объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-81-188

В.А.Загребнов

ТЕОРЕМА БОГОЛЮБОВА-РЮЭЛЯ: НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ОБОБЩЕНИЯ

Направлено в ТМФ

1981

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных проблем классической равновесной статистической механики является доказательство существования предельного гиббсовского распределения, или предельных корреляционных функций, когда объем системы стремится к бесконечности. Впервые существование такого предела для корреляционных функций классического газа малой плотности с чисто отталкивательным парным взаимодействием было доказано в работах Боголюбова и Хацета[1]. Рюэль [2] /см. также §4.2 в [3] / получил этот результат для случая устойчивых парных взаимодействий и малых активностей /внутри круга аналитичности/ в рамках большого канонического ансамбля. В работе[4] Боголюбов, Петрина и Хацет доказали существование и единственность предельных корреляционных функций при малых плотностях для устойчивых парных взаимодействий в каноническом ансамбле и установили /см. также [5] / эквивалентность канонического и большого канонического ансамблей вдали от области фазовых переходов. Наконец, исследование сходимости и свойств корреляционных функций и доказательство на этой основе существования и единственности /внутри круга аналитичности/ предельного гиббсовского распределения было проведено в работах Минлоса[6], Рюэля[7] и Добрушина[8]. В этих работах впервые сформулированы понятия гиббсовского поля и предельного распределения /см. также [9-11], Приложение в книге [3] и цитируемую там литературу/. В недавних работах Назина[12] дано описание гиббсовских случайных полей методом производящего функционала, который был сформулирован Боголюбовым в работе [13].

Для непрерывных систем наиболее прямой способ доказательства существования и единственности предельного гиббсовского распределения для малых плотностей, или активностей, сводится к доказательству существования и единственности предельных корреляционных функций /мы будем называть это утверждение теоремой Боголюбова-Рюэля /БР/; для решетчатых систем другой метод доказательства был предложен Добрушиным [14]/ *. Оно основано на анализе поведения корреляционных функций с помощью корреляционных уравнений типа уравнений Кирквуда-Зальцбурга /КЗ/,

---

* Простое доказательство теоремы Добрушина приведено в лекциях Ланфорда[15], см. также замечание Саймона [15].

когда объем системы стремится к бесконечности. Для этого используется сформулированная еще в работе [1] идея рассматривать последовательности корреляционных функций как элементы некоторого банахова пространства E_ξ, а цепочку уравнений КЗ - как единое уравнение в этом пространстве, а также некоторая серия оценок, которые удается получить лишь для достаточно малых плотностей [4] либо внутри круга аналитичности по активности, см. [2,3,6].

Цель настоящей работы - показать, что теорема БР допускает некоторую более общую формулировку и является прямым следствием общей теории уравнений в банаховом пространстве. Идея нового метода доказательства теоремы основана на использовании дуальной пары банаховых пространств $<'E_\xi, E_\xi>$. Это позволяет избежать обычных громоздких оценок, которые с самого начала ограничивают область применимости теоремы кругом аналитичности. В настоящей работе рассматривается случай большого канонического ансамбля и непустых граничных условий. Показано, что сходимость к предельным корреляционным функциям имеет место в области, содержащей круг аналитичности, причем предел единственен, аналитичен по активности и не зависит от граничных условий, то есть предельное гиббсовское распределение единственно.

Необходимые предварительные сведения приведены в следующем разделе. Схема доказательства, описание дуальной пары $<'E_\xi, E_\xi>$ и оператора Кирквуда-Рюэля /КР/ в пространстве $'E_\xi$ содержатся в разделе 3. Новая формулировка и доказательство теоремы БР приведены в разделе 4. Раздел 5 посвящен обсуждению полученных результатов.

2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ. ТЕОРЕМА БОГОЛЮБОВА-РЮЭЛЯ

Ниже рассматривается классическая непрерывная система одинаковых частиц в пространстве $\boldsymbol{R}^\nu$, взаимодействующих посредством устойчивого /или сверхустойчивого/ регулярного парного потенциала $\Phi: \boldsymbol{R}^\nu \to \boldsymbol{R}^1 \cup \{+\infty\}$, который является измеримой функцией и обладает следующими свойствами: $\Phi(x)=\Phi(-x)$; энергия взаимодействия n частиц

$$U(X_n) = \sum_{1\le i<j\le n} \Phi(x_i - x_j) \ge -nB \qquad \text{/устойчивость/}, \qquad /2.1/$$

где $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R}^{n\nu}$, $B \ge 0$ и конечно; наконец,

$$C(\beta) = \int_{\boldsymbol{R}^\nu} dx\,|e^{-\beta\Phi(x)} - 1| < \infty \qquad \text{/регулярность/}. \qquad /2.2/$$

Пусть $\Lambda \subset \boldsymbol{R}^\nu$ - связное измеримое подмножество с $\mathrm{mes}\Lambda = |\Lambda| < \infty$

/сосуд с конечным объемом/. Тогда Ω_Λ и $\Omega_{\bar\Lambda}$ - множества конфигураций $\{X_\Lambda\}$ и $\{X_{\bar\Lambda}\}$ соответственно внутри и вне сосуда Λ.

Определение 2.1 [16]. Подмножество $\Omega'_{\bar\Lambda} \subset \Omega_{\bar\Lambda}$ состоит из регулярных конфигураций, если для любой конфигурации $X_{\bar\Lambda} \in \Omega'_{\bar\Lambda}$ существует такая конечная величина $G(X_{\bar\Lambda}) \ge 0$, что энергия взаимодействия

$$W(X_\Lambda, X_{\bar\Lambda}) = \sum_{\substack{x \in X_\Lambda \\ y \in X_{\bar\Lambda}}} \Phi(x-y) > -G(X_{\bar\Lambda})\,\mathrm{card}\,X_\Lambda. \qquad /2.3/$$

Ниже мы будем полагать $W(X_\Lambda, \emptyset) = W(\emptyset, X_{\bar\Lambda}) = 0$; $X_\Lambda = X_n$, если $\mathrm{card}\,X_\Lambda = n$ и $U(X_n) = 0$ для $n = 0,1$.

Кинетическая энергия частиц для дальнейших рассуждений несущественна. Поэтому мы будем рассматривать конфигурационный большой канонический ансамбль частиц в сосуде Λ, имеющих температуру β и активность $z/z \ge 0$ в физической области/, при наличии регулярного граничного условия $X_{\bar\Lambda}$ вне сосуда. Большая статистическая сумма имеет тогда следующий вид:

$$\Xi(\beta, z, \Lambda | X_{\bar\Lambda}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Lambda^n} dY_n \exp(-\beta U(Y_n) - \beta W(Y_n, X_{\bar\Lambda})), \qquad /2.4/$$

а условные m-точечные корреляционные функции определяются обычным образом:

$$\rho_\Lambda(z, X_m | X_{\bar\Lambda}) = (\Xi(\beta, z, \Lambda | X_{\bar\Lambda}))^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{m+n}}{n!} \times$$
$$\times \int_{\Lambda^n} dY_n \exp(-\beta U(X_m \cup Y_n) - \beta W(X_m \cup Y_n, X_{\bar\Lambda})), \qquad /2.5/$$

здесь, по определению, $\int_{\Lambda^n} dY_n = 1$ при $n=0$ и $X_m \cup Y_n = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$. Сходимость степенных рядов /2.4/, /2.5/ обеспечивается условиями устойчивости /2.1/ и регулярности граничного условия /2.3/. Поэтому большую статистическую сумму и корреляционные функции можно аналитически продолжить по z с физической области значений активности в комплексную плоскость $\mathbf{C}$.

Определение 2.2 [1-4]. Пусть $\xi > 0$ и $\phi = \{\phi_m(X_m)\}_{m\ge 1}$ - последовательность комплекснозначных измеримых функций. Векторное пространство

$$E_\xi = \{\phi: \sup_{m \ge 1} \xi^{-m} \|\phi_m(X_m)\|_{L^\infty(\boldsymbol{R}^{m\nu})} = \|\phi\|_\xi < \infty\} \qquad /2.6/$$

с нормой $\|\cdot\|_\xi$ является банаховым. Пространство $E^s_\xi \subset E_\xi$, состоящее из последовательностей симметричных функций, будем называть пространством Боголюбова-Хацета /БХ/.

Замечание 2.1[16]. Из условий /2.1/, /2.3/ следует, что сумма /2.4/ является целой функцией $\Xi(\beta, z, \Lambda | X_{\bar\Lambda})$ активности z, порядок которой не превосходит единицы. Если $N(\Xi)$ - множество ее нулей, тогда вектор $\{\rho_\Lambda(z, X_m | X_{\bar\Lambda})\}_{m\geq 1} = \rho_\Lambda(z|X_{\bar\Lambda}) \in E^s_\xi$, $z \in C_+(\xi) \setminus N(\xi)$, и является $\|\cdot\|_\xi$ -мероморфной функцией $\rho_\Lambda : C_+(\xi) \to E^s_\xi$ в области

$$C_+(\xi) = \{ z \in \mathbf{C} : |z| < \xi \exp(-\beta G(X_{\bar\Lambda}) - \beta B) \}. \qquad /2.7/$$

Как известно[6,16], вектор $\rho_\Lambda(z|X_{\bar\Lambda})$ тождественно удовлетворяет уравнениям КЗ вида

$$\phi = z\alpha^{(1)}_\Lambda (X_{\bar\Lambda}) + zK_\Lambda \phi, \qquad /2.8/$$

где

$$\alpha^{(1)}_\Lambda (X_{\bar\Lambda}) = e^{-\beta \hat W_1 (X_{\bar\Lambda})} \hat\chi_\Lambda \alpha, \qquad \alpha = \{1, 0, 0, \dots, 0, \dots\};$$

$$K_\Lambda = e^{-\beta \hat W_1 (X_{\bar\Lambda})} \hat\chi_\Lambda K;$$

$$(K\phi)(x_1) = \sum_{n=1} \frac{1}{n!} \int_{R^{n\nu}} dY_n \, K_\Phi(x_1, Y_n) \phi_n(Y_n); \qquad /2.9/$$

$$(K\phi)(X_m) = e^{-\beta W(x_1, X_m \setminus x_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{R^{n\nu}} dY_n K_\Phi(x_1, Y_n) \phi_{n+m-1}(Y_n \cup (X_m \setminus x_1)),$$
$$m \geq 2.$$

Здесь, по определению, $K_\Phi(x_1, \emptyset) = 1$ и, кроме того,

$$K_\Phi(x_1, Y_n) = \prod_{y \in Y_n} (e^{-\beta\Phi(x_1 - y)} - 1),$$

$$(\hat\chi_\Lambda \phi)(X_m) = \chi_\Lambda(X_m) \phi_m(X_m), \qquad /2.10/$$

$$(\hat W_1(X_{\bar\Lambda}) \hat\chi_\Lambda \phi)(X_m) = W(x_1, X_{\bar\Lambda}) \chi_\Lambda(X_m) \phi_m(X_m).$$

Тождеств /или уравнений, обсуждение см. в [16]/ КЗ достаточно для исследования термодинамического предела корреляционных функций для случая неотрицательных потенциалов [1,2], или потенциалов с твердой сердцевиной /см. §4.2 в [3], а также [17]/, поскольку для этих частных случаев сверхустойчивых потенциалов взаимодействия /см.§3.2 в [3]/ операторы K_Λ и K ограничены в пространстве E_ξ, если выполнено условие /2.2/. В общем случае устойчивого взаимодействия $K_\Lambda : E_\xi \to E_{e^{2\beta B}\xi}$. Поэтому обычно используют следующую модификацию уравнения /2.8/ и операторов КЗ /2.9/, предложенную Рюэлем [2]: из условия устойчивости /2.1/ следует, что в пространстве E_ξ существует оператор Π:

$$(\Pi\phi)(X_m) = \phi_m(x_\pi \cup (X_m \setminus x_\pi)), \qquad /2.11/$$

такой, что $W(x_\pi, X_m \setminus x_\pi) \geq -2B$. Тогда для операторов КР /в конечном и бесконечном объемах/ ΠK_Λ и ΠK имеем

$$\|\Pi K\|_{E_\xi} \leq e^{2\beta B} \xi^{-1} e^{\xi C(\beta)},$$
$$\|\Pi K_\Lambda\|_{E_\xi} \leq e^{\beta(G(X_{\bar\Lambda}) + 2B)} \xi^{-1} e^{\xi C(\beta)}. \qquad /2.12/$$

В силу замечания 2.1 вектор $\rho_\Lambda(z|X_{\bar\Lambda})$ тождественно удовлетворяет также уравнению КР:

$$\phi = z\alpha^{(\pi)}_\Lambda (X_{\bar\Lambda}) + z\Pi K_\Lambda \phi. \qquad /2.13/$$

Предложение 2.1[16]. Пусть $X_{\bar\Lambda} \in \Omega_{\bar\Lambda}$, а парный потенциал взаимодействия $\Phi(x)$ является устойчивым и регулярным. Тогда для каждого $\xi > 0$ уравнение КР /2.13/ для сосуда Λ имеет в БХ-пространстве $E^s_\xi(\Lambda) = \hat\chi_\Lambda E^s_\xi$ единственное решение, которое

а/ $\|\cdot\|_\xi$ -аналитично в области $C_-(\xi)$ /круг аналитичности/:

$$C_-(\xi) = \{ z \in \mathbf{C} : |z| < \xi e^{-\xi C(\beta)} \cdot e^{-\beta(G(X_{\bar\Lambda}) + 2B)} \} \subset C_+(\xi); \qquad /2.14/$$

б/ $\|\cdot\|_\xi$ -мероморфно в области $C_+(\xi)$, см. /2.7/, и совпадает в этой области с сужением $\rho_\Lambda(z|X_{\bar\Lambda}) \restriction C_+(\xi)$;

в/ имеет вид

$$\rho_\Lambda(z|X_{\bar\Lambda}) = R_{z^{-1}}(\Pi K_\Lambda)\, \alpha^{(\pi)}_\Lambda (X_{\bar\Lambda}), \qquad /2.15/$$

где $R_\lambda(\Pi K_\Lambda) = (\lambda I - \Pi K_\Lambda)^{-1}$ резольвента оператора ΠK_Λ.

Для $\Lambda = R^\nu$ определим формально уравнение КР в бесконечном объеме

$$\phi = z\alpha + z\Pi K \phi . \qquad /2.16/$$

Тогда из /2.12/ следует, что уравнение /2.16/ имеет единственное решение

$$\rho(z) = R_{z^{-1}}(\Pi K)\alpha \in E_\xi \qquad /2.17/$$

для $z \in \mathbb{S}_0(\xi)$. Решение /2.17/ $\|\cdot\|_\xi$ -аналитично в этой области и является максимальным аналитическим продолжением правой части /2.17/ по параметру z из круга $C^o_-(\xi) \subset \mathbb{S}_0(\xi)$ /здесь $C^o_-(\xi)$ соответствует $G(X_{\bar\Lambda}) = 0$, см. /2.14//, внутри которого

$$\|\rho(z)\|_\xi \le |z| \, (1 - |z| \, e^{2\beta B} \xi^{-1} e^{\xi C(\beta)})^{-1} . \qquad /2.18/$$

Для пустых граничных условий: $X_{\bar\Lambda} = \{\emptyset\}$, оценки норм операторов ΠK_Λ и ΠK совпадают, см. /2.13/. Поэтому, используя представления /2.15/ и /2.17/, с помощью серии оценок внутри круга аналитичности $C^o_-(\xi)$ удается исследовать поведение вектора $\rho(z) - \rho_\Lambda(z|\emptyset)$ для возрастающего семейства сосудов $\Lambda \nearrow \boldsymbol{R}^\nu$, например, в смысле Ван Хова /§2.1 в работе [3] /.

<u>Предложение 2.2 /теорема БР/</u>. Пусть $\Phi(x)$ - устойчивый регулярный потенциал парного взаимодействия и граничные условия $X_{\bar\Lambda} = \{\emptyset\}$ для любого $\Lambda \subset \boldsymbol{R}^\nu$. Тогда для $z \subset C^o_-(\xi)$ предельные корреляционные функции существуют, единственны и принадлежат БХ-пространству E^s_ξ и совпадают с решением /2.17/ в том смысле, что для любого ограниченного измеримого множества $\Delta \subset \boldsymbol{R}^\nu$

$$\lim_{\Lambda \nearrow \boldsymbol{R}^\nu} \|\hat\chi_\Delta \rho(z) - \hat\chi_\Delta \rho_\Lambda(z|\emptyset)\|_\xi = 0 . \qquad /2.19/$$

<u>Замечание 2.2</u>. В работе [4] доказательство предложения 2.2 проведено /с соответствующими модификациями/ для более сложного случая канонического ансамбля. В настоящей работе предложение 2.2 будет доказано для непустых граничных условий и для активностей из области

$$\mathbb{S}(\xi) = \Big(\bigcap_{\Lambda \nearrow \boldsymbol{R}^\nu} P_z(\Pi K_\Lambda) \Big) \cap \mathbb{S}_0(\xi) , \qquad /2.20/$$

где $P_z(\Pi K_\Lambda)$ - резольвентное множество оператора ΠK_Λ для активностей. Технически более сложное доказательство для канонического ансамбля можно провести в прямой аналогии с идеями работы [4], если воспользоваться полученными в этой работе уравнениями типа уравнений КР для функций распределения, см. также замечания [5].

3. ДУАЛЬНАЯ ПАРА $\langle {}'E_\xi, E_\xi \rangle$. ОПЕРАТОРЫ КИРКВУДА-РЮЭЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $'E_\xi$

Схема нового доказательства теоремы БР, которое приведено ниже /раздел 4/, сводится к следующему:
а/ для устойчивых регулярных потенциалов взаимодействия и определенного класса граничных условий с помощью /2.15/ и /2.17/ устанавливается сходимость семейства корреляционных функций $\{\rho_\Lambda(z|X_{\bar\Lambda})\}_{\Lambda \subset \boldsymbol{R}^\nu}$ при $\Lambda \nearrow \boldsymbol{R}^\nu$ в $*$-слабой топологии на E_ξ;
б/ с помощью тождеств Майера-Монтролла /см. §4.2 в [3], а также [16]/ доказывается равномерная сходимость $\{\rho_\Lambda(z, X_m|X_{\bar\Lambda})\}_{\Lambda \subset \boldsymbol{R}^\nu}$ на компактах $\Delta^m \subset \boldsymbol{R}^{m\nu}$ /ср. с /2.19//.

Напомним, что $*$-слабая топология в пространстве E_ξ задается непрерывными линейными функционалами $\{\langle f, \phi \rangle\}_{f \in {}'E_\xi}$, где $\phi \in E_\xi$, которые порождаются элементами банахова пространства $'E_\xi$, такого, что сопряженное пространство $({}'E_\xi)^* = E_\xi$ /см. гл. IV §3.3 в [18] или гл. IV.5 в [19] /. Пространства $\langle {}'E_\xi, E_\xi \rangle$ образуют дуальную пару, а непосредственно из определения 2.2 следует, что

$$\langle f, \phi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\boldsymbol{R}^{n\nu}} dY_n \, \bar f_n(Y_n) \, \phi_n(Y_n) ,$$

$$'E_\xi = \{ f : \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \|f_n(X_n)\|_{L^1(\boldsymbol{R}^{n\nu})} = \|f\|'_\xi < \infty \} . \qquad /3.1/$$

Для реализации пункта а в качестве первого шага установим, что в пространстве $'E_\xi$ существуют ограниченные операторы $'\Pi K_\Lambda$ и $'\Pi K$, такие, что $('\Pi K_\Lambda)^* = \Pi K_\Lambda$ и $('\Pi K)^* = \Pi K$. Заметим, что из существования ограниченных операторов КР в пространстве E_ξ этот факт непосредственно не следует /см. гл. VI.9 в [20]/. Поэтому ниже приведено прямое доказательство существования операторов КР в пространстве $'E_\xi$.

<u>Лемма 3.1</u>. В пространстве $'E_\xi$ существует оператор $'\Pi$: $'E_\xi \to {}'E_\xi$, такой, что

$$({}'\Pi)^* = \Pi . \qquad /3.2/$$

<u>Доказательство</u>. Из условий устойчивости /2.1/ и $\Phi(x) = \Phi(-x)$ следует, что множество конфигураций

$$\omega_i(m) = \{ X_m \in \boldsymbol{R}^{m\nu} : W(x_i, X_m \setminus x_i) > -2B \} \ne \{\emptyset\}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

причем

$$\chi_{\omega_i(m)}(X_m) = \chi_{\omega_i(m)}(x_i \cup (X_m \setminus x_i)) . \qquad /3.3/$$

Поскольку в общем случае $\omega_i(m) \cap \omega_k(m) \neq \{\phi\}$, то введем /см. /2/ / оператор $\hat{\nu}_j : E_\xi \to E_\xi$, такой, что

$$(\hat{\nu}_j \phi)(X_m) = \nu_j(X_m)\phi_m(X_m),$$

$$\nu_j(X_m) = \chi_{\omega_j(m)}(X_m)\left(\sum_{i=1}^{m} \chi_{\omega_i(m)}(X_m)\right)^{-1}, \qquad /3.4/$$

и оператор $\hat{\pi}_j : E_\xi \to E_\xi$, который определяется выражением

$$(\hat{\pi}_j \phi)(X_m) = \theta(m-j+1)\phi_m(x_j \cup (X_m \setminus x_j)). \qquad /3.5/$$

Здесь θ - функция определена так, что $\theta(0)=0$ и $\theta(n>0)=1$. Оператор /2.11/ можно тогда представить в виде

$$\Pi = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\pi}_j \hat{\nu}_1 . \qquad /3.6/$$

Более того, из определений /3.3/-/3.6/ с помощью простых вычислений для $f \in {}'E_\xi$ и $\phi \in E_\xi$ получаем

$$\langle f, \Pi\phi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^{n\nu}} dY_n \, \nu_1(Y_n) \sum_{j=1}^{n} (\hat{\pi}_j f)(Y_n)\phi_n(Y_n) = \langle {}'\Pi f, \phi\rangle,$$

$$/3.7/$$

$${}'\Pi = \hat{\nu}_1 \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\pi}_j . \qquad \square$$

Теорема 3.1. В пространстве ${}'E_\xi$ существует оператор $\widetilde{\Pi K}$, такой, что

$$(\widetilde{\Pi K})^* = \Pi K. \qquad /3.8/$$

Доказательство. Оператор K /см. /2.9// можно представить в виде

$$K = e^{-\beta\hat{W}} \kappa ,$$

$$(\kappa\phi)(X_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{n+m-1} \frac{1}{n!} \int_{R^{n\nu}} dY_n \, K_\Phi(x_1, Y_n)\phi_{n+m-1}(Y_n \cup (X_m \setminus x_1)),$$

$$/3.9/$$

$$(\hat{W}\phi)(X_m) = W(x_1, X_m \setminus x_1)\phi_m(X_m).$$

Из /3.7/ следует, что для произвольного вектора g из множества ${}'\Pi\, {}'E_\xi$ функционал $\langle g, K\phi\rangle$, $\phi \in E_\xi$, ограничен. Поэтому, используя /3.9/, получаем

$$\langle g, K\phi\rangle = \langle {}'Kg, \phi\rangle,$$

$${}'Kg = {}'\kappa\, e^{-\beta\hat{W}} g, \qquad /3.10/$$

$$({}'\kappa h)(X_m) = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} \int_{R^\nu} dy \, K_\Phi(y, X_n) h_{1+m-n}(y \cup (X_m \setminus X_n)), \quad h \in {}'E_\xi.$$

Поскольку $g \in {}'\Pi\, {}'E_\xi$, то из первого равенства /3.10/ следует

$$\widetilde{\Pi K} = {}'K\, {}'\Pi. \quad \square \qquad /3.11/$$

Следствие 3.1. Аналогично для оператора ΠK_Λ /см. определения /2.9// получаем

$$\widetilde{\Pi K}_\Lambda = {}'K_\Lambda {}'\Pi,$$

$$/3.12/$$

$${}'K_\Lambda = {}'\kappa\, e^{-\beta\hat{W}} \cdot e^{-\beta\hat{W}_1(X_{\bar\Lambda})} \hat{\chi}_\Lambda .$$

Замечание 3.1. Как известно, $\|{}'K\,{}'\Pi\|_{{}'E_\xi} = \|\Pi K\|_{E_\xi}$ $\|{}'K_\Lambda {}'\Pi\|_{{}'E_\xi} = \|\Pi K_\Lambda\|_{E_\xi}$.

Кроме того, из теоремы Филлипса /см. гл. VI.3 в /19/ / следует, что соответствующие резольвенты в пространстве ${}'E_\xi$ имеют вид

$$R_\lambda({}'K\,{}'\Pi) = {}'R_\lambda(\Pi K), \quad R_\lambda({}'K_\Lambda {}'\Pi) = {}'R_\lambda(\Pi K_\Lambda), \qquad /3.13/$$

а для спектров имеем

$$\sigma({}'K\,{}'\Pi) = \sigma(\Pi K), \quad \sigma({}'K_\Lambda {}'\Pi) = \sigma(\Pi K_\Lambda) . \qquad /3.14/$$

4. w* -СХОДИМОСТЬ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ. ТЕОРЕМА БОГОЛЮБОВА-РЮЭЛЯ ДЛЯ НЕПУСТЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Если сосуд $\Lambda \nearrow R^\nu$ /в смысле Ван Хова/, это порождает некоторое семейство $\{X_{\bar\Lambda}\}_{\Lambda \subset R^\nu}$ граничных условий вне сосуда. Обычно /см., например, /9,21/ / полагают, что фазовое пространство бесконечной системы $\Omega = \{X\}$ состоит из локально конечных конфигураций: для каждой конфигурации $X \in \Omega$ величина $\mathrm{card}\, X_\Delta < \infty$ для любой ограниченной области $\Lambda \subset R^\nu$, здесь $X_\Delta = X \restriction \Delta$. Из определения 2.1 тогда следует, что для частиц с твердой сердцевиной и регулярным потенциалом $\Omega_{\bar\Lambda} = \Omega \restriction (R^\nu \setminus \Lambda) = \Omega_{\bar\Lambda}$, а для общего случая устойчивых регулярных потенциалов взаимодействия $\Omega'_{\overline{\Lambda}} \subset \Omega_{\overline{\Lambda}}$. Чтобы контролировать рост плотности числа частиц в семействе граничных условий $\{X_{\overline{\Lambda}}\}_{\Lambda \subset \boldsymbol{R}^{\nu}}$, введем следующее

Определение 4.1. Подмножество $\Omega(d) \subset \Omega$ состоит из конфигураций с конечной плотностью частиц d на бесконечности, если для любой конфигурации $X \in \Omega(d)$ существует такой сосуд $\Lambda(X)$, что $\mathrm{card}\, X_{\Delta} \le d$ для любой области $\Delta \subset \boldsymbol{R}^{\nu} \setminus \Lambda(X)$ с $|\Delta| = 1$.

Если $X_{\overline{\Lambda}_0} \in \Omega(d)$, то из регулярности взаимодействия /2.2/ и определения 4.1 следует, что для всех $\Lambda \supset \Lambda(X_{\overline{\Lambda}_0})$ конфигурации $\{Y_{\overline{\Lambda}} = X_{\overline{\Lambda}_0} \restriction \overline{\Lambda}\} \subset \Omega'_{\overline{\Lambda}}$ /см. /2.3//. Более того, пусть

$$\{\Gamma_{\Lambda}(X_{\overline{\Lambda}_0})\} = \{X_{\overline{\Lambda}_0} \restriction (\boldsymbol{R}^{\nu} \setminus \Lambda) \colon \Lambda \supset \Lambda_0\} \qquad /4.1/$$

- семейство граничных условий, порождаемых конфигурацией $X_{\overline{\Lambda}_0}$, тогда имеет место следующее утверждение.

Лемма 4.1. Если $X_{\overline{\Lambda}_0} \in \Omega(d)$, тогда для любого ограниченного измеримого множества $\Delta \subset \boldsymbol{R}^{\nu}$ и регулярного потенциала парного взаимодействия имеем

$$\lim_{\Lambda \nearrow \boldsymbol{R}^{\nu}} \| W(x, \Gamma_{\Lambda}(X_{\overline{\Lambda}_0})) \|_{L^{\infty}(\Delta)} = 0 . \qquad /4.2/$$

Доказательство. Если $\Phi_{\pm}(x)$ - неотрицательная /отрицательная/ части потенциала взаимодействия, тогда

$$\sum_{y \in \Gamma_{\Lambda}(X_{\overline{\Lambda}_0})} \Phi_{-}(x-y) \le W(x, \Gamma_{\Lambda}(X_{\overline{\Lambda}_0})) \le \sum_{y \in \Gamma_{\Lambda}(X_{\overline{\Lambda}_0})} \Phi_{+}(x-y) . \qquad /4.3/$$

Из условий леммы следует, что существует сосуд Λ', такой, что $\Lambda' \supset \Delta$, $\Lambda' \supset \Lambda(X_{\overline{\Lambda}_0})$ и

$$\| \sum_{y \in \Gamma_{\Lambda}(X_{\overline{\Lambda}_0})} \Phi_{\pm}(x-y) \|_{L^{\infty}(\Delta)} \le d \int_{|\lambda| \ge \mathrm{dist}(\partial\Delta, \partial\Lambda)} d\lambda \, |\Phi_{\pm}(\lambda)| \qquad /4.4/$$

для всех $\Lambda \supset \Lambda'$. Из условия /2.2/ следует, что $\Phi_{\pm}(x) \in L^{1}(\boldsymbol{R}^{\nu} \setminus S)$, где S - некоторый шар с центром в начале координат. Поскольку при $\Lambda \nearrow \boldsymbol{R}^{\nu}$ величина $\mathrm{dist}(\partial\Delta, \partial\Lambda) \to \infty$, то из оценок /4.3/ и /4.4/ следует /4.2/. ☐

Лемма 4.2. Пусть $\Phi(x)$ - устойчивый регулярный потенциал парного взаимодействия, а граничное условие $X_{\overline{\Lambda}_0} \in \Omega(d)$. Тогда

при $\Lambda \nearrow \boldsymbol{R}^{\nu}$ существует сильный предел семейства операторов $\{\widetilde{\Pi K}_{\Lambda}\}_{\Lambda \subset \boldsymbol{R}^{\nu}}$, причем

$$\operatorname*{s-lim}_{\Lambda \nearrow \boldsymbol{R}^{\nu}} \widetilde{\Pi K}_{\Lambda} = \widetilde{\Pi K} . \qquad /4.5/$$

Доказательство. Пусть $f \in {}'E_{\xi}$, тогда из /3.11/, /3.12/ получаем

$$\| (\widetilde{\Pi K}_{\Lambda} - \widetilde{\Pi K}) f \|'_{\xi} = \| \widetilde{\Pi K} (e^{-\beta \hat{W}_1(\Gamma_{\Lambda})} \hat{\chi}_{\Lambda} - I) f \|'_{\xi} \le$$

$$\le \| \widetilde{\Pi K} \|_{'E_{\xi}} \| (e^{-\beta \hat{W}_1(\Gamma_{\Lambda})} \hat{\chi}_{\Lambda} - I) f \|'_{\xi} . \qquad /4.6/$$

Из $f \in {}'E_{\xi}$ следует, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое ограниченное измеримое множество $\Delta_{\epsilon} \subset \boldsymbol{R}^{\nu}$, что $\| f - \hat{\chi}_{\Delta_{\epsilon}} f \|'_{\xi} < \epsilon$. Поэтому из оценки

$$\| (e^{-\beta \hat{W}_1(\Gamma_{\Lambda})} \hat{\chi}_{\Lambda} - I) f \|'_{\xi} \le \| (e^{-\beta \hat{W}_1(\Gamma_{\Lambda})} \hat{\chi}_{\Lambda_{\epsilon}} - I) \hat{\chi}_{\Delta_{\epsilon}} f \|'_{\xi} + \| (e^{-\beta \hat{W}_1(\Gamma_{\Lambda})} \hat{\chi}_{\Lambda} - I)(f -$$

$$- \hat{\chi}_{\Delta_{\epsilon}} f) \|'_{\xi} \le \| (e^{-\beta W(x_1, \Gamma_{\Lambda})} \chi_{\Lambda}(x_1) - I) \chi_{\Delta_{\epsilon}}(x_1) \|_{L^{\infty}(\boldsymbol{R}^{\nu})} \| f \|'_{\xi} + \qquad /4.7/$$

$$+ (\| e^{-\beta W(x_1, \Gamma_{\Lambda})} \|_{L^{\infty}(\boldsymbol{R}^{\nu})} + 1) \| f - \hat{\chi}_{\Delta_{\epsilon}} f \|'_{\xi}$$

с помощью леммы 4.1 и неравенства /4.6/ получаем при $\Lambda \nearrow \boldsymbol{R}^{\nu}$ сильную сходимость /4.5/ в пространстве ${}'E_{\xi}$. ☐

Следствие 4.1. Сильная сходимость /4.5/ вместе с замечанием 3.2 влечет /см. гл. VIII.7 в [19] или гл. VIII, §1.1 в [22] / сильную сходимость резольвент в ${}'E_{\xi}$:

$$\operatorname*{s-lim}_{\Lambda \nearrow \boldsymbol{R}^{\nu}} R_{z^{-1}}(\widetilde{\Pi K}_{\Lambda}) = R_{z^{-1}}(\widetilde{\Pi K}) \qquad /4.8/$$

для $z \in S(\xi)$ /см. /2.20//.

Следствие 4.2. Напомним, что w^*-сходимость векторов в пространстве E_{ξ} определяется $*$-слабой топологией на E_{ξ}. Поэтому из оценок /4.6/, /4.7/ для любого $\phi \in E_{\xi}$ получаем

$$\operatorname*{w^*-lim}_{\Lambda \nearrow \boldsymbol{R}^{\nu}} (\Pi K_{\Lambda} - \Pi K) \phi = 0 ,$$

$$\operatorname*{w^*-lim}_{\Lambda \nearrow \boldsymbol{R}^{\nu}} (e^{-\beta \hat{W}_{\pi}(\Gamma_{\Lambda})} \hat{\chi}_{\Lambda} - I) \phi = 0 . \qquad /4.9/$$

Теорема 4.1 / w* -сходимость векторов $\rho_\Lambda(z|\Gamma_\Lambda)$/. Пусть $\Phi(x)$ - устойчивый регулярный потенциал парного взаимодействия, а граничное условие $X_{\bar\Lambda_0} \in \Omega(d)$. Тогда для любого $z \in \mathbb{S}(\xi)$ существует предел:

$$w^*-\lim_{\Lambda \nearrow R^\nu} \rho_\Lambda(z|\Gamma_\Lambda(X_{\bar\Lambda_0})) = \rho(z) \in E_\xi , \qquad /4.10/$$

который не зависит от граничного условия и является единственным решением уравнения /2.16/.

Доказательство. С помощью /2.15/, /2.17/ и /3.13/, /3.14/ для $f \in {}'E_\xi$ и $z \in \mathbb{S}(\xi)$ получаем

$$<f,\rho_\Lambda(z|\Gamma_\Lambda)-\rho(z)> = <f, R_{z^{-1}}(\Pi K_\Lambda)(\Pi K_\Lambda - \Pi K) R_{z^{-1}}(\Pi K)\alpha> +$$

$$+<f, R_{z^{-1}}(\Pi K_\Lambda)(e^{-\beta\hat W_\pi(\Gamma_\Lambda)}\hat\chi_\Lambda - I)\alpha> = <R_{z^{-1}}(\widetilde{\Pi K}_\Lambda) f, (\Pi K_\Lambda - \Pi K) \times \qquad /4.11/$$

$$\times R_{z^{-1}}(\Pi K)\alpha> + <R_{z^{-1}}(\widetilde{\Pi K}_\Lambda)f, (e^{-\beta \hat W_\pi(\Gamma_\Lambda)}\hat\chi_\Lambda - I)\alpha> .$$

Заметим теперь, что для дуальной пары $<{}'E_\xi, E_\xi>$ из существования /при $n \to \infty$ / пределов $g_n \xrightarrow{\|\cdot\|'_\xi} g \in {}'E_\xi$ и $\psi_n \xrightarrow{w^*} \psi \in E_\xi$ следует сходимость $<g_n,\psi_n> \to <g,\psi>$ /см., например, гл. III, §1.7 в[22]/. Поэтому правая часть /4.11/ в силу /4.8/, /4.9/ сходится при $\Lambda \nearrow R^\nu$ к нулю, что и доказывает /4.10/. □

Следствие 4.2 /w* -сходимость корреляционных функций/. Из /4.10/ для любого фиксированного $m \geq 1$ получаем сходимость корреляционных функций $\{\rho_\Lambda(z,X_m|\Gamma_\Lambda)\}_{m\geq 1}$ в $*$-слабой топологии на $L^\infty(R^\nu)$:

$$w^*-\lim_{\Lambda \nearrow R^\nu} \rho_\Lambda(z,X_m|\Gamma_\Lambda) = \rho(z,X_m) . \qquad /4.12/$$

Теорема 4.2 /теорема БР для $X_{\bar\Lambda} \neq \{\emptyset\}$ и $z \in \mathbb{S}(\xi)$ /. Пусть выполнены условия теоремы 4.1, тогда для $z \in \mathbb{S}(\xi)$, $m \geq 1$ и любого компакта $\Delta \subset R^\nu$ имеем

$$\lim_{\Lambda \nearrow R^\nu} \|\chi_\Delta(X_m)\rho_\Lambda(z,X_m|\Gamma_\Lambda) - \chi_\Delta(X_m)\rho(z,X_m)\|_{L^\infty(R^{m\nu})} = 0 . \qquad /4.13/$$

Доказательство. Напомним /см. [16,23]/, что итерации тождеств КЗ приводят к тождествам Майера-Монтролла:

$$\rho_\Lambda(z,X_m|X_{\bar\Lambda}) = \chi_\Lambda(X_m) z^m e^{-\beta U(X_m)-\beta W(X_m, X_{\bar\Lambda})} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{R^{n\nu}} dY_n\, M_\Phi(X_m,Y_n)\, \rho_\Lambda(z,Y_n|X_{\bar\Lambda}) ;$$

$$\rho(z,X_m) = z^m e^{-\beta U(X_m)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{R^{n\nu}} dY_n\, M_\Phi(X_m,Y_n)\rho(z,Y_n) ; \qquad /4.14/$$

$$M_\Phi(X_m,Y_n) = \prod_{y \in Y_n} (e^{-\beta W(X_m, y)} - 1), \quad M_\Phi(X_m, \emptyset) = 1 .$$

С помощью /4.14/ получаем

$$\chi_\Delta(X_m)(\rho_\Lambda(z,X_m|\Gamma_\Lambda) - \rho(z,X_m)) = z\ e^{-\beta U(X_m)}\chi_\Delta(X_m) \times$$

$$\times (e^{-\beta W(X_m,\Gamma_\Lambda)} \chi_\Lambda(X_m) - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{R^{n\nu}} dY_n\, M_\Phi(X_m,Y_n)\rho(z,Y_n) +$$

$$+ z^m e^{-\beta U(X_m)-\beta W(X_m,\Gamma_\Lambda)} \chi_\Lambda(X_m) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{R^{n\nu}} dY_n\, M_\Phi(X_m,Y_n) \times \qquad /4.15/$$

$$\times (\rho_\Lambda(z,Y_n|\Gamma_\Lambda) - \rho(z,Y_n)) .$$

Из оценки /см. [24]/

$$|M_\Phi(X_m,Y_n)| \leq \prod_{y \in Y_n} [\sum_{i=1}^{m} |e^{-\beta\Phi(x_i-y)} - 1| \prod_{1 \leq j < i} e^{-\beta\Phi(x_j-y)}], \qquad /4.16/$$

а также регулярности и устойчивости потенциала парного взаимодействия следует, что интегральные ядра $\{M_\Phi(X_m,Y_n)\}_{m,n\geq 1}$ задают отображения

$$M_\Phi(\cdot,\cdot) : R^{m\nu} \to L^1(R^{n\nu}) , \qquad /4.17/$$

которые равномерно ограничены по норме $\|\cdot\|_{L^1(R^{n\nu})}$, для $X_m \in R^{m\nu}$:

$$\|M_\Phi(X_m, Y_n)\|_{L^1(R^{n\nu})} \le (mC(\beta)e^{2m\beta B})^n . \qquad /4.18/$$

Поэтому для любого $X_m \in R^{m\nu}$ вектор $\{\frac{1}{n!} M_\Phi(X_m, Y_n)\}_{n\ge 1} \in {}'E_\xi$, причем его норма не превосходит величины $\exp(mC(\beta)e^{2m\beta B})$. Результат /4.13/ получаем тогда из тождества /4.15/ с помощью предельного перехода $\Lambda \nearrow R^\nu$, если учесть /4.2/ и /4.12/. □

Результат теоремы 4.2 можно несколько усилить, если потребовать выполнения одного дополнительного условия.

Определение 4.2 [23]. Потенциал $\Phi(x)$ называется регулярным снизу, если существует положительная монотонно убывающая функция $\Psi(t)$ на полуоси R^1_+, такая, что

$$\int_0^\infty dt\, t^{\nu-1}\Psi(t) < \infty ,$$

и для всех $x \in R^\nu$ имеем

$$\Phi(x) \ge -\Psi(|x|) .$$

Теорема 4.3 /равномерная сходимость на компактах/. Пусть выполнены условия теоремы 4.1 и, кроме того, потенциал парного взаимодействия регулярен снизу. Тогда для $z \in \mathcal{S}(\xi)$, $m \ge 1$, и любого компакта $\Lambda \subset R^\nu$ имеем

$$\lim_{\Lambda \nearrow R^\nu} \sup_{X^m \in \Lambda^m} |\rho_\Lambda(z, X_m|\Gamma_\Lambda) - \rho(z, X_m)| = 0 . \qquad /4.19/$$

Доказательство. Воспользуемся представлением /4.15/. Тогда из /4.2/ с учетом регулярности потенциала парного взаимодействия снизу получаем

$$\lim_{\Lambda \nearrow R^\nu} \sup_{X^m \in \Lambda^m} |e^{-\beta W(X_m; \Gamma_\Lambda)} \chi_\Lambda(X_m) - 1| = 0 . \qquad /4.20/$$

Поэтому из оценки /4.18/ следует, что первое слагаемое в сумме /4.15/ при $\Lambda \nearrow R^\nu$ сходится к нулю равномерно по $X_m \in \Lambda^m$. Для оценки второго слагаемого заметим, что из w^* -сходимости /4.10/ следует ограниченность семейства $\{\rho_\Lambda(z|\Gamma_\Lambda)\}_{\Lambda \subset R^\nu}$ в пространстве E_ξ /см. гл. III, §1.7 в [20]/, то есть $\|\rho_\Lambda(z|\Gamma_\Lambda)\|_\xi \le \delta(z)$. Поэтому для любого $\epsilon > 0$ найдется такое n_ϵ, что для $n > n_\epsilon$ получаем /см. /4.18// оценку

$$|\sum_{n>n_\epsilon}^\infty \frac{1}{n!} \int_{R^{n\nu}} dY_n\, M_\Phi(X_m, Y_n)(\rho_\Lambda(z, Y_n|\Gamma_\Lambda) - \rho(z, Y_n))| \le$$

$$\le \sum_{n>n_\epsilon}^\infty \frac{1}{n!} \xi^n (\delta(z) + \|\rho(z)\|_\xi)(mC(\beta)e^{2m\beta B})^n < \epsilon . \qquad /4.21/$$

Для оставшейся конечной суммы воспользуемся оценкой /4.16/, тогда

$$|\sum_{n=1}^{n_\epsilon} \frac{1}{n!} \int_{R^{n\nu}} dY_n\, M_\Phi(X_m, Y_n)(\rho_\Lambda(z, Y_n|\Gamma_\Lambda) - \rho(z, Y_n))| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{n_\epsilon} \frac{1}{n!} | \int_{D^n_\epsilon} dY_n\, M_\Phi(X_m, Y_n)(\rho_\Lambda(z, Y_n|\Gamma_\Lambda) - \rho(z, Y_n))| +$$

$$+ \sum_{n=1}^{n_\epsilon} \frac{1}{n!} | \int_{R^{n\nu} \setminus D^n_\epsilon} dY_n\, M_\Phi(X_m, Y_n)(\rho_\Lambda(z, Y_n|\Gamma_\Lambda) - \rho(z, Y_n))| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{n_\epsilon} \frac{1}{n!} (m \sup_{\substack{x \in \Lambda \\ y \in D_\epsilon}} |e^{-\beta\Phi(x-y)} - 1| e^{2m\beta B})^n \|\rho_\Lambda(z, X_m|\Gamma_\Lambda) - \rho(z, X_m)\|_{L^1(D^m_\epsilon)} + \qquad /4.22/$$

$$+ \sum_{n=1}^{n_\epsilon} \frac{1}{n!} \xi^n (\delta(z) + \|\rho(z)\|_\xi)(me^{2m\beta B})^n \times$$

$$\times (\sup_{x \in \Lambda} \int_{R^\nu \setminus D_\epsilon} dy\, |e^{-\beta\Phi(x-y)} - 1|) .$$

Из регулярности потенциала $\Phi(x)$ следует, что область $D_\epsilon \supset \Lambda$ можно выбрать так, что последнее слагаемое в правой части /4.22/ будет меньше ϵ. Поскольку оценка /4.21/ равномерна по Λ, а при $\Lambda \nearrow R^\nu$ первое слагаемое в правой части /4.22/ сходится к нулю в силу теоремы 4.1, то оценки /4.20/-/4.21/ вместе с /4.15/ доказывают /4.19/. □

Следствие 4.3. Если $\exp(-\beta\Phi(x)) \in C(R^\nu)$, тогда $\rho_\Lambda(z, X_m|\Gamma_\Lambda) \in C(R^{m\nu})$.

Поэтому в силу /4.19/ предельные корреляционные функции также являются непрерывными по $X_m \in R^{m\nu}$, а теорема 4.3 утверждает тогда, что функции $\{\rho_\Lambda(z, X_m|\Gamma_\Lambda)\}_{\Lambda \subset R^\nu}$ сходятся при $\Lambda \nearrow R^\nu$ в топологии компактной сходимости.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Теоремы 4.2 и 4.3 являются обобщением теоремы БР для большого канонического ансамбля /см. предложение 2.2/ в следующем смысле:

а/ доказано существование и единственность предельных корреляционных функций для непустых граничных условий из множества $\Omega(d)$ и активностей $z \in \mathfrak{S}(\xi)$ /независимость от граничных условий/;

б/ предельные корреляционные функции $\|\cdot\|_\xi$ -аналитичны в области $\mathfrak{S}(\xi)$, которая содержит стандартный круг аналитичности $C_- = \{z \in \mathbf{C}: |z| < \exp(-2\beta B - 1)\}$ при $\xi = C(\beta)^{-1}$ /см. §4.2 в [3]/;

в/ при дополнительном условии регулярности парного потенциала взаимодействия снизу корреляционные функции $\{\rho_\Lambda(z, X_m|\Gamma_\Lambda)\}_{\Lambda \subset \mathbf{R}^\nu}$ при $\Lambda \nearrow \mathbf{R}^\nu$ на компактах сходятся равномерно /ср. с §.4.2 в [3]/.

Замечание 5.1 /свойство ослабления корреляций/. Из определений 2.4 и 2.5 следует, что условные корреляционные функции $\rho_\Lambda(z, X_m | Y_n \cup X_{\bar\Lambda})$, $Y_n \in \Lambda^n$ удовлетворяют обычному соотношению для условных вероятностей:

$$\rho_\Lambda(z, X_m | Y_n \cup X_{\bar\Lambda}) = \frac{\rho_\Lambda(z, X_m \cup Y_n | X_{\bar\Lambda})}{\rho_\Lambda(z, Y_n | X_{\bar\Lambda})} .$$

Поэтому из теоремы 4.3 следует, что при $\Lambda \nearrow \mathbf{R}^\nu$ и $\mathrm{dist}(\partial\Delta, \partial D) \to \infty$, $\mathrm{dist}(\partial\Delta, \partial\Lambda) \to \infty$, $\mathrm{dist}(\partial D, \partial\Lambda) \to \infty$ для компактов $\Delta, D \subset \mathbf{R}^\nu$ получаем

$$\chi_\Delta(X_m)\chi_D(Y_n)\rho_\Lambda(z, X_m \cup Y_n|\Gamma_\Lambda) \to \chi_\Delta(X_m)\rho(z, X_m)\chi_D(Y_n)\rho(z, Y_n) . \qquad /5.1/$$

Соотношение /5.1/ есть простейшее выражение свойства ослабления корреляций /кластеризации/ корреляционных функций для $z \in \mathfrak{S}(\xi)$ /см. §4.4 в [3], работу [6], а также статью Минлоса [11], недавние результаты содержатся в [25, 26] /.

Пусть $X_{\bar\Lambda} \in \Omega^\xi_{\bar\Lambda}$, тогда система плотностей распределения:

$$\sigma_\Lambda(z, X_m | X_{\bar\Lambda}) = (\Xi(\beta, z, \Lambda|X_{\bar\Lambda}))^{-1} z^m e^{-\beta U(X_m) - \beta W(X_m, X_{\bar\Lambda})}, \ m \geq 1,$$

которая определяет гиббсовскую меру в сосуде Λ, выражается через корреляционные функции с помощью соотношений /см.[6, 16] /

$$\sigma_\Lambda(z, X_m | X_{\bar\Lambda}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{\Lambda^n} dY_n \, \rho_\Lambda(z, X_m \cup Y_n | X_{\bar\Lambda}) . \qquad /5.2/$$

Замечание 5.2 /см. §7.1 в [13], а также [6,7,23] /. Из единственности предельных корреляционных функций для $z \in \mathfrak{S}(\xi)$ и $X_{\bar\Lambda_0} \in \Omega(d)$ следует единственность предельной гиббсовской меры, которая задается на Ω системой согласованных, нормированных плотностей $\{\sigma_\Delta(z, X_m)\}_{m \geq 1}$. Эта система восстанавливается по вектору $\rho(z)$ с помощью соотношений /5.2/:

$$\sigma_\Delta(z, X_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{\Delta^n} dY_n \rho(z, X_m \cup Y_n) .$$

Здесь $\Delta \subset \mathbf{R}^\nu$ - произвольное ограниченное измеряемое подмножество; о связи с уравнением Добрушина-Ланфорда-Рюэля см. [8-10, 16, 23, 27].

Если парное взаимодействие регулярно снизу и сверхустойчиво /см. §.3.2 в [3] /:

$$U(X_n) > -n(B - \frac{n}{|\Lambda|}A) ; \ A > 0, \ B \geq 0, \ X_n \in \Lambda^n ,$$

тогда для $X_{\bar\Lambda} = \{\emptyset\}$ и $z \geq 0$ существует [23] не зависящая от Λ, m и X_m функция $\zeta(z) > 0$, такая, что

$$\rho_\Lambda(z, X_m | \emptyset) \leq \zeta(z)^m . \qquad /5.3/$$

Оценка /5.3/ означает, что для любого фиксированного значения активности из физической области семейство векторов $\{\rho_\Lambda(z|\emptyset)\}_{\Lambda \subset \mathbf{R}^\nu}$ принадлежит единичному шару пространства $E^s_{\zeta(z)}$. Тогда из теоремы Банаха-Алаоглу /см., например, гл. IV.5 в [19]/ следует, что это семейство компактно в $*$-слабой топологии. Поэтому из семейства $\{\rho_\Lambda(z|\emptyset)\}_{\Lambda \subset \mathbf{R}^\nu}$ можно извлечь последовательность $\{\rho_{\Lambda_k}(z|\emptyset)\}_{k \geq 1}$, $\Lambda_k \nearrow \mathbf{R}^\nu$, такую, что существует

$$w^* - \lim_{k \to \infty} \rho_{\Lambda_k}(z|\emptyset) = \rho(z) . \qquad /5.4/$$

Замечание 5.3. Если взаимодействие $\Phi(x)$, кроме того, еще и регулярно /2.2/, тогда [23] вектор $\rho(z)$ из /5.4/ удовлетворяет уравнению КЗ для $\Lambda = \mathbf{R}^\nu$, и из теоремы 4.3 следует равномерная сходимость корреляционных функций $\{\rho_{\Lambda_k}(z, X_m|\emptyset)\}_{k \geq 1}$ на компактах, для $z \in \mathfrak{S}(\xi) \cap \mathbf{R}^1_+$ этот предел аналитичен по активности. Существенно новый метод доказательства существования термодинамического предела для корреляционных функций некоторого специального класса систем с положительно определенными парными потенциалами взаимодействия /см. §3.2 в [28] / предложили недавно Фрелих и Парк [28].

Замечание 5.4. Новый метод доказательства теоремы БР, изложенный выше, позволяет достаточно просто установить сходимость корреляционных функций при $\Lambda \nearrow \mathbf{R}^\nu$ к единственному пределу во всей области $\mathfrak{S}(\xi) \supset C^\circ_-(\xi)$. За счет такой общности теряется информация, которую можно получить из оценок внутри круга $C^{\circ}(\xi)$, о скорости сходимости допредельных корреляционных функций к предельным. Она выражается функцией $\mathrm{dist}(\partial\Delta, \partial\Lambda)$ /см. формулы /4.13/, /4.19/ и §4.2 в [3], а также статью Минлоса [11].

В заключение хочу выразить признательность Л.А.Пастуру и Н.Ангелеску за интересные и ценные обсуждения вопросов, затронутых в настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Хацет Б.И. ДАН СССР, 1949, т.66, №3, с.321-324; Боголюбов Н.Н. Избранные труды в трех томах. "Наукова Думка", Киев, 1970, том 2, с.494-498.
2. Ruelle D. Ann. of Phys., 1963, v.25, No.1, p.109-120.
3. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. "Мир", М., 1971.
4. Боголюбов Н.Н., Петрина Д.Я., Хацет Б.И. ТМФ, 1969, т.1, №2, с.251-274.
5. Симятицкий И.Л. ТМФ, 1971, т.6, №2, с.230-237.
6. Минлос Р.А. Функциональный анализ и его прилож., 1967, т.1, №2, с.60-73; Минлос Р.А. Функциональный анализ и его прилож., 1967, т.1, №3, с.40-53.
7. Ruelle D. J.Math.Phys., 1967, vol.8, No.8, p.1657-1668.
8. Добрушин Р.Л. Теория вероятн. и ее примен., 1968, т.13, №2, с.201-229; Добрушин Р.Л. Функциональный анализ и его прилож., 1968, т.2, №4, с.31-43.
9. Добрушин Р.Л. Функциональный анализ и его прилож., 1969, т.3, №1, с.27-35; Добрушин Р.Л. ТМФ, 1970, т.4, №1, с.101-118.
10. Lanford III, O.E., Ruelle D. Commun.Math.Phys., 1969, vol.13, No.3, p.194-215.
11. Минлос Р.А. УМН, 1968, т.23, №1, с.133-190; Синай Я.Г. Теория фазовых переходов. Строгие результаты. "Наука", М., 1980, гл.1.
12. Назин Г.И. ДАН СССР, 1979, т.245, №6, с.1352-1355; ТМФ, 1980, т.42, №3, с.383-391; Назин Г.И. ТМФ, 1980, т.42, №2, с.243-252.
13. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. ГИТТЛ, М.-Л., 1946.
14. Добрушин Р.Л. Функциональный анализ и его прилож., 1968, т.2, №4, с.44-57; Добрушин Р.Л. Теория вероятн. и ее примен., 1970, т.15, №3, с.469-497.
15. Lanford III, O.E. Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973, vol.20, p.1-113; Simon B. Commun.Math.Phys., 1979, v.68, No.2, p.183-185.

16. Загребнов В.А. ОИЯИ, Р5-80-458, Дубна, 1980, с.1-23.
17. Penrose O. J.Math.Phys., 1963, v.4, No.10, p.1312-1320.
18. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. "Наука", М., 1972.
19. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т.1. Функциональный анализ. "Мир", М., 1977.
20. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. ИИЛ, М., 1962.
21. Gurevich B.M., Suchov Ju.M. Comm.Math.Phys., 1976, v.49, No.1, p.63-96; Aizenmann M., Goldstein S., Lebowitz J.L. Comm.Math.Phys., 1978, v.62, No.3, p.279-302.
22. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. "Мир", М., 1972.
23. Ruelle D. Comm.Math.Phys., 1970, v.18, No.2, p.127-159.
24. Загребнов В.А., Пастур Л.А. ТМФ, 1978, т.36, №3, с.352-372.
25. Гиббсовские состояния в статистической физике. Сборник статей /пер. с англ. под ред. Р.А.Минлоса/. "Мир", М., 1978.
26. Малышев В.А. ТМФ, 1980, т.45, №2, с.235-243.
27. Gruber C., Lebowitz J.L. Comm.Math.Phys., 1975, v.41, No.1, p.11-18.
28. Fröhlich J., Park Y.M. Comm.Math.Phys., 1978, v.59, No.3, p.235-266.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 марта 1981 года.