объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна



Р5-81-194

Б.М.Барбашов, В.В.Нестеренко, А.М.Червяков

# ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Направлено в "ТМФ", на VI Международное совещание по проблемам квантовой теории поля /Алушта, 5-9 мая 1981 г./ и на Международный семинар по физике высоких энергий и квантовой теории поля /Серпухов, июль 1981 г./

1981

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время возрос интерес к получению точных решений нелинейных уравнений в частных производных. В теории элементарных частиц эти исследования стимулируются попытками выхода за рамки теории возмущений в квантовополевом подходе /солитоны, инстантоны, струны и т.д.[1-4]/. В случае двумерных полевых моделей для этих целей эффективным оказался метод обратной задачи рассеяния [5].

В ряде работ [6-11] дана геометрическая интерпретация нелинейных уравнений, решаемых методом обратной задачи рассеяния. Было показано, что эти уравнения тесно связаны с внутренней геометрией поверхностей в евклидовом, псевдоевклидовом или аффинном пространстве /псевдосферы, минимальные поверхности, поверхности постоянной средней кривизны и т.д./. Более того, линейные уравнения, описывающие изменение подвижного базиса при движении его начала по поверхности, можно рассматривать как операторы Лакса для соответствующего нелинейного уравнения.

В данной работе нас будут интересовать нелинейные уравнения, описывающие в дифференциальной геометрии минимальные поверхности в псевдоевклидовом пространстве. Геометрическая природа этих уравнений позволяет получить в явном виде их общие решения.

Теория минимальных поверхностей имеет большую историю, начинающуюся с работ Лагранжа /1760 г./ и знаменитой задачи Плато. В последнее время минимальные поверхности появились и в теоретическом аппарате физики элементарных частиц. Прежде всего, это модель релятивистской струны, имеющая дело с одномерно-протяженным релятивистским объектом, мировая поверхность которого является минимальной поверхностью в пространстве Минковского [2-4]. С помощью понятия минимальной поверхности формулируется критерий Вильсона удержания кварков в калибровочных моделях сильных взаимодействий [12].

## 2. МОДЕЛЬ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ КООРДИНАТ СТРУНЫ И ИХ РЕШЕНИЯ

Эта модель представляет собой теорию одномерно-протяженного объекта, функционал действия которого пропорционален площади его мировой поверхности в пространстве Минковского [4]. Если $\chi^{\mu}(\tau,\sigma)$ - координаты мировой поверхности струны, то действие струны имеет вид

$$S=-\gamma\int_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}d\sigma\sqrt{(\dot{x}x')^2-\dot{x}^2x'^2}=-\gamma\iint d^2u\sqrt{-g(u)}\,, \qquad /2.1/$$

где $\dot{x}^{\mu}=\partial x^{\mu}/\partial\tau$, $x'^{\mu}=\partial x^{\mu}/\partial\sigma$, $g=\det\|g_{ij}\|$, $g_{ij}=(\partial x^{\mu}/\partial u^i)(\partial x_{\mu}/\partial u^j)$ – метрический тензор на мировой поверхности струны, $u^1=\tau$, $u^2=\sigma$. Для правильной размерности в /2.1/ введена константа $\gamma$, имеющая размерность обратного квадрата длины. В пространстве Минковского мы будем использовать метрику, в которой $a^2=a^{\mu}a_{\mu}=(a^0)^2-(\vec{a})^2$. В теории струны предполагается, что вектор $\dot{x}^{\mu}$ времениподобный ($g_{11}=\dot{x}^2>0$), а $x'^{\mu}$ - пространственноподобный ($x'^2=g_{22}<0$) и $g(u)<0$. Принцип наименьшего действия в применении к функционалу /2.1/ требует, чтобы мировая поверхность струны была минимальной поверхностью.

В изометрической системе координат

$$g_{11}=\dot{x}^2=-g_{22}=-x'^2, \qquad g_{12}=\dot{x}x'=0 \qquad /2.2/$$

уравнения Эйлера для действия /2.1/

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta x_{\mu}}=0 \qquad /2.3/$$

сводятся к уравнению Даламбера на координаты струны

$$x^{\mu}_{,11}-x^{\mu}_{,22}=0 \qquad /2.4/$$

с граничными условиями

$$x^{\mu}_{,2}(\tau,\sigma_1)=x^{\mu}_{,2}(\tau,\sigma_2)=0\,. \qquad /2.5/$$

Индексы с запятой в этих формулах обозначают частные производные по параметрам $u^i$, $i=1,2$. В дальнейшем мы не будем учитывать граничных условий /2.5/, а для простоты будем считать, что струна бесконечная: $-\infty<u^i<+\infty$, $i=1,2$.

Уравнения движения /2.4/ и условия /2.2/ инвариантны относительно конформных преобразований параметров $u^1$, $u^2$: $\bar{u}^{\pm}=f_{\pm}(u^{\pm})$, $u^{\pm}=u^1\pm u^2$. Поэтому, не теряя общности, можно считать, что выполнено условие

$$(x^{\mu}_{,11}\pm x^{\mu}_{,12})^2=-q^2, \qquad /2.6/$$

где $q^2$ - произвольная положительная константа.



Общее решение уравнений движения /2.4/ и дополнительных условий /2.2/ имеет вид

$$x^{\mu}(u^1,u^2)=\psi^{\mu}_{+}(u^+)+\psi^{\mu}_{-}(u^-)\,, \qquad /2.7/$$

причем $\psi'^{\mu}_{+}$ и $\psi'^{\mu}_{-}$ - два изотропных вектора

$$\psi'^{2}_{\pm}=0\,. \qquad /2.8/$$

Штрих у функции означает дифференцирование по ее аргументу. Подставляя /2.7/ в /2.6/, получаем еще одно условие на $\psi^{\mu}_{\pm}$:

$$(\psi''_{\pm})^2=-\frac{q^2}{4}\,. \qquad /2.9/$$

Будем рассматривать двумерную минимальную поверхность, помещенную в $n$-мерное псевдоевклидово пространство с сигнатурой метрики $(+ - - - \ldots)$. Очевидно, что все формулы, приведенные выше, тривиально обобщаются на этот случай: достаточно считать, что индексы, нумерующие координаты объемлющего пространства, изменяются от 1 до $n$.

Условиям /2.8/ и /2.9/ легко удовлетворить, если использовать разложение векторов $\psi'_{\pm}$ в специальном базисе, который используется в дифференциальной геометрии при изучении изотропных кривых [13]. Этот базис образован двумя изотропными векторами $e_1$, $e_2$, $e_i^2=0$, $i=1,2$, $e_1e_2=1$ и $(n-2)$ пространственноподобными векторами $e_j$, $e_j^2=-1$, причем $e_1e_j=e_2e_j=0$, $e_je_k=0$, $j\neq k$; $j,k=3,\ldots,n$. Разложение $\psi'_{\pm}(u^{\pm})$ в этом базисе запишем в виде

$$\psi'_{+}(u^+)=A_{+}(u^+)\,[\,e_1+B_{+}(u^+)e_2+\sum_{i=1}^{n-2}f_i(u^+)\,e_{2+i}\,],$$
$$\psi'_{-}(u^-)=A_{-}(u^-)\,[\,e_1+B_{-}(u^-)\,e_2-\sum_{i=1}^{n-2}g_i(u^-)\,e_{2+i}\,]\,. \qquad /2.10/$$

Для удовлетворения условий /2.8/ и /2.9/ необходимо потребовать, чтобы

$$2A_{+}=q/\sqrt{\sum_{i=1}^{n-2}(f'_i(u^+))^2}\,, \qquad 2A_{-}=q/\sqrt{\sum_{i=1}^{n-2}(g'_i(u^-))^2}\,,$$
$$2B_{+}=\sum_{i=1}^{n-2}f_i^2(u^+), \qquad 2B_{-}=\sum_{i=1}^{n-2}g_i^2(u^-)\,. \qquad /2.11/$$

Окончательно имеем следующее представление для векторов $\psi'_{\pm}(u^{\pm})$

$$\psi'_+(u^+) = \frac{q}{2\sqrt{\sum_{i=1}^{n-2}(f'_i(u^+))^2}}\left[e_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-2} f_i^2(u^+)e_2 + \sum_{i=1}^{n-2} f_i(u^+)e_{2+i}\right],$$

$$\psi'_-(u^-) = \frac{q}{2\sqrt{\sum_{i=1}^{n-2}(g'_i(u^-))^2}}\left[e_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-2} g_i^2(u^-)e_2 - \sum_{i=1}^{n-2} g_i(u^-)e_{2+i}\right]. \qquad /2.12/$$

Эти формулы дают выражение для метрического тензора двумерной минимальной поверхности в $n$-мерном псевдоевклидовом пространстве, зависящее от $2(n-2)$ произвольных функций одной переменной, а именно:

$$(g_{11})^{-1} = -(g_{22})^{-1} = (2\psi_+(u^+)\psi_-(u^-))^{-1} =$$

$$= \frac{4}{q}\,\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-2}[f'_i(u^+)]^2\sum_{j=1}^{n-2}[g'_j(u^-)]^2}}{\sum_{k=1}^{n-2}[f_k(u^+)+g_k(u^-)]^2} \equiv \Lambda_{n-2}. \qquad /2.13/$$

## 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ИХ ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ

Теперь перейдем к рассмотрению нелинейных уравнений, тесно связанных с минимальными поверхностями. Для этого обратимся к основным дифференциальным формам поверхности.

Согласно теоремам вложения дифференциальной геометрии [14], поверхность можно задать с точностью до ее положения в пространстве как целого фундаментальными тензорами поверхности: метрическим тензором $g_{ij}(u)$, тензорами вторых квадратичных форм $b_{\alpha|ij}(u)$ и векторами кручения $\nu_{\alpha\beta|i}$ $(=-\nu_{\beta\alpha|i},\ i,j=1,2;$ $\alpha,\beta=3,4,\dots,n$, где $n$ - размерность объемлющего пространства). Эти величины описывают перемещение по поверхности подвижного базиса, образованного двумя касательными векторами $x^\mu_{,1}$, $x^\mu_{,2}$ и $n-2$ нормалями $\eta^\mu_\alpha$, $\alpha=3,4,\dots,n$. Это выражается следующими деривационными формулами:

$$x^\mu_{;ij} = -\sum_{\alpha=3}^{n} b_{\alpha|ij}\,\eta^\mu_\alpha, \qquad /3.1/$$

$$\eta^\mu_{\alpha,i} = -b_{\alpha|ij}\,g^{jk}x^\mu_{,k} - \sum_{\substack{\beta=3\\ \beta\neq\alpha}}^{n} \nu_{\beta\alpha|i}\,\eta^\mu_\beta. \qquad /3.2/$$

Точка с запятой в этих формулах означает ковариантное дифференцирование по отношению к метрическому тензору $g_{ij}$. Функции $g_{ij}(u)$, $b_{\alpha|ij}(u)$ и $\nu_{\alpha\beta|i}(u)$ очевидно не могут быть произвольными, а должны удовлетворять условиям интегрируемости линейной системы уравнений /3.1/ и /3.2/ на $x^\mu_{,i}$, $\eta^\mu_\alpha$, которые даются уравнениями Гаусса

$$R_{ijk\ell} = -\sum_{\alpha=3}^{n}(b_{\alpha|ik}b_{\alpha|j\ell} - b_{\alpha|i\ell}b_{\alpha|jk}), \qquad /3.3/$$

Петерсона-Кодацци

$$b_{\alpha|ij;k} - b_{\alpha|ik;j} = -\sum_\beta(\nu_{\beta\alpha|k}b_{\beta|ij} - \nu_{\beta\alpha|j}b_{\beta|ik}) \qquad /3.4/$$

и Риччи

$$\nu_{\beta\alpha|j;k} - \nu_{\beta\alpha|k;j} - \sum_\gamma(\nu_{\gamma\beta|j}\nu_{\gamma\beta|k} - \nu_{\gamma\beta|k}\nu_{\gamma\alpha|j}) + \qquad /3.5/$$
$$+ g^{\ell m}(b_{\beta|\ell j}b_{\alpha|mk} - b_{\beta|\ell k}b_{\alpha|mj}) = 0.$$

В этих уравнениях латинские индексы принимают значения 1,2, а греческие - $3,4,\dots,n$. В левой части уравнения Гаусса /3.3/ стоит тензор кривизны $R_{ijk\ell}$ для метрики $g_{ij}$.

Условием минимальности поверхности является требование [14,15]

$$\sum_{i,j=1}^{2} b_{\alpha|ij}\,g^{ij} = 0, \quad \alpha=3,4,\dots,n. \qquad /3.6/$$

В системе координат /2.2/ это означает, что

$$b_{\alpha|11} = b_{\alpha|22}, \quad \alpha=3,4,\dots,n. \qquad /3.7/$$

Если минимальная поверхность помещена в трехмерное пространство-время, то система уравнений /3.3/-/3.5/ сводится к одному нелинейному уравнению Лиувилля [9,16,17]

$$\phi_{,11} - \phi_{,22} = 2q^2 e^\phi, \qquad /3.8/$$

где $g_{11} = -g_{22} = e^{-\phi}$. Используя для метрического тензора минимальной поверхности представление /2.13/ с $n=3$, получаем хорошо известное общее решение уравнения Лиувилля [18]

$$e^\phi = \Lambda_1 = \frac{4}{q^2}\cdot\frac{f'(u^+)g'(u^-)}{[f(u^+)+g(u^-)]^2}. \qquad /3.9/$$

При увеличении размерности объемлющего пространства, в которое помещена минимальная поверхность, резко увеличивается число уравнений в системе /3.3/-/3.5/, причем число функций $g_{ij}$, $b_{\alpha|ij}$, $\nu_{\alpha\beta|i}$ превышает число уравнений. Однако эта система уравнений значительно упрощается, если выбрать соответствующим образом подвижный базис на минимальной поверхности. Действительно, в выводе уравнений Гаусса, Петерсона-Кодацци и Риччи /3.3/-/3.5/ ничего не изменится, если от базиса

$$x^{\mu}_{,1},\ x^{\mu}_{,2},\ \eta^{\mu}_{3},\ \ldots,\eta^{\mu}_{n} \qquad /3.10/$$

перейти к новому базису, получающемуся из /3.10/ вращением из группы $SO(1,1)\times SO(n-2)$, которое не перемешивает касательное пространство поверхности $\{x^{\mu}_{,1},\ x^{\mu}_{,2}\}$ с ее нормальным пространством $\{\eta^{\mu}_{3},\eta^{\mu}_{4},\ldots,\eta^{\mu}_{n}\}$.

Если размерность объемлющего пространства $n\geq 4$, то в пространстве, нормальном к двумерной минимальной поверхности, есть два взаимоортогональных пространственноподобных вектора $x^{\mu}_{;11}$ и $x^{\mu}_{;12}$ /вектор $x^{\mu}_{;22}$ согласно /3.2/ и /3.7/, совпадает с $x^{\mu}_{;11}$/. Действительно, в метрике /2.2/ из условия /2.6/ следует

$$(x^{\mu}_{;11}\pm x^{\mu}_{;12})^2=-\sum_{\alpha=3}^{n}(b_{\alpha|11}\pm b_{\alpha|12})^2=-q^2, \qquad /3.11/$$

то есть $(x_{;11}\cdot x_{;12})=0$. Поэтому естественно направить две нормали к минимальной поверхности по векторам $x^{\mu}_{;11}$ и $x^{\mu}_{;12}$, например, так: $\eta^{\mu}_{3}$ по $x^{\mu}_{;11}$ и $\eta^{\mu}_{4}$ по $x^{\mu}_{;12}$. Тогда сразу получаем

$$b_{3|12}=b_{4|11}=b_{4|22}=b_{\alpha|ij}=0,\quad \alpha=5,\ldots,n,\quad i,j=1,2. \qquad /3.12/$$

Чтобы удовлетворить условию /3.11/, можно положить

$$b_{3|11}=q\cos\frac{\theta}{2},\quad b_{4|12}=q\sin\frac{\theta}{2}. \qquad /3.13/$$

Уравнение Гаусса /3.3/ принимает теперь вид

$$\phi_{,11}-\phi_{,22}=2q^2e^{\phi}\cos\theta,\quad e^{-\phi}=x^2_{,1}=-x^2_{,2}, \qquad /3.14/$$

причем это уравнение остается справедливым для любой размерности объемлющего пространства, в котором погружена минимальная поверхность.

Через функцию $\theta(u^1,u^2)$ с помощью уравнений Петерсона-Кодацци /3.4/ при $\alpha=3,4$, определяется вектор кручения $\nu_{34|i}$, $i=1,2$:

$$\nu_{34|1}=\frac{\theta_{,2}}{2},\quad \nu_{34|2}=\frac{\theta_{,1}}{2}. \qquad /3.15/$$

В четырехмерном пространстве-времени система /3.3/-/3.5/ сводится к двум нелинейным уравнениям:



$$\begin{aligned}\phi_{,11}-\phi_{,22}&=2q^2e^{\phi}\cos\theta,\\ \theta_{,11}-\theta_{,22}&=2q^2e^{\phi}\sin\theta,\end{aligned} \qquad /3.16/$$

где функция $\phi(u^1,u^2)$ определяет конформно-плоскую метрику на минимальной поверхности $g_{11}=-g_{22}=e^{-\phi}$, $g_{12}=0$, а $\theta(u^1,u^2)$ - вторые квадратичные формы $b_{3|ij}$ и $b_{4|ij}$ $(i,j=1,2)$ и вектор кручения $\nu_{34|i}$ $(i=1,2)$ по формулам /3.12/, /3.13/ и /3.15/.

Специальный выбор нормалей $\eta_3$ и $\eta_4$ к минимальной поверхности позволил сразу получить из общей системы /3.3/-/3.5/ систему из двух уравнений на две функции $\phi$ и $\theta$, в отличие от работ [8,9,11], где нормали $\eta_3$ и $\eta_4$ никак не фиксировались. В этих работах приходилось вводить вспомогательные функции $\alpha_{\pm}$, которые входили в конечные уравнения только в виде разности $\theta=\alpha_{+}-\alpha_{-}$.

Общее решение системы /3.16/ получаем с помощью наших формул /2.1/ и /2.13/

$$e^{\phi}=\Lambda_2, \qquad /3.17/$$

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{b_{4|12}}{b_{3|11}}=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2_{;12}}{x^2_{;11}}}. \qquad /3.18/$$

Для явного выражения $\theta$ через произвольные функции $f_i(u^+)$ и $g_i(u^-)$ удобнее пользоваться не формулами /3.18/, /2.12/ и /2.7/, а определить $\theta$ из первого уравнения /3.16/, подставив туда /3.17/. В результате получаем

$$\theta(u^1,u^2)=\arccos\Delta_2, \qquad /3.19/$$

где

$$\Delta_n=2\frac{\sum_{i=1}^{n}(f_i+g_i)f'_i\sum_{j=1}^{n}(f_j+g_j)g'_j}{\sum_{i=1}^{n}(f_i+g_i)^2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}f'^2_i\sum_{j=1}^{n}g'^2_j}}-\frac{\sum_{i=1}^{n}f'_ig'_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}f'^2_i\sum_{j=1}^{n}g'^2_j}}, \qquad /3.20/$$

$$f_i\equiv f_i(u^+),\ g_i\equiv g_i(u^-).$$

В работе[9] общее решение системы /3.16/ было выписано путем сведения этих уравнений к одному уравнению Лиувилля на комплексную функцию $\phi+i\theta$.

Новая система трех нелинейных уравнений, не встречавшаяся ранее в литературе, получается при рассмотрении данным методом двумерных минимальных поверхностей в пятимерном псевдоевклидовом пространстве. Выбирая нормали $\eta_3$ и $\eta_4$ так, как это было описано выше, получаем формулы /3.12/, /3.13/, /3.15/ и уравнение /3.14/. Дополнительно к переменным, фигурировавшим в четырехмерном случае, здесь появляются два вектора кручения $\nu_{35|i}$ и $\nu_{45|i}$, $i=1,2$. Уравнения Петерсона-Кодацци /3.4/ с $\alpha=5$ дают

$$\nu_{35|2}\cos\frac{\theta}{2} = \nu_{45|1}\sin\frac{\theta}{2}, \qquad /3.21/$$

$$\nu_{45|2}\sin\frac{\theta}{2} = \nu_{35|1}\cos\frac{\theta}{2}.$$

Чтобы удовлетворить этим равенствам, необходимо положить

$$\nu_{35|2} = h(u^1,u^2)\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \nu_{45|1} = h(u^1,u^2)\cos\frac{\theta}{2}, \qquad /3.22/$$

$$\nu_{45|2} = p(u^1,u^2)\cos\frac{\theta}{2}, \qquad \nu_{35|1} = p(u^1,u^2)\sin\frac{\theta}{2}.$$

Уравнения Риччи /3.5/ записываются теперь в следующем виде:

$$\theta_{,11} - \theta_{,22} - (h^2 - p^2)\cdot\sin\theta = 2q^2 e^{\phi}\sin\theta, \qquad /3.23/$$

$$\sin\frac{\theta}{2}(h_{,1} - p_{,1}) + \cos\theta(h\theta_{,1} - p\theta_{,2}) = 0, \qquad /3.24/$$

$$\cos\frac{\theta}{2}(p_{,1} - h_{,2}) + \sin\frac{\theta}{2}(h\theta_{,2} - p\theta_{,1}) = 0. \qquad /3.25/$$

Подстановка

$$h = \kappa_{,2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-2}, \qquad p = \kappa_{,1}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-2} \qquad /3.26/$$

обращает уравнение /3.24/ в тождество, а /3.25/ дает

$$\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}\cdot\kappa_{,1}\right)_{,1} = \left(\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}\cdot\kappa_{,2}\right)_{,2}. \qquad /3.27/$$

Окончательно система /3.3/-/3.5/ в случае пятимерного объемлющего пространства сводится к следующим трем нелинейным уравнениям:

$$\phi_{,11} - \phi_{,22} = 2q^2 e^{\phi}\cos\theta,$$



$$\theta_{,11} - \theta_{,22} + 2\frac{\cos\theta/2}{\sin^3\theta/2}(\kappa_{,1}^2 - \kappa_{,2}^2) = 2q^2 e^{\phi}\sin\theta, \qquad /3.28/$$

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\kappa_{,1}\right)_{,1} = \left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\kappa_{,2}\right)_{,2}.$$

Интересно отметить, что последнее уравнение в /3.28/ в точности совпадает со вторым уравнением в нелинейной системе Лунда-Редже [7,19].

Выпишем общее решение системы /3.28/:

$$e^{\phi} = \Lambda_3, \qquad \theta = \arccos\Delta_3,$$

$$\frac{\kappa_{,1}^2}{\sin^2\theta/2} = q^2\cos^2\frac{\theta}{2}e^{\phi} - \frac{\theta_{,2}^2}{4} - \left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{x^{\mu}_{;11}}{q\cos\theta/2}\right)\right]^2, \qquad /3.29/$$

$$\frac{\kappa_{,2}^2}{\sin^2\theta/2} = -q^2\cos^2\frac{\theta}{2}e^{\phi} - \frac{\theta_{,1}^2}{4} - \left[\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{x^{\mu}_{;11}}{q\cos\theta/2}\right)\right]^2.$$

Величины $\Lambda_3$ и $\Delta_3$ определяются формулами /2.13/ и /3.20/, соответственно, а ковариантную производную $x^{\mu}_{;11}$ следует строить с помощью разложений /2.7/ и /2.12/.

Очевидно, что предложенный метод можно применить и к более высоким размерностям n объемлющего пространства. При этом уравнения /3.3/-/3.5/ будут редуцироваться в систему из (n-2) нелинейных уравнений на n-2 неизвестных функций. Общие решения этих систем будут строиться с помощью формул /2.13/, /3.20/ и разложений /2.7/ и /2.12/.

## 4. КАЛИБРОВКА $t=\tau$

В этой калибровке мировая поверхность струны, движущейся в n-мерном псевдоевклидовом пространстве, описывается n-2 -мерным евклидовым вектором $\vec{x} = \{x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$, зависящим от двух параметров $\tau = t = u^1$ и $\sigma = u^2$. Уравнения движения /2.4/ и дополнительные условия /2.2/ записываются теперь так:

$$\vec{x}_{,11} - \vec{x}_{,22} = 0, \qquad /4.1/$$

$$\vec{x}_{,1}^{\,2} + \vec{x}_{,2}^{\,2} = 1, \qquad \vec{x}_{,1}\cdot\vec{x}_{,2} = 0. \qquad /4.2/$$

Условия /4.2/ диктуют следующий вид метрического тензора на мировой поверхности струны

$$g_{11}=\vec{x}^{\,2}_{,1}=\sin^2\theta, \quad g_{22}=\vec{x}^{\,2}_{,2}=\cos^2\theta. \qquad /4.3/$$

В дальнейшем нам потребуются символы Кристоффеля, соответствующие этой метрике

$$\Gamma^1_{11}=\Gamma^1_{22}=\mathrm{ctg}\,\theta\cdot\theta_{,1} \quad \Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\mathrm{ctg}\,\theta\cdot\theta_{,2},$$
$$\Gamma^2_{11}=\Gamma^2_{22}=-\mathrm{tg}\,\theta\cdot\theta_{,2}, \quad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=-\mathrm{tg}\,\theta\cdot\theta_{,1}. \qquad /4.4/$$

Мировая поверхность струны в калибровке $t=\tau$ не является минимальной для $(n-1)$ -мерного евклидова пространства с координатами $x^1,\dots,x^{n-1}$. Тем не менее, из деривационных формул /3.1/ с учетом уравнений движения /4.1/ и формул /4.5/ следует

$$b_{a|11}=b_{a|22}, \quad a=3,4,\dots,n-1. \qquad /4.5/$$

Единственная существенная компонента тензора кривизны в метрике /4.3/ имеет вид [8]

$$R_{1212}=\frac{1}{2}\sin 2\theta(\theta_{,11}-\theta_{,22}). \qquad /4.6/$$

Уравнение Гаусса /3.3/ с помощью /4.5/ и /4.6/ записывается так:

$$\frac{1}{2}\sin 2\theta(\theta_{,11}-\theta_{,22})=\sum_{a=3}^{n-1}(b^2_{a|11}-b^2_{a|12}). \qquad /4.7/$$

Построение общих решений уравнений /3.3/-/3.5/, как и в разделе 3, будет основываться на записи решений уравнений движения /4.1/, удовлетворяющих условиям /4.2/, в специальном базисе.

Начнем рассмотрение с простейшего случая трехмерного пространства-времени, в котором движется релятивистская струна. В калибровке $t=\tau$ координаты струны $x^1(t,\sigma)$ и $x^2(t,\sigma)$ задают плоскость, которая является проекцией мировой поверхности струны в пространстве $\{t, x^1, x^2\}$ на координатную плоскость $Ox^1x^2$.

В этом случае $b_{a|ij}=0$ и $\nu_{a\beta|i}=0$, и единственное нетривиальное уравнение в системе /3.3/-/3.5/ - это уравнение Гаусса, которое сводится, согласно /4.6/, к уравнению Даламбера [8]

$$\theta_{,11}-\theta_{,22}=0. \qquad /4.8/$$

Решение уравнений /4.1/ и /4.2/ в случае двумерного вектора $\vec{x}(t,\sigma)$ возьмем в следующем виде:



$$\vec{x}(t,\sigma)=\vec{\psi}_+(u^+)-\vec{\psi}_-(u^-), \quad (\psi'_\pm)^2=1, \quad u^\pm=t\pm\sigma, \qquad /4.9/$$

$$\vec{\psi}'_\pm(u^\pm)=\frac{1}{\sqrt{2}}\{\cos\phi_\pm(u^\pm),\ \pm\sin\phi_\pm(u^\pm)\}. \qquad /4.10/$$

Согласно /4.3/, функция $\theta(t,\sigma)$ определяется формулой

$$\theta(t,\sigma)=\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\vec{x}^{\,2}_{,1}}{\vec{x}^{\,2}_{,2}}}. \qquad /4.11/$$

Подставляя сюда /4.9/ и /4.10/, получаем общее решение уравнения /4.8/

$$\theta(t,\sigma)=\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos(\phi_++\phi_-)}{1+\cos(\phi_++\phi_-)}}=[\phi_+(u^+)+\phi_-(u^-)]/2. \qquad /4.12/$$

Этот тривиальный случай наглядно демонстрирует идею получения общих решений уравнений /3.3/-/3.5/ в калибровке $t=\tau$.

Перейдем к четырехмерному пространству-времени. Трехкомпонентный вектор $\vec{x}(t,\sigma)$ описывает в данном случае проекцию двумерной минимальной поверхности из четырехмерного пространства Минковского в обычное трехмерное евклидово пространство. Система уравнений /3.3/-/3.5/ с учетом /4.4/-/4.7/ сводится, как это нетрудно показать, к следующим двум нелинейным уравнениям:

$$\theta_{,11}-\theta_{,22}+\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}(\kappa^2_{,1}-\kappa^2_{,2})=0,$$
$$(\mathrm{ctg}^2\theta\cdot\kappa_{,1})_{,1}=(\mathrm{ctg}^2\theta\cdot\kappa_{,2})_{,2}, \qquad /4.13/$$

где функция $\kappa$ определяет коэффициенты второй квадратичной формы

$$b_{11}=b_{22}=\mathrm{ctg}\,\theta\cdot\kappa_{,2}, \quad b_{12}=\mathrm{ctg}\,\theta\cdot\kappa_{,1}. \qquad /4.14/$$

Система /4.13/ отличается от известных уравнений Лунда-Редже [19] отсутствием в первом уравнении слагаемого $\sin\theta\cdot\cos\theta$.

Опять представим вектор $\vec{x}(t,\sigma)$ с помощью формулы /4.9/, а для $\vec{\psi}'_\pm(u^\pm)$ возьмем сферический базис в трехмерном евклидовом пространстве:

$$\vec{\psi}'_{\pm}(u^{\pm}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\sin\omega_{\pm}\cos\phi_{\pm}\,,\ \pm\sin\omega_{\pm}\sin\phi_{\pm}\,,\ \pm\cos\omega_{\pm}\},\qquad /4.15/$$

$$\omega_{\pm} \equiv \omega_{\pm}(u^{\pm}),\quad \phi_{\pm} \equiv \phi_{\pm}(u^{\pm}).$$

Для $\theta(t,\sigma)$,согласно /4.12/, получаем

$$\theta(t,\sigma) = \mathrm{arctg}\left\{\frac{1-[\sin\omega_{+}\sin\omega_{-}\cos(\phi_{+}+\phi_{-})-\cos\omega_{+}\cos\omega_{-}]}{1+[\sin\omega_{+}\sin\omega_{-}\cos(\phi_{+}+\phi_{-})-\cos\omega_{+}\cos\omega_{-}]}\right\}^{1/2}. \qquad /4.16/$$

С помощью теоремы косинусов для сферического треугольника /20/ легко убедиться, что $2\theta(t,\sigma)$ в /4.16/ есть угол, лежащий в сферическом треугольнике против стороны $\phi_{+}+\phi_{-}$ с прилегающими углами $\omega_{+}$ и $\omega_{-}$.

В систему /4.13/ входят только частные производные функции $\kappa(t,\sigma)$. Согласно деривационным формулам /3.1/, они определяются следующим образом:

$$\kappa_{,1} = \mathrm{tg}\theta\cdot\sqrt{\vec{x}^{\,2}_{;12}},\qquad \kappa_{,2} = \mathrm{tg}\theta\cdot\sqrt{\vec{x}^{\,2}_{;11}}. \qquad /4.17/$$

Очевидно, что разложения /4.9/ и /4.15/ позволяют выразить $\kappa_{,i}$, $i=1,2$ через 4 произвольных функции одной переменной $\phi_{\pm}(u^{\pm})$ и $\omega_{\pm}(u^{\pm})$, поэтому мы не будем приводить здесь эти громоздкие формулы.

Обобщая представления /4.10/ и /4.15/ на $n$-мерный случай, можно построить общие решения системы нелинейных уравнений /3.3/-/3.5/ в калибровке $t=\tau$ для произвольной размерности $n$ объемлющего пространства.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С точки зрения обобщения предложенного здесь способа построения общих решений нелинейных уравнений несомненный интерес представляет выяснение в духе работ /21,22/ его групповой основы. И в работах /21,22/, и в нашем подходе используется фактически одна и та же процедура, а именно - минимальное вложение. В нашем случае - это минимальное вложение двумерного риманова многообразия в плоское пространство, а в /21,22/ - минимальное вложение одной группы Ли в другую. Именно минимальное вложение привело к линейным уравнениям /2.4/ на координаты вкладываемого подмногообразия. А это в конечном счете и позволяет построить общие решения системы нелинейных уравнений /3.3/-/3.5/.



## ЛИТЕРАТУРА


1. Jackiw R. Rev.Mod.Phys., 1977, v.49, No.3, p.681.
2. Nambu Y. Phys.Rev., 1974, v.D10, No.12, p.4262-4268.
3. Faddeev L.D., Korepin V.E. Phys.Rev., 1978, v.42C, No.1, p.1-87.
4. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. ЭЧАЯ, 1978, т.9, в.5, с.709-758.
5. Захаров В.Е. и др. Теория солитонов. Метод обратной задачи. "Наука", М., 1980.
6. Sasaki R. Nucl.Phys., 1979, v.B154, No.2, p.343-357.
7. Lund F. Phys.Rev., 1977, v.D15, No.6, p.1540.
8. Barbashov B.M., Nesterenko V.V. Fort. der Phys., 1980, B28, H.9, S.427-464.
9. Barbashov B.M., Nesterenko V.V., Chervjakov A.M. J.Phys., 1980, A13, No.1, p.301-312.
10. Nesterenko V.V. Lett.Math.Phys., 1980, v.4, No.6, p.415-456.
11. Barbashov B.M., Nesterenko V.V. Comm.Math.Phys., 1981, v.78, No.4, p.499-506.
12. Wilson K.G. Phys.Rev., 1974, v.D10, No.8, p.2445-2459.
13. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. ИЛ, М., 1960.
14. Eisenhart L.P. Riemannian Geometry. Princeton, Princeton University Press, 1964.
15. Osserman R. Bull.Am.Math. Soc., 1969, v.75, No.6, p.1092-1120.
16. Omnes R. Nucl.Phys., 1979, B149, No.2, p.269-284.
17. Bianchi L. Lezioni di Geometria Differenziale, 4 ed. Bologna, 1922-1923.
18. Forsyth A.R. Theory of Differential Equations, Dover Publications, 1959, v.5-6.
19. Lund F. Ann.Phys., 1978, v.115, No.2, p.251-268.
20. Абалакин В.К. и др. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. "Наука", М., 1976.
21. Лезнов А.Н., Савельев М.В. ЭЧАЯ, 1980, т.11, в.1, с.40-91.
22. Лезнов А.Н., Савельев М.В. ЭЧАЯ, 1981, т.12, в.1, с.125-161.


Рукопись поступила в издательский отдел
19 марта 1981 года.