенное А.Т.Филипповым в модели составных мезонов /1,2/.

При $q \neq 0$ и произвольных значениях $\nu, \mu$ уравнения /2.12/ в литературе не рассматривались /насколько известно автору/. Перейдем к их решению.

## 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ /2.12/

Уравнение /2.12а/ представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с коэффициентами, являющимися мероморфными периодическими функциями с общим периодом $\pi$. Теория такого типа уравнений была развита в работе Флоке /28/. Согласно этой теории /29/ существует по крайней мере одно решение /2.12а/, имеющее вид

$$V = e^{\sigma v}\, S(v), \qquad /3.1/$$

где $S(v)$ – периодическая функция с периодом $\pi$, $\sigma$ – комплексное число, называемое обычно характеристическим показателем. Величины $\sigma, \nu, \mu, q, \lambda$ связаны между собой функциональной зависимостью.

В случае, когда вещественная часть $\sigma$ не равна нулю, решение $V \to \infty$ при $|v| \to \infty$ и называется неустойчивым /или нестабильным/ /29/.

Если $\sigma$ – чисто мнимое число ($\sigma = i\alpha$), решение $V$ остается конечным при всех вещественных $v$ и называется устойчивым /или стабильным/. При этом, если $\sigma$ – целое чисто мнимое четное число ($\sigma = 2in$), решение $V$ периодично с периодом $\pi$.



Найдем аналитический вид ограниченных при всех вещественных $v$ и периодических с периодом $\pi$ решений уравнения /2.12а/ в случае $\nu, \mu > -1$. Назовем такие решения полисфероидальными периодическими функциями и обозначим через $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$. Соответствующие им решения уравнения /2.12б/, являющиеся аналитическим продолжением $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$ в область чисто мнимых значений $v = iu$, назовем модифицированными полисфероидальными периодическими функциями и обозначим через $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$.

В дальнейшем все устойчивые решения уравнения /2.12а/ и соответствующие им решения уравнения /2.12б/ будем называть полисфероидальными функциями. В зависимости от $\alpha$ они будут функциями целого порядка /$|\alpha| = 0,1,2\dots$/ или дробного /$|\alpha| \neq 0,1,2\dots$/.

Рассмотрим случай $q = 0$, $\nu > -1$, $\mu > -1$. Ограниченные при всех вещественных $v$ и периодические с периодом $\pi$ решения /2.12а/ в этом случае существуют лишь при определенных значениях константы $\lambda$, равных

$$\lambda = \lambda_n^{(\nu,\mu)}(0) = 4n(n+\nu+\mu+1), \quad n = 0,1,2,\dots .$$

Такие решения выражаются через полиномы Якоби /27/

$$ps_n^{(\nu,\mu)}(v,0) = \mathrm{const}\cdot P_n^{(\nu,\mu)}(-\cos 2v). \qquad /3.2/$$

Функция $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,0)$ имеет $n$ нулей на интервале $0 < v < \frac{\pi}{2}$. При $q \neq 0$ число нулей функции $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$ на этом интервале не меняется. Действительно, если бы это число изменялось с изменением $q$, то можно было бы найти такое $q \neq 0$, при котором $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$ имела бы двойной нуль в некоторой точке $v = v_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$. Но при этом производная $\left(\frac{\partial}{\partial v} ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)\right)_{v=v_0}$ также была бы равна нулю, а следовательно, с учетом уравнения /2.12а/ $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$ тождественно была бы равна нулю.

В случае $q \neq 0$, $\nu > -1$, $\mu > -1$ значения $\lambda$, при которых уравнение /2.12а/ имеет ограниченные и периодические с периодом $\pi$ решения, также не являются произвольными, а зависят от $\nu, \mu, q, n$.

Обозначим эти значения через $\lambda_n^{(\nu,\mu)}(q)$. Для нахождения $\lambda_n^{(\nu,\mu)}(q)$ и функций $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$, $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$ воспользуемся связью между решениями уравнения /1.1/ в полисферических и полисфероидальных координатах. Так как зависимость от размерностей $N, M$ не входит явным образом в параметры уравнений /2.12/, ограничимся при этом случаем четырехмерного евклидова пространства $E_4$ при $N = M = 2$.

Декартовы координаты $x_1, x_2, x_3, x_4$, полисфероидальные координаты $u, v, \alpha_1, \beta_1$ и полисферические /бисферические в данном случае/ координаты $R, \theta, \alpha_1, \beta_1$ связаны между собой соотношениями:

$$x_1 = f\,\mathrm{ch}\,u\cos v\sin\alpha_1 = R\cos\theta\sin\alpha_1,$$

$$x_2 = f\,\mathrm{ch}\,u\cos v\cos\alpha_1 = R\cos\theta\cos\alpha_1,$$

$$x_3 = f\,\mathrm{sh}\,u\sin v\sin\beta_1 = R\sin\theta\sin\beta_1, \qquad /3.3/$$

$$x_4 = f\,\mathrm{sh}\,u\sin v\cos\beta_1 = R\sin\theta\cos\beta_1,$$

$$0 \le u < \infty,\ 0 \le v \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \alpha_1 < 2\pi,\ 0 \le \beta_1 < 2\pi,\ 0 \le R < \infty,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Полагая $z = f\,\mathrm{ch}\,u$, имеем

$$R = \sqrt{z^2 + f^2\cos^2 v - f^2}, \quad \cos\theta = \frac{z\cos v}{\sqrt{z^2 + f^2\cos^2 v - f^2}}. \qquad /3.4/$$

Если $f \to 0$, то $R \to z$, $\cos\theta \to \cos v$ и, следовательно, полисфероидальная и полисферическая системы совпадают между собой в пределе $f = 0$.

Разделение переменных в /1.1/ в полисферической системе координат $R, \theta, \alpha_1, \beta_1$ приводит к уравнениям

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\nu^2}{\cos^2\theta} - \frac{\mu^2}{\sin^2\theta} + A\right]\phi(\theta) = 0, \qquad /3.5а/$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{3}{R}\frac{\partial}{\partial R} - \frac{A}{R^2} + k^2\right]G(R) = 0, \qquad /3.5б/$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2} + \nu^2\right]\Phi(\alpha_1) = 0, \qquad /.35в/$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta_1^2} + \mu^2\right]F(\beta_1) = 0, \qquad /3.5г/$$

$$0 \le \theta < \frac{\pi}{2},\ 0 \le R < \infty,\ 0 \le \alpha_1 < 2\pi,\ 0 \le \beta_1 < 2\pi,$$

где $A, \nu, \mu$ – константы разделения.

Если

$$A = (\nu + \mu + 2r)(\nu + \mu + 2r + 2),\quad \nu \ge 0,\ \mu \ge 0,\ r = 0,1,2,\dots, \qquad /3.6/$$

то ограниченные в области $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le R < \infty$, $0 \le \alpha_1 < 2\pi$, $0 \le \beta_1 < 2\pi$ решения системы уравнений /3.5/ имеют вид

$$W_r(R, \theta, \alpha_1, \beta_1, k) =$$

$$= (\cos\theta)^\nu (\sin\theta)^\mu P_r^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\theta)\frac{J_{\nu+\mu+2r+1}(kR)}{kR}\, e^{\pm i\nu\alpha_1 \pm i\mu\beta_1}, \qquad /3.7/$$



где $P_r^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\theta)$ – полиномы Якоби, $J_{\nu+\mu+2r+1}(kR)$ – функция Бесселя первого рода.

Поскольку функции /3.7/ и функции

$$W_r(u, v, \alpha_1, \beta_1; 4q) =$$

$$= (\cos v)^\nu (\sin v)^\mu ps_n^{(\nu,\mu)}(v, q)(\mathrm{ch}\,u)^\nu(\mathrm{sh}\,u)^\mu Ps_n^{(\nu,\mu)}(u, q)\, e^{\pm i\nu\alpha_1 \pm i\mu\beta_1} \qquad /3.8/$$

являются решениями одного и того же уравнения /1.1/, они связаны между собой с помощью разложения

$$W_n(u, v, \alpha_1, \beta_1; 4q) = \frac{\kappa_n^{(\nu,\mu)}}{c^{\nu+\mu}}\sum_{r=0}^{\infty} A_{r,n}^{(\nu,\mu)} W_r(R, \theta, \alpha_1, \beta_1; k). \qquad /3.9/$$

Здесь

$$\kappa_n^{(\nu,\mu)} = \kappa_n^{(\nu,\mu)}(q),\quad A_{r,n}^{(\nu,\mu)} = A_{r,n}^{(\nu,\mu)}(q),\quad c = kf,\quad q = \frac{c^2}{4}.$$

Сокращая одинаковые множители с обеих сторон равенства /3.9/, имеем

$$Ps_n^{(\nu,\mu)}(u, q)\, ps_n^{(\nu,\mu)}(v, q) =$$

$$= \frac{\kappa_n^{(\nu,\mu)}}{(kR)^{\nu+\mu+1}}\sum_{r=0}^{\infty} A_{r,n}^{(\nu,\mu)} P_r^{(\nu,\mu)}(-\cos 2\theta)\, J_{\nu+\mu+2r+1}(kR). \qquad /3.10/$$

Подставим разложение /3.10/ в уравнения /2.12/ и используем соотношения /3.4/ и рекуррентные формулы для полиномов Якоби и функций Бесселя. Получаем

$$\alpha_r A_{r+1,n}^{(\nu,\mu)} + \beta_r A_{r,n}^{(\nu,\mu)} + \gamma_r A_{r-1,n}^{(\nu,\mu)} = 0,\quad A_{-1,n}^{(\nu,\mu)} = 0,\quad r = 0,1,2,\dots, \qquad /3.11/$$

где

$$\alpha_r = -\frac{4q(r+\nu+1)(r+\mu+1)}{(2r+\nu+\mu+2)(2r+\nu+\mu+3)},\quad r = 0,1,2,\dots,$$

$$\beta_0 = \lambda_n^{(\nu,\mu)}(q) - \frac{2q(\nu-\mu)}{(\nu+\mu+2)},$$

$$\beta_r = \lambda_n^{(\nu,\mu)}(q) - 4r(r+\nu+\mu+1) - \frac{2q(\nu^2-\mu^2)}{(\nu+\mu+2r)(\nu+\mu+2r+2)},\quad r = 1,2,\dots,$$

$$\gamma_r = -\frac{4rq(r+\nu+\mu)}{(2r+\nu+\mu)(2r+\nu+\mu-1)}, \quad r=2,3,\ldots,$$

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = -\frac{4q}{(\nu+\mu+2)}.$$

Разделим равенство /3.11/ на $A^{(\nu,\mu)}_{r,n}$ и введем $v_r = \left(\frac{A^{(\nu,\mu)}_{r,n}}{A^{(\nu,\mu)}_{r-1,n}}\right)$.

Получаем

$$\gamma_r / v_r + \alpha_r v_{r+1} = -\beta_r, \quad r = 1,2,\ldots \qquad /3.12/$$

Если $r\to\infty$, то $\gamma_r/v_r + \alpha_r v_{r+1} \to \infty$ и, следовательно, одно из решений уравнения /3.12/ при $r\to\infty$ стремится к нулю, другое - к бесконечности. Если выбрать первое решение, то из уравнения /3.12/ и из асимптотических формул для функций Бесселя[30] следует, что для любых фиксированных (kr) при $r\to\infty$

$$\left|\frac{A^{(\nu,\mu)}_{r,n}}{A^{(\nu,\mu)}_{r-1,n}} \cdot \frac{J_{\nu+\mu+2r+1}(kR)}{J_{\nu+\mu+2r-1}(kR)} \frac{\binom{r+\delta}{r}}{\binom{r+\delta-1}{r-1}}\right| \to \qquad /3.13/$$

$$\to \frac{|q(kR)^2|}{4(2r+\nu+\mu)^2(2r+\nu+\mu+1)(2r+\nu+\mu-1)},$$

где

$$\delta = \max(\nu,\mu), \quad \binom{r+\delta}{r} = \frac{\Gamma(r+\delta+1)}{r!\,\Gamma(\delta+1)}.$$

Так как при этом[27]

$$|P^{(\nu,\mu)}_r(-\cos 2\theta)| / \binom{r+\delta}{r} \le 1, \quad r=1,2,\ldots, \quad 0\le\theta\le\pi, \ \nu>-1, \ \mu>-1,$$

то, следовательно, ряд /3.10/ абсолютно сходится в области $0\le R<\infty$, $0\le\theta<\pi$, $\nu,\mu>-1$, $|q|<\infty$.

Значения $\lambda^{(\nu,\mu)}_n(q)$, при которых ряд /3.10/ сходится, можно вычислить аналогично тому, как вычисляются соответствующие значения констант разделения в теории сфероидальных функций и функций Матье[5,17-19]. Для этого введем

$$M_r = (A^{(\nu,\mu)}_{r,n}/A^{(\nu,\mu)}_{r-1,n})\,\alpha_{r-1}, \quad a_r = -\gamma_r\,\alpha_{r-1}, \quad b_r = \beta_r, \quad r=1,2,\ldots \qquad /3.14/$$

Используя соотношения /3.11/, имеем

$$M_{n+1} = a_{n+1}/(b_{n+1}+M_{n+2}), \qquad n=0,1,2,\ldots \qquad /3.15а/$$



$$M_{n+1} = -b_n + \begin{cases} 0, & \text{если } n=0, \\ a_n/M_n, & \text{если } n=1,2,\ldots \end{cases} \qquad /3.15б/$$

Вычитая /3.15б/ из /3.15а/, получаем трансцендентное уравнение для собственных значений $\lambda^{(\nu,\mu)}_n(q)$:

$$b_n + \cfrac{a_{n+1}}{b_{n+1} + \cfrac{a_{n+2}}{b_{n+2} + \cfrac{a_{n+3}}{b_{n+3}+\ldots}}} - \cfrac{a_n}{-b_{n-1} + \cfrac{a_{n-1}}{-b_{n-2} + \cfrac{a_{n-2}}{\ldots + \cfrac{a_1}{-b_0}}}} = 0,$$

$$n = 0,1,2,\ldots \qquad /3.16/$$

Выражение /3.16/ представляет собой n раз обернутую цепную дробь. Поскольку коэффициенты $A^{(\nu,\mu)}_{r,n}$ соответствуют минимальному сходящемуся при $r\to\infty$ решению конечно-разностного уравнения /3.11/, то согласно[31] дробь /3.16/ сходится. Разлагая эту дробь в области малых q по степеням q и приравнивая члены с одинаковыми степенями q, найдем $\lambda^{(\nu,\mu)}_n(q)$ при $q\to 0$.

Полученная таким способом асимптотика $\lambda^{(\nu,\mu)}_n(q)$ при малых q вплоть до членов $0(q^5)$ приведена в работе[32]. Минимизируя на ЭВМ абсолютное значение дроби /3.16/, найдем необходимые величины $\lambda^{(\nu,\mu)}_n(q)$ при всех $0<q^2<\infty$. Подробно алгоритм вычисления $\lambda^{(\nu,\mu)}_n(q)$ на ЭВМ и соответствующие численные результаты представлены в работе[33].

Из разложения /3.10/ при u =0 следует

$$ps^{(\nu,\mu)}_n(v,q) = \frac{\kappa^{(\nu,\mu)}_n}{Ps^{(\nu,\mu)}(0,q)(c\cdot\cos v)^{\nu+\mu+1}} \times \qquad /3.17/$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} B^{(\nu,\mu)}_{r,n} J_{\nu+\mu+2r+1}(c\cdot\cos v),$$

где

$$B^{(\nu,\mu)}_{r,n} = A^{(\nu,\mu)}_{r,n} P^{(\nu,\mu)}_r(-1) = (-1)^r A^{(\nu,\mu)}_{r,n} \frac{\Gamma(r+\mu+1)}{r!\,\Gamma(\mu+1)}.$$

Полагая $v=\frac{\pi}{2}$ в /3.17/, получаем

$$\kappa^{(\nu,\mu)}_n(q) = (ps^{(\nu,\mu)}_n(\tfrac{\pi}{2},q)\,Ps^{(\nu,\mu)}_n(0,q)\,2^{\nu+\mu+1}\Gamma(\nu+\mu+2))/A^{(\nu,\mu)}_{0,n}. \qquad /3.18/$$

Разложение /3.10/ дает при v =0:

$$Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)=\frac{\kappa_n^{(\nu,\mu)}}{ps_n^{(\nu,\mu)}(0,q)(c\cdot ch\,u)^{\nu+\mu+1}}\sum_{r=0}^{\infty}B_{r,n}^{(\nu,\mu)}J_{\nu+\mu+2r+1}(c\cdot ch\,u) \qquad /3.19/$$

и при $v=\pi/2$:

$$Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)=\frac{\kappa_n^{(\nu,\mu)}}{ps_n^{(\nu,\mu)}(\frac{\pi}{2},q)(c\cdot sh\,u)^{\nu+\mu+1}}\times \qquad /3.20/$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r B_{r,n}^{(\nu,\mu)}\frac{\Gamma(r+\nu+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(r+\mu+1)\Gamma(\nu+1)}J_{\nu+\mu+2r+1}(c\cdot sh\,u).$$

В пределе $u\to\infty$ из /3.19/ имеем

$$Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)\underset{u\to\infty}{}=\frac{\kappa_n^{(\nu,\mu)}}{ps_n^{(\nu,\mu)}(0,q)}\sqrt{\frac{2}{\pi c\cdot ch\,u}}\cdot\frac{\cos(c\cdot ch\,u-(\nu+\mu+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}{(c\cdot ch\,u)^{\nu+\mu+1}}\times \qquad /3.21/$$

$$\times\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r B_{r,n}^{(\nu,\mu)}.$$

Полагая $u\to\infty$ в /3.10/ и используя /3.21/, получаем

$$ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{r,n}^{(\nu,\mu)}P_r^{(\nu,\mu)}(-\cos 2v). \qquad /3.22/$$

Отметим некоторые основные свойства функций $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$, $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$, следующие из полученных выше разложений и из уравнений /2.12/.

## 4. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$, $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$

1. Из разложений /3.17/, /3.22/ следует, что функция $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$ ограничена в особых точках $v=\ell\frac{\pi}{2}$, где $\ell=0,1,2...$, и имеет в этих точках ограниченные производные. Так как в силу уравнения /2.12a/ других особых точек, кроме $v=\pm i\infty$, эта функция не имеет, следовательно, она является целой функцией переменной v.

2. Из разложений /3.17/, /3.22/ следует, что функция $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$ ограничена при всех вещественных v, реальна и периодична с периодом $\pi$.

3. Функция $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$ имеет n нулей на интервале $0<v<\frac{\pi}{2}$ и не равна нулю в точках $v=\ell\frac{\pi}{2}$, где $\ell=0,1,2...$ . Если бы эта функция равнялась нулю в какой-либо из названных точек, то в силу уравнения /2.12a/ ее первая производная по v и все последующие также были бы равны нулю в этих точках и, следовательно, сама функция $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$ тождественно была бы равна нулю.

4. Функция $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$ является четной функцией переменной v. Она имеет также n нулей на интервале $-\frac{\pi}{2}<v<0$ и не равна нулю в точках $v=-\ell\frac{\pi}{2}$, где $\ell=1,2...$ .

5. Функции $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$, $ps_m^{(\nu,\mu)}(v,q)$ удовлетворяют соотношению ортогональности:

$$\int_0^{\pi/2}(\cos v)^{2\nu+1}(\sin v)^{2\mu+1}ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)ps_m^{(\nu,\mu)}(v,q)dv=N_n\delta_{nm}, \qquad /4.1/$$

где $N_n$ - нормировочная постоянная.

Умножим уравнение /2.12a/ для функции $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$ на $(\cos v)^{2\nu+1}(\sin v)^{2\mu+1}ps_m^{(\nu,\mu)}(v,q)$, а соответствующее уравнение для $ps_m^{(\nu,\mu)}(v,q)$ - на $(\cos v)^{2\nu+1}(\sin v)^{2\mu+1}ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$ и вычтем одно выражение из другого. После интегрирования по частям получаем

$$\left[(\cos v)^{2\nu+1}(\sin v)^{2\mu+1}\left(ps_m^{(\nu,\mu)}(v,q)\frac{\partial}{\partial v}ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)-ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)\frac{\partial}{\partial v}ps_m^{(\nu,\mu)}(v,q)\right)\right]\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=(\lambda_m^{(\nu,\mu)}(q)-\lambda_n^{(\nu,\mu)}(q))\int_0^{\pi/2}(\cos v)^{2\nu+1}(\sin v)^{2\mu+1}ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)ps_m^{(\nu,\mu)}(v,q)\,dv. \qquad /4.2/$$

Из разложений /3.17/, /3.22/ следует, что $\frac{\partial}{\partial v}ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)=C_n(v)\cdot\sin 2v$, где $|C_n(v)|<\infty$, $v\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $n=0,1,2$ ... . Следовательно, в случае $\nu,\mu>-1$ левая часть соотношения /4.2/ равна нулю.

Положим $N_n=1$. Подставляя разложение /3.22/ в /4.1/ и используя соотношения ортогональности для полиномов Якоби[27], получаем при $n=m$:

$$\sum_{r=0}^{\infty}(A_{r,n}^{(\nu,\mu)})^2\frac{\Gamma(\nu+r+1)\Gamma(\mu+r+1)}{2(r!)(\nu+\mu+2r+1)\Gamma(\nu+\mu+r+1)}=1. \qquad /4.3/$$

6. Функции $V=ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$ являются решениями задачи Штурма-Лиувилля:

$$\left[\frac{\partial}{\partial v}p\frac{\partial}{\partial v}+r+p\lambda_n^{(\nu,\mu)}(q)\right]V=0,\quad \left(pV\frac{\partial}{\partial v}V\right)_{v=0}=\left(pV\frac{\partial}{\partial v}V\right)_{v=\frac{\pi}{2}}=0, \qquad /4.4/$$

$$p=(\cos v)^{2\nu+1}\cdot(\sin v)^{2\mu+1},\quad r=-2qp\cos 2v.$$

Следовательно[15,29] функции $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$ образуют полную ортонормированную систему в классе квадратично-интегрируемых функций с весовым множителем p на интервале $[0, \frac{\pi}{2}]$. Собственные значения $\lambda_n^{(\nu,\mu)}(q)$ при этом образуют возрастающую последовательность:

$$\lambda_0^{(\nu,\mu)}(q)<\lambda_1^{(\nu,\mu)}(q)<\lambda_2^{(\nu,\mu)}(q)<\dots;\quad \lambda_n^{(\nu,\mu)}(q)\underset{n\to\infty}{\to}\infty.$$

7. Если выбрать нормировку функции $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$ таким образом, чтобы $Ps_n^{(\nu,\mu)}(0,q)=ps_n^{(\nu,\mu)}(0,q)$, то из разложений /3.17/ и /3.19/ следует, что функция $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$ осуществляет аналитическое продолжение функции $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$ в область чисто мнимых значений $v=iu$.

8. Функции $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$, $Ps_m^{(\nu,\mu)}(u,q)$ удовлетворяют соотношению ортогональности:

$$\int_0^\infty(\mathrm{ch}\,u)^{2\nu+1}(\mathrm{sh}\,u)^{2\mu+1}\,Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)Ps_m^{(\nu,\mu)}(u,q)du=0,\quad n\neq m. \qquad /4.5/$$

Умножим уравнение /2.12б/ для функции $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$ на $(\mathrm{ch}\,u)^{2\nu+1}(\mathrm{sh}\,u)^{2\mu+1}Ps_m^{(\nu,\mu)}(u,q)$, а соответствующее уравнение для $Ps_m^{(\nu,\mu)}(u,q)$ на $(\mathrm{ch}\,u)^{2\nu+1}(\mathrm{sh}\,u)^{2\mu+1}Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$ и вычтем одно выражение из другого. После интегрирования по частям имеем

$$\left[(\mathrm{ch}\,u)^{2\nu+1}(\mathrm{sh}\,u)^{2\mu+1}\left(Ps_m^{(\nu,\mu)}(u,q)\frac{\partial}{\partial u}Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)-Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)\frac{\partial}{\partial u}Ps_m^{(\nu,\mu)}(u,q)\right)\right]\Big|_0^\infty=$$

$$=(\lambda_n^{(\nu,\mu)}(q)-\lambda_m^{(\nu,\mu)}(q))\int_0^\infty(\mathrm{ch}\,u)^{2\nu+1}(\mathrm{sh}\,u)^{2\mu+1}Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)Ps_m^{(\nu,\mu)}(u,q)du. \qquad /4.6/$$

Из разложения /3.19/ следует, что $\frac{\partial}{\partial u}Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)=$ $=-C_n(u)\,\mathrm{sh}\,2u$, где $|C_n(0)|<\infty$, $n=0,1,2,\dots$

Таким образом, левая часть /4.6/ равна нулю при $u=0$, $\nu>-1$, $\mu>-1$.

Используя асимптотику /3.21/, получаем, что левая часть /4.6/ равна нулю также при $u=\infty$. Следовательно, соотношение /4.5/ справедливо.

9. Из соотношений /3.11/, /4.3/ следует

$$\lambda_n^{(\nu,\mu)}(-q)=\lambda_n^{(\mu,\nu)}(q),\quad A_{r,n}^{(\nu,\mu)}(-q)=(-1)^r A_{r,n}^{(\mu,\nu)}(q). \qquad /4.7/$$

Так как $P_r^{(\nu,\mu)}(-\cos 2v)=(-1)^r P_r^{(\mu,\nu)}(-\cos(\pi-2v))$, то с учетом этих равенств и разложений /3.17/, /3.19/, /3.22/ получаем

$$ps_n^{(\nu,\mu)}(v,-q)=(-1)^n ps_n^{(\mu,\nu)}(-v+\frac{\pi}{2},q)=(-1)^n\sum_{r=0}^\infty(-1)^r A_r^{(\mu,\nu)}P_r^{(\mu,\nu)}(\cos 2v)=$$



$$=\frac{(-1)^n\kappa_n^{(\mu,\nu)}(q)}{ps_n^{(\mu,\nu)}(0,q)(c\cdot\sin v)^{\nu+\mu+1}}\sum_{r=0}^\infty B_{r,n}^{(\mu,\nu)}J_{\nu+\mu+2r+1}(c\cdot\sin v),$$

$$Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,-q)=ps_n^{(\nu,\mu)}(iu,-q)= \qquad /4.8б/$$

$$=\frac{(-1)^n\kappa_n^{(\mu,\nu)}(q)}{ps_n^{(\mu,\nu)}(0,q)(c\cdot\mathrm{sh}\,u)^{\nu+\mu+1}}\sum_{r=0}^\infty(-1)^n B_{r,n}^{(\mu,\nu)}I_{\nu+\mu+2r+1}(c\cdot\mathrm{sh}\,u),$$

где $I_{\nu+\mu+2r+1}(c\cdot\mathrm{sh}\,u)$ - функция Бесселя мнимого аргумента.

10. Из соотношений /3.11/, /4.3/ следует

$$|A_{r,n}^{(\nu,\mu)}(q)|\underset{q\to0}{\to}0,\ r\neq n;\quad |A_{n,n}^{(\nu,\mu)}(q)|\underset{q\to0}{\to}\left(\frac{2(n!)(\nu+\mu+2n+1)\Gamma(\nu+\mu+n+1)}{\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(\mu+n+1)}\right)^{1/2}. \qquad /4.9/$$

С учетом разложения /3.22/ имеем

$$ps_n^{(\nu,\mu)}(v,0)=A_{n,n}^{(\nu,\mu)}(0)P_n^{(\nu,\mu)}(-\cos 2v). \qquad /4.10/$$

Знак $A_{n,n}^{(\nu,\mu)}(q)$ в дальнейшем выберем так, чтобы $(-1)^n ps_n^{(\nu,\mu)}(\frac{\pi}{2},q)>0$, т.е. $(-1)^n A_{n,n}^{(\nu,\mu)}(0)>0$.

Если величины $x=c\cdot\cos v$, $y=c\cdot\mathrm{ch}\,u$ остаются постоянными при $q\to0$, то из разложений /3.17/, /3.19/ получаем

$$ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)\underset{q\to0}{\to}\frac{\kappa_n^{(\nu,\mu)}}{(-1)^n}\,\frac{J_{\nu+\mu+2n+1}(x)}{x^{\nu+\mu+1}},$$

$$Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)\underset{q\to0}{\to}\frac{\kappa_n^{(\nu,\mu)}}{(-1)^n}\,\frac{J_{\nu+\mu+2n+1}(y)}{y^{\nu+\mu+1}}.$$

Более подробно асимптотические свойства функций $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$, $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$ и их собственных значений $\lambda_n^{(\nu,\mu)}(q)$ при $q\to0$ и $q\to\infty$ рассмотрены в работе[32]. Алгоритм вычисления функций $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$, $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$ на ЭВМ и численные результаты приведены в работе[33].

В ряде приложений наряду с функциями $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$, $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$ удобно рассматривать функцию $PS_n^{(\nu,\mu)}(\eta,c)$, определяемую следующим образом:

$$PS_n^{(\nu,\mu)}(\eta,c)=\begin{cases}ps_n^{(\nu,\mu)}(v,\frac{c^2}{4}),\ \eta=\cos v, & -1\le\eta\le1,\\ Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,\frac{c^2}{4}),\ \eta=\mathrm{ch}\,u, & 1\le\eta<\infty.\end{cases} \qquad /4.11/$$

Функция $PS_n^{(\nu,\mu)}(\eta,c)$ удовлетворяет уравнению

$$[(1-\eta^2)\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{((2\nu+1)-(2\nu+2\mu+3)\eta^2)}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}-c^2(\eta^2-\frac{1}{2})+\lambda_n^{(\nu,\mu)}(\frac{c^2}{4})]PS_n^{(\nu,\mu)}(\eta,c)=0,$$

которое имеет три регулярные особые точки /0, $\pm 1$/ и одну нерегулярную /$\infty$/. С учетом свойств 1-9 функций $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$, $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$ получаем, что функция $PS_n^{(\nu,\mu)}(\eta,c)$ является целой четной функцией переменной $\eta$, реальна, имеет n нулей на интервале $0<\eta<1$, не равна нулю в точках $\eta=0\pm1$. Эта функция обладает свойством двойной ортогональности с весом $\eta^{2\nu+1}(1-\eta^2)^{\mu}$ на интервалах $[0,1]$ и $[1,\infty)$. В случае чисто мнимых c она равна

$$PS_n^{(\nu,\mu)}(\eta,-ic)=(-1)^n PS_n^{(\mu,\nu)}(\sqrt{1-\eta^2},c),$$

$$PS_n^{(\nu,\mu)}(i\eta,-ic)=(-1)^n PS_n^{(\mu,\nu)}(\sqrt{1+\eta^2},c). \qquad /4.13/$$

Заметим, что соотношения /4.13/ являются отличительной особенностью функций $PS_n^{(\nu,\mu)}(\eta,c)$. Напомним, что в случае сфероидальных и гиперсфероидальных функций замена $c\to\mp ic$ приводит к существенному изменению типа функций /например, вытянутые сфероидальные функции переходят в сплюснутые сфероидальные [5,19,34]/.

## 5. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ФУНКЦИЙ $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$, $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$

При частных значениях параметров функции $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$, $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$ /или, эквивалентно, $PS_n^{(\nu,\mu)}(\eta,c)$ / выражаются через известные специальные функции.

В случае $\mu=0$ имеем

$$PS_n^{(\nu,0)}(\eta,c)=\frac{(-1)^n\phi_{\nu,n}(\eta)}{\eta^{\nu+1/2}},\ \lambda_n^{(\nu,0)}(\frac{c^2}{4})=\chi_{\nu,n}(c)-\frac{c^2}{2}-(\nu+\frac{1}{2})(\nu+\frac{3}{2}). \qquad /5.1/$$

Здесь $\phi_{\nu,n}(\eta)$ - гиперсфероидальные /или обобщенные сфероидальные/ функции [23,24], нормированные условиями

$$\int_0^1\phi^2_{\nu,n}(\eta)\,d\eta=1,\qquad (-1)^n\phi_{\nu,n}(1)>0.$$

$\chi_{\nu,n}(c)$ - собственные значения этих функций.

Если $\nu=\pm1/2$ или $\mu=\pm1/2$, получаем

$$PS_n^{(-\frac{1}{2},\mu)}(\eta,c)=(\sqrt{2}/\Lambda_{\mu,2n}(c))\Psi_{\mu,2n}(c,\eta),\ \lambda_n^{(-\frac{1}{2},\mu)}(\frac{c^2}{4})=b_{\mu,2n}(c)-\frac{c^2}{2};$$



$$PS_n^{(\frac{1}{2},\mu)}(\eta,c)=(\sqrt{2}/\Lambda_{\mu,2n+1}(c))\frac{\Psi_{\mu,2n+1}(c)}{\eta},$$

$$\lambda_n^{(\frac{1}{2},\mu)}(\frac{c^2}{4})=b_{\mu,2n+1}(c)-\frac{c^2}{2}-2(\mu+1);$$

$$PS_n^{(\nu,-\frac{1}{2})}(\eta,c)=((-1)^n\sqrt{2}/\Lambda_{\nu,2n}(-ic))\Psi_{\nu,2n}(-ic,\sqrt{1-\eta^2}),$$

$$\lambda_n^{(\nu,-\frac{1}{2})}(\frac{c^2}{4})=b_{\nu,2n}(-ic)+\frac{c^2}{2};$$

$$PS_n^{(\nu,\frac{1}{2})}(\eta,c)=((-1)^n\sqrt{2}/\Lambda_{\nu,2n+1}(-ic))\frac{\Psi_{\nu,2n+1}(-ic,\sqrt{1-\eta^2})}{\sqrt{1-\eta^2}}, \qquad /5.2/$$

$$\lambda_n^{(\nu,\frac{1}{2})}(\frac{c^2}{4})=b_{\nu,2n+1}(-ic)-2(\nu+1)+\frac{c^2}{2};$$

где $\Psi_{\mu,n}(c,\eta)$ - сфероидальные функции, рассматриваемые в [20,21], $b_{\mu,n}(c)$ - собственные значения этих функций. Функции $\Psi_{\mu,n}(c,\eta)$, $\Psi_{\mu,n}(-ic,\eta)$ нормированы согласно

$$\int_{-1}^1(1-\eta^2)^{\mu}\Psi^2_{\mu,n}(c,\eta)\,d\eta=\Lambda^2_{\mu,n}(c),\quad \Psi_{\mu,n}(c,1)>0,$$

$$\int_{-1}^1(1-\eta^2)^{\mu}\Psi^2_{\mu,n}(-ic,\eta)\,d\eta=\Lambda^2_{\mu,n}(-ic),\quad \Psi_{\mu,n}(-ic,1)>0.$$

В случае $\nu=\pm1/2$, $\mu=m=0,1,2\ldots$ имеем

$$ps_n^{(-\frac{1}{2},m)}(v,\frac{c^2}{4})=N_{m,m+2n}(c)\cdot\frac{S_{m,m+2n}(c,\cos v)}{\sin^m v},$$

$$Ps_n^{(-\frac{1}{2},m)}(u,\frac{c^2}{4})=k_{m,m+2n}(c)\frac{R_{m,m+2n}(c,\operatorname{ch}u)}{\operatorname{sh}^m u}, \qquad /5,3/$$

$$\lambda_n^{(-\frac{1}{2},m)}(\frac{c^2}{4})=\lambda_{m,m+2n}(c)-\frac{c^2}{2}-m(m+1),$$

$$ps_n^{(\frac{1}{2},m)}(v,\frac{c^2}{4})=N_{m,m+2n+1}(c)\frac{S_{m,m+2n+1}(c,\cos v)}{\cos v\cdot\sin^m v},$$

$$Ps_n^{(\frac{1}{2},m)}(u,\frac{c^2}{4})=k_{m,m+2n+1}(c)\frac{R_{m,m+2n+1}(c,\mathrm{ch}\,u)}{\mathrm{ch}\,u\cdot\mathrm{sh}^m u},$$

$$\lambda_n^{(\frac{1}{2},m)}(\frac{c^2}{4})=\lambda_{m,m+2n+1}(c)-\frac{c^2}{2}-(m+1)(m+2).$$

Здесь $S_{m,\ell}(c,\eta)$, $R_{m,\ell}(c,\xi)$ - соответственно вытянутые угловые и вытянутые радиальные сфероидальные функции [19,34], $\lambda_{m,\ell}(c)$ - собственные значения этих функций. Константы $N_{m,\ell}(c)$, $k_{m,\ell}(c)$ равны

$$N_{m,\ell}(c)=1/\sqrt{\int_0^1 S^2_{m,\ell}(c,\eta)\,d\eta},\quad k_{m,\ell}(c)=N_{m,\ell}(c)\lim_{\eta\to 0}(\frac{S_{m,\ell}(c,\eta)}{R_{m,\ell}(c,\eta)}).$$

В случае $\mu=\pm 1/2$, $\mu=m=0,1,2\ldots$ имеем

$$ps_n^{(m,-1/2)}(v,\frac{c^2}{4})=(-1)^n N_{m,m+2n}(-ic)\frac{S_{m,m+2n}(-ic,\sin v)}{\cos^m v},$$

$$Ps_n^{(m,-1/2)}(u,\frac{c^2}{4})=(-1)^n k_{m,m+2n}(-ic)\frac{R_{m,m+2n}(-ic,i\,\mathrm{sh}\,u)}{\mathrm{ch}^m u},$$

$$\lambda_n^{(m,-1/2)}(\frac{c^2}{4})=\lambda_{m,m+2n}(-ic)-m(m+1)+\frac{c^2}{2}, \qquad /5.4/$$

$$ps_n^{(m,1/2)}(v,\frac{c^2}{4})=(-1)^n N_{m,m+2n+1}(-ic)\frac{S_{m,m+2n+1}(-ic,\sin v)}{\cos^m v\sin v},$$

$$Ps_n^{(m,1/2)}(u,\frac{c^2}{4})=(-1)^n k_{m,m+2n+1}(-ic)\frac{R_{m,m+2n+1}(-ic,i\,\mathrm{sh}\,u)}{\mathrm{ch}^m u\cdot\mathrm{sh}\,u},$$

$$\lambda_n^{(m,1/2)}(\frac{c^2}{4})=\lambda_{m,m+2n+1}(-ic)-(m+1)(m+2)+\frac{c^2}{2},$$

где $S_{m,\ell}(-ic,\eta)$, $R_{m,\ell}(-ic,i\xi)$ - соответственно сплюснутые угловые и сплюснутые радиальные сфероидальные функции [19,34], $\lambda_{m,\ell}(-ic)$ - собственные значения этих функций.

$$N_{m,\ell}(-ic)=1/\sqrt{\int_0^1 S^2_{m,\ell}(-ic,\eta)\,d\eta},$$



$$k_{m,\ell}(-ic)=N_{m,\ell}(-ic)\lim_{\eta\to 0}(\frac{S_{m,\ell}(-ic,\eta)}{R_{m,\ell}(-ic,i\eta)}).$$

При $\nu$, $\mu=\pm 1/2$ получаем

$$ps_n^{(-1/2,-1/2)}(v,q)=2\sqrt{\pi}\,ce_{2n}(v,q),\qquad Ps_n^{(-1/2,-1/2)}(u,q)=2\sqrt{\pi}\,Ce_{2n}(u,q),$$

$$\lambda_n^{(-1/2,-1/2)}(q)=a_{2n}(q),\qquad \lambda_n^{(1/2,-1/2)}(q)=a_{2n+1}(q)-1,$$

$$ps_n^{(1/2,-1/2)}(v,q)=\frac{2\sqrt{\pi}\,ce_{2n+1}(v,q)}{\cos v},\qquad Ps_n^{(1/2,-1/2)}(u,q)=\frac{2\sqrt{\pi}\,Ce_{2n+1}(u,q)}{\mathrm{ch}\,u},$$

$$ps_n^{(-1/2,1/2)}(v,q)=\frac{2\sqrt{\pi}\,se_{2n+1}(v,q)}{\sin v},\qquad Ps_n^{(-1/2,1/2)}(u,q)=\frac{2\sqrt{\pi}\,Se_{2n+1}(u,q)}{\mathrm{sh}\,u},$$

$$\lambda_n^{(-1/2,1/2)}(q)=b_{2n+1}(q)-1,\qquad \lambda_n^{(1/2,1/2)}(q)=b_{2n+2}(q)-4,$$

$$ps_n^{(1/2,1/2)}(v,q)=4\sqrt{\pi}\,\frac{se_{2n+2}(v,q)}{\sin 2v},\qquad Ps_n^{(1/2,1/2)}(u,q)=4\sqrt{\pi}\cdot\frac{Se_{2n+2}(u,q)}{\mathrm{sh}\,2u}.$$

Здесь $ce_n(v,q)$, $se_n(v,q)$ - периодические функции Матье [17,18,34], $Ce_n(u,q)$, $Se_n(u,q)$ - модифицированные функции Матье, $a_n(q)$, $b_n(q)$ - соответствующие этим функциям собственные значения.

Если $\nu=\mu=m=0,1,2\ldots$, имеем

$$ps_n^{(m,m)}(v,q)=\frac{\Xi_{m,n}(\cos 2v,q/2)}{(\sin 2v)^m},\qquad Ps_n^{(m,m)}(u,q)=\frac{\Pi_{m,n}(\mathrm{ch}\,2u,q/2)}{(\mathrm{sh}\,2u)^m},$$

$$\lambda_n^{(m,m)}(q)=4\lambda_{m,n}(q/2)-4m(m+1). \qquad /5.6/$$

Функции $\Xi_{m,n}(\eta,q/2)$, $\Pi_{m,n}(\xi,q/2)$ удовлетворяют уравнениям

$$[(1-\eta^2)\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}-2\eta\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{q}{2}\eta+\lambda_{m,n}(q/2)-\frac{m^2}{1-\eta^2}]\,\Xi_{m,n}(\eta,q/2)=0, \qquad /5.7а/$$

$$[(\xi^2-1)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{q}{2}\xi-\lambda_{m,n}(q/2)-\frac{m^2}{\xi^2-1}]\,\Pi_{m,n}(\xi,q/2)=0, \qquad /5.7б/$$

$$|\Xi_{m,n}(\pm 1,q/2)|<\infty, \quad |\Pi_{m,n}(1,q/2)|<\infty, \quad |\Pi_{m,n}(\infty,q/2)|<\infty.$$

Таким образом, функции $\Xi_{m,n}(\eta,q/2)$, $\Pi_{m,n}(\xi,q/2)$ представляют собой соответственно угловую и радиальную волновые функции водородоподобного атома с энергией $E=0$ в сфероидальной системе координат. $\lambda_{m,n}(q/2)$ - соответствующая этим функциям константа разделения. При этом $q/2=ZR$, где $Z$ - заряд ядра, $R$ - расстояние между фокусами в сфероидальной системе координат.

Заметим, что функции $\phi=\mathrm{const}\cdot\Xi_{m,n}(\cos 2v,q/2)$ рассматривались в [35] при вычислении уровней энергии вращающейся двухатомной молекулы.

Если $\mu=1$, $\lambda_n^{(\nu,1)}(\frac{c^2}{4})=-4(\nu+1)+\frac{c^2}{2}$, то функции $PS_n^{(\nu,1)}(\eta,c)$ выражаются через функции Бесселя первого рода:

$$PS_n^{(\nu,1)}(\eta,c)=\mathrm{const}\cdot\frac{J_\nu(c\cdot\eta)}{\eta^\nu(1-\eta^2)}. \qquad /5.8/$$

Так как функция /5.8/ должна быть конечна при $\eta=0$, $\pm 1$ и должна иметь $n$ нулей на интервале $0<\eta<1$, то величина $c$ очевидно должна равняться $(n+1)$-му корню уравнения

$$J_\nu(\alpha_i)=0, \qquad /5.9/$$

где

$i=1,2,\dots n+1$; $0<\alpha_1<\alpha_2<\dots\ \alpha_{n+1}$.

Следовательно, имеем

$$c=\alpha_{n+1},\ PS_n^{(\nu,1)}(\eta,\alpha_{n+1})=\frac{(-1)^n J_\nu(\alpha_{n+1}\eta)}{\gamma_{n,\nu}\,\eta^\nu(1-\eta^2)}, \qquad /5.10/$$

$$\gamma_{n,\nu}=\left(\int_0^1 \eta\,\frac{J_\nu^2(\alpha_{n+1}\eta)}{(1-\eta^2)}\,d\eta\right)^{1/2}.$$



## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя полученные результаты, приведем регулярное и однозначное в области /2.2/ решение волнового уравнения /1.1/ в системах координат /2.1/. При всех $N,M\geq 1$ это решение выражается через полисфероидальные периодические функции $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$, $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$ с целыми или полуцелыми $\nu,\mu>-1$ /полисфероидальные волновые функции/ и имеет вид

$$W(u,v,\alpha_1,\dots\alpha_{N-1},\beta_1,\dots\beta_{M-1};f^2k^2)=(\cos v)^{\nu_{N-1}}(\sin v)^{\mu_{M-1}}\ ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)\times$$
$$\times(\operatorname{ch}u)^{\nu_{N-1}}(\operatorname{sh}u)^{\mu_{M-1}}\ Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)\cdot\Phi(\alpha_1,\dots\alpha_{N-1})\cdot F(\beta_1,\dots\beta_{M-1}). \qquad /6.1/$$

Здесь $q=\frac{f^2k^2}{4}$; $\nu=\nu_{N-1}+\frac{N-2}{2}$; $\mu=\mu_{M-1}+\frac{M-2}{2}$; $\nu_0=0,1$; $\nu_{N-1}=0,1,2\dots$ при $N>1$; $\mu_0=0,1$; $\mu_{M-1}=0,1,2\dots$ при $M>1$. Функции $\Phi(\alpha_1,\dots\alpha_{N-1})$, $F(\beta_1,\dots\beta_{M-1})$ заданы формулами /2.10/.

Напомним, что в случае $N=M=1$ решение /6.1/ сводится к произведению функций Матье [17,18,34], а в случае $N=1$, $M=2$ /или $N=2, M=1$/ выражается через произведение вытянутых сфероидальных /или сплюснутых сфероидальных/функций [5,18,19,22,34].

Заметим, что решения уравнения

$$[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dots\frac{\partial^2}{\partial x_N^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_{N+1}^2}-\dots\frac{\partial^2}{\partial x_{N+M}^2}+k^2]W=0 \qquad /6.2/$$

в псевдоевклидовом пространстве $E_{N,M}$ в системах координат вида

$$\begin{aligned}
x_1 &= f\cos u\cos v\cos\alpha_{N-1},\\
x_2 &= f\cos u\cos v\sin\alpha_{N-1}\cos\alpha_{N-2},\\
&\ \vdots\\
x_{N-1} &= f\cos u\cos v\sin\alpha_{N-1}\dots\sin\alpha_2\cos\alpha_1,\\
x_N &= f\cos u\cos v\sin\alpha_{N-1}\dots\sin\alpha_2\sin\alpha_1,\\
x_{N+1} &= f\sin u\sin v\cos\beta_{M-1},\\
x_{N+2} &= f\sin u\sin v\sin\beta_{M-1}\cos\beta_{M-2},\\
&\ \vdots\\
x_{N+M} &= f\sin u\sin v\sin\beta_{M-1}\dots\sin\beta_2\sin\beta_1,
\end{aligned} \qquad /6.3/$$

где $0 \le u < \frac{\pi}{2}$;

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0 = \beta_0 = 0,\ 0 \le v < 2\pi, && \text{если } N = M = 1;\\
&0 \le v < \pi, && \text{если } M > 1,\ N = 1;\\
&-\frac{\pi}{2} \le v < \frac{\pi}{2}, && \text{если } M = 1,\ N > 1;\\
&0 \le v < \frac{\pi}{2}, && \text{если } N > 1,\ M > 1;
\end{aligned}
\qquad /6.4/
$$

$0 \le \alpha_1 < 2\pi$, $0 \le \alpha_k < \pi$, $k = 2,3,\dots N-1$; $0 \le \beta_1 < 2\pi$, $0 \le \beta_\ell < \pi$, $\ell = 2,3,\dots M-1$;

или вида

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v \cos\alpha_{N-1},\\
x_2 &= f \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v \sin\alpha_{N-1} \cos\alpha_{N-2},\\
&\vdots\\
x_{N-1} &= f \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v \sin\alpha_{N-1} \dots \sin\alpha_2 \cos\alpha_1,\\
x_N &= f \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v \sin\alpha_{N-1} \dots \sin\alpha_2 \sin\alpha_1,\\
x_{N+1} &= f \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \cos\beta_{M-1},\\
x_{N+2} &= f \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \sin\beta_{M-1} \cos\beta_{M-2},\\
&\vdots\\
x_{N+M} &= f \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v \sin\beta_{M-1} \dots \sin\beta_2 \sin\beta_1,
\end{aligned}
\qquad /6.5/
$$

где

$$
\begin{aligned}
&0 \le u < \infty, \quad 0 \le v < \infty, \quad \alpha_0 = \beta_0 = 0;\\
&0 \le \alpha_1 < 2\pi, \quad 0 \le \alpha_k < \pi, \quad k = 2,3,\dots N-1;\\
&0 \le \beta_1 < 2\pi, \quad 0 < \beta_\ell < \pi, \quad \ell = 2,3,\dots M-1,
\end{aligned}
\qquad /6.6/
$$

также выражаются через полисфероидальные волновые функции.

Регулярное и однозначное в области /6.4/ решение уравнения /6.2/ в системах координат /6.3/ имеет вид

$$
W(u,v,\alpha_1,\dots\alpha_{N-1},\beta_1,\dots\beta_{M-1};f^2k^2) = (\cos v)^{\nu_{N-1}} (\sin v)^{\mu_{M-1}}\, ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q) \times
$$
$$
\times (\cos u)^{\nu_{N-1}} (\sin u)^{\mu_{M-1}}\, ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q) \cdot \Phi(\alpha_1,\dots\alpha_{N-1}) F(\beta_1,\dots\beta_{M-1}). \qquad /6.7/
$$



Аналогично регулярное и однозначное в области /6.6/ решение уравнения /6.2/ в системах координат /6.5/ имеет вид

$$
W(u,v,\alpha_1,\dots\alpha_{N-1},\beta_1,\dots\beta_{M-1};f^2k^2) = (\operatorname{ch} v)^{\nu_{N-1}} (\operatorname{sh} v)^{\mu_{M-1}}\, Ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q) \times
$$
$$
\times (\operatorname{ch} u)^{\nu_{N-1}} (\operatorname{sh} u)^{\mu_{M-1}}\, Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q) \cdot \Phi(\alpha_1,\dots\alpha_{N-1}) F(\beta_1,\dots\beta_{M-1}). \qquad /6.8/
$$

Величины $q, \nu, \mu, \nu_{N-1}, \mu_{M-1}$ и функции $ps_n^{(\nu,\mu)}(v,q)$, $Ps_n^{(\nu,\mu)}(u,q)$, $\Phi(\alpha_1,\dots\alpha_{N-1})$, $F(\beta_1,\dots\beta_{M-1})$ в формулах /6.7/, /6.8/ имеют те же значения, что и в формуле /6.1/.

Заметим также, что если в системах координат /2.1/, /6.3/, /6.5/ при $N>2, M>2$ вместо сферических координат $\alpha_1,\dots\alpha_{N-1}$, $\beta_1,\dots\beta_{M-1}$ ввести различные полисферические координаты $\gamma_1,\dots\gamma_{N-1}$, $\delta_1,\dots\delta_{M-1}$, соответствующие всевозможным деревьям с $N-1$ и $M-1$ вершинами [25,26], то регулярные и однозначные внутри $(N+M)$-мерных эллипсоидов $u = \text{const}$ решения уравнений /1.1/, /6.2/ будут соответственно равны /6.1/, /6.7/, /6.8/ с заменой функций $\Phi(\alpha_1,\dots\alpha_{N-1})$, $F(\beta_1,\dots\beta_{M-1})$ на полисферические функции.

Автору приятно поблагодарить Я.А.Смородинского и А.Т.Филиппова за весьма полезные обсуждения на различных этапах работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Filippov A.T. Phys.Lett., 1974, 51B, p. 379; JINR, E2-7563, Dubna, 1973; E2-7929, Dubna, 1974.
2. Филиппов А.Т. ЯФ, 1979, 29, с. 1035. В кн: Нелокальные, нелинейные и неперенормируемые теории поля, ОИЯИ, Дубна, 1976, с. 319.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. "Наука", М., 1974.
4. Power J.D. Phil.Trans. Roy. Soc.London,1973, A274, p. 663.
5. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции, "Наука", М., 1976.
6. Борн М., Хуан Кунь. Динамическая теория кристаллических решеток, ИЛ, М., 1954.
7. Thorson W.R. J.Chem.Phys., 1969, 50, p. 1702.
8. Meixner J., Schäfke F.W. Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Springer, 1954.
9. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. "Наука и техника", Минск, 1968.
10. Bowman J.J., Senior T.B., Uslenghi P.L.E. Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes. N-H.Pub. Comp.-Amsterdam, 1969.

11. Вайнштейн Л.А. В кн: Электроника больших мощностей. "Наука", М., 1965, с. 130.
12. Славянов С.Ю. Записки научных семинаров ЛОМИ, "Наука", Л., 1974, 42, с. 239.
13. Heurtley J.C. In: Proc.Symp. on Quasioptics, Politechnic Press, N.Y., 1964.
14. Стретт М.Д.О. Функции Лямэ, Матье и родственные им в физике и технике, ОНТИ, Харьков-Киев, 1935.
15. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, ИЛ, М., 1958.
16. Макаров Г.И., Терещенко Е.Д. В кн.: Проблемы дифракции и распространения волн. Изд-во ЛГУ, Л., 1972, с. 77.
17. Мак-Лахлан Н.В.Теория и приложения функций Матье. ИЛ, М., 1953.
18. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. "Наука", М., 1973, тт. 1-3.
19. Flammer C. Spheroidal Wave Functions. Stanf.Univ.Press, 1957. Русский перевод: Фламмер К. Таблицы волновых сфероидальных функций. М., ВЦ АН СССР, 1962 /БМТ, вып.17/.
20. Stratton J.A. Proc.Nat.Acad.Sci., 1935,21, p. 51; Chu L.I., Stratton J.A. J.Math.Phys., 1941, 20, p. 259.
21. Rhodes D.R. J.Res.Nat.But.Stand., 1970, 74, p. 187.
22. Stratton J.A. et al. Spheroidal Wave Functions. Mass. Inst. Tech. Press, 1956.
23. Кузнецов Н.В. Записки научных семинаров ЛОМИ. "Наука", Л., 1970, 17, с. 66.
24. Slepian D. Bell System Tech. J., 1964, 43, p. 3009.
25. Виленкин Н.Я. Матем. сб. 1965, №3, с. 432.
26. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп, "Наука", М., 1965.
27. Сеге Д. Ортогональные многочлены. Физматгиз, М., 1962.
28. Floquet G. Ann. École Norm., 1883, ser. 2, 12, p. 47.
29. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.ОНТИ, Харьков, 1939.
30. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. ИЛ, М., 1947.
31. Gautschi W. SIAM Rev., 1967, 9, p. 24.
32. Трускова Н.Ф. ОИЯИ, Р5-80-838, Дубна, 1980.
33. Трускова Н.Ф. ОИЯИ, Р5-81-444, Дубна, 1981.
34. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. "Наука", М., 1979.
35. Дебай П. Полярные молекулы. ГНТИ, М.-Л., 1931.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 июня 1981 года.