объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P5-81-181

В.А.Загребнов

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРОВ КИРКВУДА-ЗАЛЬЦБУРГА И КИРКВУДА-РЮЭЛЯ

Направлено в "Journal of Statistical Physics"

1981

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было показано, какой вид имеют уравнения Кирквуда-Зальцбурга /КЗ/, Кирквуда-Рюэля /КР/ и Майера-Монтролла для классических непрерывных систем в конечном объеме в случае непустых граничных условий. Далее с помощью метода аналитического продолжения /по параметру активности/ резольвент соответствующих операторов доказана теорема о единственности решения этих уравнений для активностей вне круга аналитичности.

В настоящей работе результаты, полученные в [1], используются для исследований спектра операторов КЗ и КР в банаховых пространствах E_ξ и E^s_ξ для регулярных граничных условий. Целью работы является изучение структуры спектров и их зависимости от выбора области определения оператора и потенциала взаимодействия между частицами.

Показано, что в общем случае устойчивого взаимодействия операторы КЗ и КР, определенные для сосуда с конечным объемом, наряду с точечным спектром могут иметь остаточный спектр и обобщенные собственные значения. Причем точечный спектр и обобщенные собственные значения совпадают со множеством комплексных чисел $\{z_i^{-1}\}_{i\geq 1}$, где $\{z_i\}_{i\geq 1}$ - значения активности, соответствующие нулям большой статистической суммы при заданных регулярных граничных условиях вне сосуда. Установлено также, что при переходе к сверхустойчивым потенциалам взаимодействия остаточный спектр может пропасть /сингулярные потенциалы с твердой сердцевиной, неотрицательные потенциалы/, а остается лишь точечный спектр $\{z_i^{-1}\}_{i\geq 1}$. Обнаружено, что это свойство связано с "фредгольмовостью" уравнения КЗ. Хотя основная часть работы посвящена исследованию спектра операторов КЗ и КР для сосуда с конечным объемом, в частном случае идеального газа, это можно сделать и в термодинамическом пределе.

В следующем разделе приводятся основные определения и свойства операторов и уравнений КЗ и КР. Формулировка результатов и доказательство основных утверждений содержатся в разделе 3. В разделе 4 обсуждаются полученные результаты.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ КЗ И КР

Пусть $\Lambda \subset \boldsymbol{R}^\nu$ - сосуд в ν-мерном пространстве, т.е. односвязное множество, имеющее конечную меру $\mathrm{mes}\Lambda = |\Lambda|$, $\{X\} = \Omega$ -

конфигурации одинаковых классических частиц в R^ν, взаимодействующих посредством /устойчивого или сверхустойчивого/ парного потенциала $\Phi: R^\nu \to R^1 \cup \{+\infty\}$, который является измеримой функцией, обладающей свойством: $\Phi(x)=\Phi(-x)$ /см. [2] /. Пусть $\Omega_\Lambda = \Omega \restriction \Lambda$ - конфигурации внутри сосуда Λ. Тогда подмножество $\Omega'_{\bar\Lambda}$ конфигураций $\Omega_{\bar\Lambda} = \Omega\restriction\bar\Lambda$, где $\bar\Lambda = R^\nu\setminus\Lambda$, вне сосуда будем называть регулярными [1], если для любой конфигурации $X_{\bar\Lambda}\in\Omega'_{\bar\Lambda}$ существует конечная величина $G(X_{\bar\Lambda})\ge 0$ такая, что энергия взаимодействия

$$W(X_\Lambda, X_{\bar\Lambda}) = \sum_{\substack{x\in X_\Lambda \\ y\in X_{\bar\Lambda}}} \Phi(x-y) \ge -G(X_{\bar\Lambda})\,\mathrm{card}\,X_\Lambda \qquad /2.1/$$

для любой конфигурации $X_\Lambda\in\Omega_\Lambda$. По определению, полагаем $W(\emptyset, X_{\bar\Lambda}) = W(X_\Lambda,\emptyset)=0$; $X_\Lambda = X_n = (x_1,x_2,\dots,x_n)$, если $\mathrm{card}\,X_\Lambda = n$, и $X_{n=0}=\{\emptyset\}$. Большая статистическая сумма имеет тогда следующий вид:

$$\Xi(\beta,z,\Lambda|X_{\bar\Lambda}) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}\int_{\Lambda^n} dX_n\, e^{-\beta U(X_n)-\beta W(X_n, X_{\bar\Lambda})}, \qquad /2.2/$$

а условные корреляционные функции $\{\rho_\Lambda(z,X_m|X_{\bar\Lambda})\}_{n\ge1}$ определяются стандартным образом:

$$\rho_\Lambda(z,X_m|X_{\bar\Lambda}) = \frac{r_\Lambda(z,X_m|X_{\bar\Lambda})}{\Xi(\beta,z,\Lambda|X_{\bar\Lambda})}, \qquad /2.3/$$

$$r_\Lambda(z,X_m|X_{\bar\Lambda}) = \chi_\Lambda(X_m)\sum_{n=0}^\infty \frac{z^{n+m}}{n!}\int_{\Lambda^n} dY_n\, e^{-\beta U(Y_n\cup X_m)-\beta W(Y_n\cup X_m, X_{\bar\Lambda})},$$

где $\chi_\Lambda(X_m)$ - характеристическая функция множества $\Lambda^m\subset R^{m\nu}$, z - активность, β^{-1} - температура, а $Y_n\cup X_m = (y_1,y_2,\dots,y_n,x_1,\dots,x_m)$. Сходимость в /2.2/ и /2.3/ обеспечивается условиями регулярности: $X_{\bar\Lambda}\in\Omega'_{\bar\Lambda}$ и устойчивости взаимодействия [2]:

$$U(X_m) = \sum_{1\le i<j\le m}\Phi(x_i-x_j) \ge -mB, \quad B\ge 0. \qquad /2.4/$$

В физической области значений активности $z\ge0$ из /2.1/-/2.4/ получаем:

$$\rho_\Lambda(z,X_m|X_{\bar\Lambda}) \le \chi_\Lambda(X_m)\frac{(ze^{\beta(G(X_{\bar\Lambda})+B)})^m}{\Xi(\beta,z,\Lambda|X_{\bar\Lambda})}\, e^{z|\Lambda|\exp\beta(G(X_{\bar\Lambda})+B)}. \qquad /2.5/$$

Поэтому для исследования корреляционных функций и решения корреляционных уравнений удобно ввести [2,4] векторное пространство $E_{\xi>0}$ бесконечных последовательностей комплекснозначных измеримых функций $\{\phi(X_m)\}_{m\ge1}=\phi$:

$$E_\xi = \{\phi: \sup_{s\ge1}\xi^{-s}\|\phi(X_s)\|_{L^\infty(R^{s\nu})} = \|\phi\|_\xi<\infty\}, \qquad /2.6/$$

которое является банаховым относительно нормы $\|\cdot\|_\xi$, а также подпространство $E^s_\xi\subset E_\xi$, состоящее из последовательностей симметричных функций [1].

В пространстве E_ξ определим формально линейный оператор K /см. [2] /:

$$(K\phi)(x_1) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!}\int_{R^{n\nu}} dY_n\, K_\Phi(x_1,Y_n)\phi(Y_n);$$

$$(K\phi)(X_m) = e^{-\beta W(x_1, X_m\setminus x_1)}\{\phi(X_m\setminus x_1) + \qquad /2.7/$$

$$+\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n!}\int_{R^{n\nu}} dY_n\, K_\Phi(x_1,Y_n)\phi(Y_n\cup(X_m\setminus x_1)); \quad m\ge2;$$

$$K_\Phi(x_1,Y_n) = \prod_{y\in Y_n}(e^{-\beta\Phi(x_1-y)}-1); \quad X_m\setminus x_1 = (x_2,x_3,\dots,x_m).$$

Тогда оператор КЗ для сосуда $\Lambda\subset R^\nu$ с регулярными граничными условиями $X_{\bar\Lambda}\in\Omega'_{\bar\Lambda}$ имеет вид [1]:

$$K_\Lambda = e^{-\beta\hat W_1(X_{\bar\Lambda})}\hat\chi_\Lambda K; \qquad /2.8/$$

$$(\hat\chi_\Lambda\phi)(X_m) = \chi_\Lambda(X_m)\phi(X_m);$$

$$(\hat W_1(X_{\bar\Lambda})\hat\chi_\Lambda\phi)(X_m) = W(x_1,X_{\bar\Lambda})\chi_\Lambda(X_m)\phi(X_m).$$

Соответствующее уравнение КЗ представляется в следующем виде:

$$\phi = ze^{-\beta\hat W_1(X_{\bar\Lambda})}\hat\chi_\Lambda\alpha + zK_\Lambda\phi, \qquad /2.9/$$

где $\alpha=\{1,0,0,\dots,0,\dots\}$ и $\phi(\emptyset)=1$, см. /2.3/. Аналогично определяется в сосуде $\Lambda\subset R^\nu$ оператор КР [1]:

$$\Pi K_\Lambda = e^{-\beta\hat W_1(X_{\bar\Lambda})}\hat\chi_\Lambda \Pi K. \qquad /2.10/$$

Здесь оператор $\Pi: E_\xi\to E_\xi$ задается следующим образом $\Pi:\phi(X_m)\to\phi(x_\pi \cup (X_m\setminus x_\pi))$ и определяется условием [2]:

$$W(x_\pi, X_m\setminus x_\pi)\ge -2B. \qquad /2.11/$$

Поэтому, в отличие от $K_\Lambda: E_\xi\to E_{\xi e^{2\beta B}}$ /2.8/, оператор КР /2.10/ для $X_{\bar\Lambda}\in\Omega'_{\bar\Lambda}$ ограничен:

$$\|\Pi K_\Lambda\|_{E_\xi}\le e^{\beta(G(X_{\bar\Lambda})+2B)}\xi^{-1}e^{\xi\cdot C(\beta)}, \qquad /2.12/$$

если выполнено условие регулярности парного потенциала [2]:

$$C(\beta) = \int_{R^\nu} dx\,|e^{-\beta\Phi(x)} - 1| < \infty. \qquad /2.13/$$

Для $\phi \in E^s_\xi$ уравнение /2.9/ с помощью оператора Π превращается в уравнение

$$\phi = z e^{-\beta \hat{W}_\pi(X_{\bar\Lambda})}\, \hat\chi_\Lambda \alpha + z\Pi K_\Lambda \phi. \qquad /2.14/$$

Из оценки /2.12/ следует, что резольвента $R_\lambda(\Pi K_\Lambda) = (\lambda I - \Pi K_\Lambda)^{-1}$ для любой из областей определения оператора КР: $D(\Pi K_\Lambda) = E_\xi$ ($= E_\xi(\Lambda) = \hat\chi_\Lambda E_\xi$), или $= E^s_\xi(\Lambda) = \hat\chi_\Lambda E^s_\xi$, $\|\cdot\|_\xi$- аналитична для

$$\lambda \in C_-(\xi) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| > e^{\beta(G(X_{\bar\Lambda})+2B)}\, \xi^{-1} e^{\xi C(\beta)}\}, \qquad /2.15/$$

т.е. область $C_-(\xi) \subset P(\Pi K_\Lambda)$ - резольвентному множеству оператора ΠK_Λ. Если $X_{\bar\Lambda} \in \Omega'_{\bar\Lambda}$ и взаимодействие устойчиво /2.4/, тогда функцию /2.2/ можно продолжить по активности z в комплексную плоскость $\mathbf{C}$, где она является целой функцией, порядок которой не более единицы. Пусть $N'(\Xi) = \{z_i \in \mathbf{C} : \Xi(\beta, z_i, \Lambda|X_{\bar\Lambda}) = 0\}$, тогда для $z \notin N'(\Xi)$ получаем оценку, аналогичную /2.5/. Это означает, что в области

$$C'_+(\xi) = \{z \in \mathbf{C} : |z| < e^{-\beta(G(X_{\bar\Lambda})+B)}\, \xi\} \qquad /2.16/$$

$\{\rho_\Lambda(z, X_m|X_{\bar\Lambda})\}_{m\ge1} = \rho_\Lambda(z|X_{\bar\Lambda})$ есть векторнозначная $\|\cdot\|_\xi$- мероморфная функция $\rho_\Lambda : C'_+(\xi) \to E^s_\xi(\Lambda)$, полюса которой совпадают с множеством $N'_+(\xi) = N'(\Xi) \cap C'_+(\xi)$. Для активностей из области

$$C'_-(\xi) = \{z \in \mathbf{C} : z^{-1} \in C_-(\xi)\} \subset C'_+(\xi) \qquad /2.17/$$

решение уравнения КР /2.24/ в пространстве E^s_ξ единственно и $\|\cdot\|_\xi$- аналитично по z /см. /2.15//. Следовательно, для сужения $\Pi K_\Lambda \restriction E^s_\xi(\Lambda)$ имеем:

$$\phi(z) = R_{z^{-1}}(\Pi K_\Lambda)\, e^{-\beta\hat W_\pi(X_{\bar\Lambda})}\, \hat\chi_\Lambda \alpha = \rho_\Lambda(z|X_{\bar\Lambda}). \qquad /2.18/$$

Предложение 2.1 [1]. Если $X_{\bar\Lambda} \in \Omega'_{\bar\Lambda}$, а потенциал парного взаимодействия устойчив /2.4/ и регулярен /2.13/, тогда уравнения КЗ /2.9/ и КР /2.14/ имеют в пространстве $E^s_\xi(\Lambda)$ одно и то же единственное решение $\phi(z)$ /2.18/, которое $\|\cdot\|_\xi$-аналитично в области $C'_-(\xi)$, , $\|\cdot\|_\xi$- мероморфно в области $C'_+(\xi)$ и совпадает с $\rho_\Lambda(z|X_{\bar\Lambda}) \restriction C'_+(\xi)$.

Замечание 2.1. Поскольку множество $N'(\Xi)$ не зависит от выбора параметра $\xi>0$, то наибольший круг аналитичности решения $\phi(z)$ совпадает с

$$C'_0 = \{z\in\mathbf{C} : |z| < z_0 = \min_{i\ge1}|z_i|, \;\; z_i \in N'(\Xi)\}. \qquad /2.19/$$

Поэтому для достаточно больших $\xi>0$ множество $N'_+(\xi) \ne \{\emptyset\}$ /см. рис.1, где точками обозначено множество $N'(\Xi)$, а область $\mathbf{C} \setminus C'_+(\xi)$ заштрихована/.

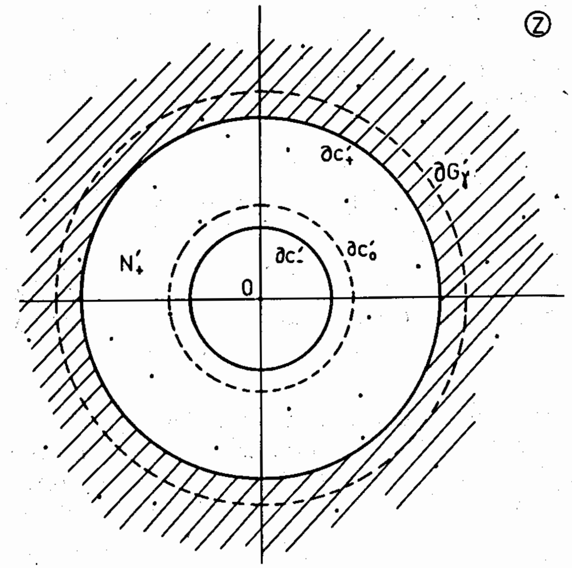

Рис.1

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Идеальный газ. В этом случае имеет смысл только оператор КЗ /2.8/, который теперь приобретает вид:

$$K_\Lambda\phi = \{0, \chi_\Lambda(X_2)\phi(X_2\setminus x_1), \ldots, \chi_\Lambda(X_m)\phi(X_m\setminus x_1), \ldots\}. \qquad /3.1/$$

Тогда

$$\|K_\Lambda\phi\|_\xi = \xi^{-1}\|\phi\|_\xi ; \quad \phi \in E_\xi\, (\in E_\xi(\Lambda)). \qquad /3.2/$$

Поэтому для обеих областей определения $D(K_\Lambda)=E_\xi(=E_\xi(\Lambda))$ спектр $\sigma(K_\Lambda)\subseteq C(\xi)$, где

$$C(\xi)=\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|\le\xi^{-1}\}. \qquad /3.3/$$

Теорема 3.1. Если $\Phi(x)=0$, тогда спектр оператора КЗ для $D(K_\Lambda)=E_\xi(\Lambda)$ является остаточным:

$$\sigma(K_\Lambda)=\sigma_{res}(K_\Lambda)=C(\xi). \qquad /3.4/$$

Замечание 3.1. Оператор /3.1/ похож на оператор правого сдвига в пространстве ℓ_∞. Поэтому /3.4/ можно доказать, модифицируя соответствующим образом аргументы, приведенные в [5,VI.3] для оператора правого сдвига в ℓ_∞. Ниже приведено доказательство, основанное на другой идее. Эта новая схема позволяет рассмотреть также неидеальную систему /см. теорему 3.3/.

Доказательство теоремы 3.1. Как известно, спектр линейного оператора, например K_Λ, является объединением трех непересекающихся компонент: $\sigma(K_\Lambda)=\sigma_p(K_\Lambda)\cup\sigma_{cont}(K_\Lambda)\cup\sigma_{res}(K_\Lambda)$. Кроме того: $\sigma_{cont}(K_\Lambda)=L(K_\Lambda)\setminus(\Gamma(K_\Lambda)\cup\sigma_p(K_\Lambda))$ и $\sigma_{res}(K_\Lambda)=\Gamma(K_\Lambda)\setminus\sigma_p(K_\Lambda)$, где $L(K_\Lambda)$ и $\Gamma(K_\Lambda)$, соответственно, предельный спектр и спектр сжатия оператора K_Λ. Как следует из /3.1/, уравнение

$$K_\Lambda\phi=\lambda\phi, \quad \phi\in E_\xi(\Lambda)$$

имеет только тривиальное решение, поэтому точечный спектр $\sigma_p(K_\Lambda)=\{\emptyset\}$. Рассмотрим внутренность круга $C(\xi)$. Из уравнения КЗ /2.8/ следует, что единственное решение имеет вид:

$$\phi(\lambda)=\{\lambda^{-m}\chi_\Lambda(X_n)\}_{m\ge1}=\rho_\Lambda(\lambda^{-1}). \qquad /3.5/$$

Для $|\lambda|<\xi^{-1}$ получаем $\rho_\Lambda(\lambda^{-1})\notin E_\xi(\Lambda)$, поэтому вектор $\hat{\chi}_\Lambda a\in E_\xi(\Lambda)$ не принадлежит области значений $Ran(\lambda I-K_\Lambda)$ оператора $R_\lambda(K_\Lambda)^{-1}$, см. /2.8/. Заметим, что для фиксированного $\lambda\in C(\xi)\setminus\partial C(\xi)$ существует $\xi'>\xi$ такое, что $\rho_\Lambda(\lambda^{-1})\in E_{\xi'}(\Lambda)$ см. /3.5/. Тогда по теореме об открытом отображении /см., например, [5, III.5] / $(\lambda I-K_\Lambda):\mathfrak{U}_{\xi'}(\rho_\Lambda(\lambda^{-1}))\to\mathfrak{U}_{\xi'}(\hat{\chi}_\Lambda a)$, где $\mathfrak{U}_{\xi'}(\cdot)$ - окрестность соответствующего вектора в пространстве $E_{\xi'}(\Lambda)$. Нетрудно показать, что вложение банаховых пространств $E_\xi(\Lambda)\subset E_{\xi'}(\Lambda)$ для $\xi'>\xi$ означает, что: а/ подпространство $E_\xi(\Lambda)$ не является плотным в пространстве $E_{\xi'}(\Lambda)$ в топологии, определяемой нормой $\|\cdot\|_{\xi'}$; б/ если $\phi\in E_\xi(\Lambda)$, тогда $\mathfrak{U}_{\xi'}(\phi)\cap E_\xi(\Lambda)=\mathfrak{U}_\xi(\phi)$ есть окрестность ϕ в пространстве $E_\xi(\Lambda)$. Из этого следует, что в пространстве $E_{\xi'}(\Lambda)$ существует такая окрестность $\mathfrak{S}_{\xi'}(\rho_\Lambda(\lambda^{-1}))$, что $\mathfrak{S}_{\xi'}(\rho_\Lambda(\lambda^{-1}))\cap E_\xi(\Lambda)=\{\emptyset\}$. Учитывая, что $\sigma_p(K_\Lambda)=\{\emptyset\}$, получаем, что $Ran(\lambda I-K_\Lambda)$ не пересекает окрестность $\mathfrak{S}_\xi(\hat{\chi}_\Lambda a)=\{(\lambda I-K_\Lambda)\times\times\mathfrak{S}_{\xi'}(\rho_\Lambda(\lambda^{-1}))\}\cap E_\xi(\Lambda)$. Следовательно, $C(\xi)\setminus\partial C(\xi)\subset\Gamma(K_\Lambda)$. Теперь

остается только рассмотреть границу $\partial C(\xi)$. Используя /3.2/, получаем:

$$\|(\lambda I-K_\Lambda)\phi\|_\xi\ge\big||\lambda|-\xi^{-1}\big|\,\|\phi\|_\xi .$$

Тогда $L(K_\Lambda)=\partial C(\xi)$, поскольку граница спектра всегда принадлежит множеству $L(K_\Lambda)$. С другой стороны, для $\lambda\in\partial C(\xi)$ рассмотрим вектор $\rho_\Lambda(\lambda^{-1})\in E_\xi(\Lambda)$, см. /3.5/. Уравнение

$$\rho_\Lambda(\lambda^{-1})=(\lambda I-K_\Lambda)\psi$$

имеет единственное решение

$$\psi[\rho_\Lambda]=\{\lambda^{-(m+1)}\chi_\Lambda(X_m)\sum_{n=0}^{m}\lambda^n\rho_\Lambda(\lambda^{-1},X_n)\}_{m\ge1}\notin E_\xi(\Lambda).$$

Следовательно, для $|\lambda|=\xi^{-1}$ вектор $\rho_\Lambda(\lambda^{-1})\notin Ran(\lambda I-K_\Lambda)$. Предположим теперь, что вектор $\mu\in\mathfrak{B}_{\xi,\epsilon}(\rho_\Lambda(\lambda^{-1}))=\{\phi\in E_\xi:\|\phi-\rho_\Lambda(\lambda^{-1})\|_\xi<\epsilon\}$ для некоторого $\epsilon>0$, тогда

$$|\mathrm{Re}\lambda^n\mu(X_n)-\mathrm{Re}\lambda^n\rho_\Lambda(\lambda^{-1},X_n)|\le\xi^{-n}|\mu(X_n)-\rho_\Lambda(\lambda^{-1},X_n)|<\epsilon,$$

и поэтому $\mathrm{Re}\lambda^n\mu(X_n)>1-\epsilon$. Таким образом получаем: $|\psi[\mu](X_m)|\ge\ge m(1-\epsilon)\xi^{m+1}$. Это означает, что шар $\mathfrak{B}_{\xi,\epsilon}(\rho_\Lambda(\lambda^{-1}))$ не пересекается с множеством $Ran(\lambda I-K_\Lambda)$, т.е. $\partial C(\xi)\subset\Gamma(K_\Lambda)$, и непрерывный спектр $\sigma_{cont}(K_\Lambda)=\{\emptyset\}$. Этот результат завершает доказательство /3.4/ □.

Следствие 3.1. /Термодинамический предел/. В случае идеального газа оператор КЗ в термодинамическом пределе имеет вид $K=K_{\Lambda=R^\nu}$ /см. /2.7/ и /3.1/, причем $\|K\|_{E_\xi}=\|K_\Lambda\|_{E_\xi(\Lambda)}$. Поэтому, повторяя рассуждения, приведенные выше при доказательстве теоремы 3.1, получаем, что спектр оператора K для $D(K)=E_\xi$ также является остаточным /см. рис.2/ и

$$\sigma(K)=\sigma_{res}(K)=\sigma_{res}(K_\Lambda\restriction E_\xi(\Lambda)).$$

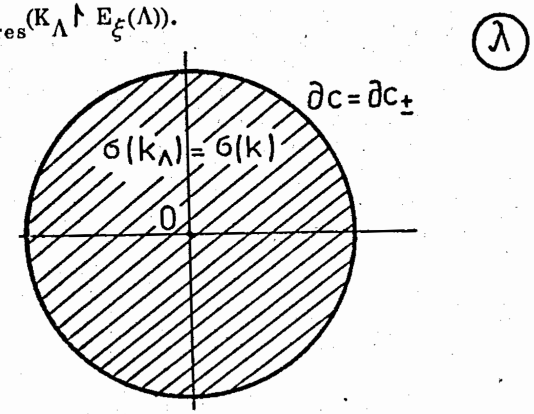

Рис.2

Замечание 3.2. Результаты теоремы 3.1 не изменяются, если мы рассматриваем сужение $K_\Lambda \upharpoonright E^s_\xi(\Lambda)$. В то же время для расширения оператора K_Λ с областью определения $D(K_\Lambda)=E_\xi$ /или E^s_ξ / получаем: $\operatorname{Ker}K_\Lambda \neq \{\phi=0\}$ и, как следствие, $L(K_\Lambda)\cap\Gamma(K_\Lambda)=\{\lambda=0\}$.

Устойчивые взаимодействия. Теперь оператор КЗ /2.8/ в общем случае не является ограниченным ни в одном из пространств E_ξ, $E_\xi(\Lambda)$, $E^s_\xi(\Lambda)$ /см. раздел 2/. Поэтому наряду с /2.8/ мы будем рассматривать здесь оператор КР /2.10/.

Теорема 3.2. Если $X_{\bar\Lambda}\in\Omega'_{\bar\Lambda}$, а потенциал парного взаимодействия $\Phi(x)\neq 0$ устойчив и регулярен, то для оператора КЗ /2.8/ имеем:

(i) $\sigma_p(K_\Lambda \upharpoonright E_\xi) \neq \{\emptyset\}$ для $\xi>\xi_0=z_0 e^{\beta(G(X_{\bar\Lambda})+B)}$;

(ii) $\sigma_p(K_\Lambda \upharpoonright E^s_\xi(\Lambda)) \subset \{\lambda_i=z_i^{-1}:\ z_i\in N'(\Xi)\}\equiv N(\Xi)$; /3.6/

(iii) если существует $\gamma>0$ такое, что $\rho_\Lambda(z)\notin E^s_\xi(\Lambda)$ для $z\in G'_\gamma(\xi)=\{z\in\mathbf{C}:|z|>\gamma\xi\}$ /см. /2.16//, тогда множество

$$\tilde\sigma_p(K_\Lambda \upharpoonright E^s_\xi(\Lambda))=N(\Xi)\cap G_\gamma(\xi) \qquad /3.7/$$

соответствует обобщенным собственным значениям, здесь $G_\gamma(\xi)=\{\lambda=z^{-1}:z\in G'_\gamma(\xi)\}$.

Доказательство (i). В работе [1] /см. Предложение 2.1/ показано, что уравнение

$$K_\Lambda\phi=\lambda\phi \qquad /3.8/$$

имеет нетривиальные решения $\{r_\Lambda(z_i)\}_{i\geq 1}$ для $\lambda_i=z_i^{-1}$ /см. /2.3//, где $z_i\in N'(\Xi)$. Поэтому результат следует из оценки /2.16/ и Замечания 2.1. (ii). Как установлено в [1], в пространстве $E^s_\xi(\Lambda)$ других решений кроме $\{r_\Lambda(z_i)\}_{i\geq 1}$, $z_i\in N'(\Xi)$, уравнение /3.8/ не имеет, следовательно, для точечного спектра получаем /3.6/. (iii). Для $|z_i|>\gamma\xi$ получаем: $r_\Lambda(z_i)\notin E^s_\xi(\Lambda)$ /см. /2.3//, поэтому множество /3.7/ соответствует обобщённым собственным значениям для оператора $K_\Lambda \upharpoonright E^s_\xi(\Lambda)$. □

Следствие 3.2. Поскольку $z_0>0$ /2.19/, а множество $N(\Xi)$ может иметь точку сгущения только при $\lambda=0$, то из условия (iii) и оценки /2.16/ следует, что при достаточно малых $\xi>0$ имеем: $\sigma_p(K_\Lambda \upharpoonright E^s_\xi(\Lambda))=\{\emptyset\}$, т.е. спектр оператора КЗ состоит из обобщенных собственных значений: $\tilde\sigma_p(K_\Lambda \upharpoonright E^s_\xi(\Lambda))=N(\Xi)$.

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия Теоремы 3.2, тогда для оператора КР /2.10/ с $D(\Pi K_\Lambda)=E^s_\xi(\Lambda)$ имеем:

(i) $\sigma_p(\Pi K_\Lambda)\subset N(\Xi)$;

(ii) $\tilde\sigma_p(\Pi K_\Lambda)=N(\Xi)\cap G_\gamma(\xi)$;

(iii) $\sigma_{res}(\Pi K_\Lambda)\supset G_\gamma(\xi)\setminus\tilde\sigma_p(\Pi K_\Lambda)$.

Доказательство. Заметим, что $\Pi\upharpoonright E^s_\xi=I$ и $\operatorname{Ker}\Pi=\{\phi=0\}$, поэтому пункты (i), (ii) доказываются в полной аналогии с (ii) и (iii) в доказательстве теоремы 3.2.

(iii). В силу /2.16/ для любого $z\in G'_\gamma(\xi)\setminus N'(\Xi)$ существует такое $\xi'>\xi$, что $\rho_\Lambda(z)\in E_{\xi'}(\Lambda)$. Поэтому из Предложения 2.1 следует, что для $z\in G'_\gamma(\xi)\setminus N'(\Xi)$ оператор $(z^{-1}I-\Pi K_\Lambda)=(R_{z^{-1}}(\Pi K_\Lambda))^{-1}$ отображает вектор $\rho_\Lambda(z)\in E_{\xi'}(\Lambda)$ в вектор $\alpha_\Lambda=e^{-\beta\hat W_\pi(X_{\bar\Lambda})}\hat\chi_\Lambda\alpha\in E_\xi(\Lambda)$. Поскольку оператор $(z^{-1}I-\Pi K_\Lambda):E_{\xi'}(\Lambda)\to E_{\xi'}(\Lambda)$ ограничен /2.12/, то по теореме об открытом отображении $(z^{-1}I-\Pi K_\Lambda):\mathfrak{U}_{\xi'}(\rho_\Lambda(z))\to\mathfrak{U}_{\xi'}(\alpha_\Lambda)$, где $\mathfrak{U}_{\xi'}(.)$- окрестность соответствующего вектора в пространстве $E_{\xi'}(\Lambda)$. Напомним теперь, что из вложения $E_\xi\subset E_{\xi'}$ для банаховых пространств /2.6/ при $\xi'>\xi$ следует: а/ если $\alpha_\Lambda\in E_\xi(\Lambda)$, то $\mathfrak{U}_{\xi'}(\alpha_\Lambda)\cap E_\xi(\Lambda)=\mathfrak{U}_\xi(\alpha_\Lambda)$ есть окрестность вектора α_Λ в пространстве $E_\xi(\Lambda)$; б/ подпространство E_ξ не плотно в пространстве $E_{\xi'}(\Lambda)$ в топологии, определяемой нормой $\|\cdot\|_{\xi'}$. Это означает, что в $E_{\xi'}(\Lambda)$ существует такая окрестность $\mathcal{S}_{\xi'}(\rho_\Lambda(z))$ вектора $\rho_\Lambda(z)(\in E_{\xi'}(\Lambda))$, что $\mathcal{S}_{\xi'}(\rho_\Lambda(z))\cap E_\xi(\Lambda)=\{\emptyset\}$, т.е. множество $\operatorname{Ran}(z^{-1}I-\Pi K_\Lambda)$ для $z\in G'_\gamma(\xi)\setminus N'(\Xi)$ не содержит окрестности $\mathcal{S}_\xi(\alpha_\Lambda)$. Последнее доказывает, что $\sigma_{res}(\Pi K_\Lambda)\neq\{\emptyset\}$ и содержит множество $G_\gamma(\xi)\setminus\tilde\sigma_p(\Pi K_\Lambda)$. □

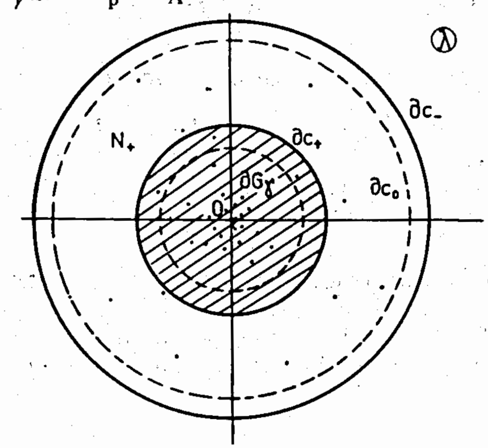

Рис.3

Замечание 3.3. На рис.3 представлена приблизительная структура $\sigma(\Pi K_\Lambda \upharpoonright E_\xi^s(\Lambda))$, здесь $C_+(\xi)=\{\lambda=z^{-1}: z\in C'_+(\xi)\}$, $C_0=\{\lambda=z^{-1}: z\in C'_0\}$ см. /2.16/, /2.19/ и рис.1 и 2. Заштрихованная область $\mathbf{C}\setminus C_+(\xi)$ содержит круг $G_\gamma(\xi)\subset\sigma_{res}(\Pi K_\Lambda)\cup\tilde{\sigma}_p(\Pi K_\Lambda)$, а точками обозначено множество $N(\Xi)$. Рассуждения в доказательстве теорем 3.2 и 3.3 не исключают $\sigma_{res}(\Pi K_\Lambda)$ /или $\sigma_{cont}(\Pi K_\Lambda)$ / в круге $\mathbf{C}\setminus C_-(\xi)$. Они лишь гарантируют в общем случае, что при включении взаимодействия у операторов КЗ и КР появляется точечный спектр.

Замечание 3.4. Условие (iii) в теореме 3.2 выполняется для идеального газа /см. /3.5//. В этом случае $\gamma=1$ и $G_\gamma(\xi) = C(\xi)\setminus\partial C(\xi)$ /3.3/. Для устойчивого взаимодействия легко сформулировать достаточные условия на $z\in\mathbf{C}$, когда $\rho_\Lambda(z|X_{\bar\Lambda})\in E_\xi^s(\Lambda)$ /2.16/. Труднее указать класс нетривиальных потенциалов, для которых выполняется условие (iii) /см.[1] /. Однако имеет место следующая

Теорема 3.4. Пусть потенциал парного взаимодействия таков, что $\Phi(x)\geq 0$, $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\|\Phi\|_{L^\infty(|x|<\epsilon)}=0$, тогда условие (iii) теоремы 3.2 выполнено, причем $\gamma=1$ и $\partial G_\gamma(\xi)=\partial C_+(\xi)$.

Доказательство. Заметим, что вектор $r_\Lambda(z|X_{\bar\Lambda})$ /2.3/ связан с вектором

$$f_\Lambda(z|X_{\bar\Lambda})=\{\chi_\Lambda(X_m)\,z^m e^{-\beta U(X_m)-\beta W(X_m,X_{\bar\Lambda})}\}_{m\geq 1} \qquad /3.8/$$

преобразованием /см.[1,6] /:

$$r_\Lambda(z|X_{\bar\Lambda})=\mathcal{P}_\Lambda f_\Lambda(z|X_{\bar\Lambda}) = \qquad /3.9/$$
$$=\{\chi_\Lambda(X_m)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\Lambda^n} dY_n f_\Lambda(z,Y_n\cup X_m|X_{\bar\Lambda})\}_{m\geq 1}.$$

Здесь $\mathcal{P}_\Lambda: E_\xi^s(\Lambda)\to E_\xi^s(\Lambda)$, и линейное отображение

$$\mathcal{P}_\Lambda=e^{\hat d(\chi_\Lambda)},\quad (\hat d(\chi_\Lambda)\phi)(X_m)=\int_{R^\nu} dy\,\chi_\Lambda(y)\phi(y\cup X_m),$$

ограничено и обратимо:

$$\|\mathcal{P}_\Lambda\|_{E_\xi}=\|\mathcal{P}_\Lambda^{-1}\|_{E_\xi}= e^{\xi|\Lambda|}. \qquad /3.10/$$

Из условия на парный потенциал взаимодействия следует, что $f_\Lambda(z|X_{\bar\Lambda})\in E_\xi^s(\Lambda)$ для $|z|\leq\xi$ и $f_\Lambda(z|X_{\bar\Lambda})\notin E_\xi^s(\Lambda)$ для $|z|>\xi$ /см./3.8//. Поэтому в силу /3.9/, /3.10/ и теоремы о замкнутом графике /см., например,[5,III.5] / этим свойством обладает и вектор $r_\Lambda(z|X_{\bar\Lambda})$. □ .

Сверхустойчивые взаимодействия. Для сверхустойчивых парных потенциалов взаимодействия имеем

$$U(X_m)\geq -m(B-\frac{m}{|\Lambda|}A);\quad A>0,\ B\geq 0,\ X_m\in\Lambda^m. \qquad /3.11/$$

Условие /3.11/ не влечет, в общем случае, ограниченности оператора КЗ /2.8/, однако приводит к тому, что $r_\Lambda(z|X_{\bar\Lambda})\in E_\xi^s(\Lambda)$ для любого $z\in\mathbf{C}$ /ср. /2.16//. Поэтому условие (iii) теоремы 3.2 теперь не выполняется, однако мы не можем гарантировать, что "усиление" отталкивающей части взаимодействия /3.11/ приводит к исчезновению остаточного спектра у операторов КЗ и КР в общем случае. Здесь мы докажем это лишь для двух классов сверхустойчивых потенциалов, когда на отталкивающую часть парного потенциала налагаются дополнительные условия:
/а/ либо потенциал сингулярен и содержит твердую сердцевину $c>0$: $\Phi(x)=+\infty$ для $|x|<c$;

/б/ либо $\Phi(x)\geq 0$ и $\Phi(x)>0$ для некоторой окрестности начала координат /ср. с теоремой 3.4/.

Заметим, что каждое из этих условий приводит к сверхустойчивости, а вместе с условием регулярности /2.13/, влечет за собой ограниченность оператора КЗ /2.8/ в пространстве E_ξ.

Теорема 3.5. Если $X_{\bar\Lambda}\in\Omega'_{\bar\Lambda}$, а потенциал парного взаимодействия $\Phi(x)$ сверхустойчив, регулярен и удовлетворяет одному из дополнительных условий /а/ или /б/, тогда спектр оператора КЗ /2.8/ с $D(K_\Lambda)=E_\xi^s(\Lambda)$ будет чисто точечным:

$$\sigma(K_\Lambda)=\sigma_p(K_\Lambda)=N(\Xi). \qquad /3.12/$$

Доказательство. Как показано в работах[1-6], оператор $K_\Lambda\upharpoonright E_\xi^s(\Lambda)$ с помощью преобразования /3.9/ можно привести к каноническому виду:

$$(\mathcal{P}_\Lambda^{-1}K_\Lambda\mathcal{P}_\Lambda\phi)(x_1)=-e^{-\beta W(x_1,X_{\bar\Lambda})}\chi_\Lambda(x_1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{\Lambda^n} dY_n\,\phi(Y_n);$$
$$(\mathcal{P}_\Lambda^{-1}K_\Lambda\mathcal{P}_\Lambda\phi)(X_m)=e^{-\beta W(x_1,X_{\bar\Lambda})-\beta W(x_1,X_m\setminus x_1)}\chi_\Lambda(x_1)\phi(X_m\setminus x_1),\quad (m\geq 2). \qquad /3.13/$$

Поскольку $\mathcal{P}_\Lambda: E_\xi^s(\Lambda)\to E_\xi^s(\Lambda)$, а преобразование подобия $\tilde K_\Lambda=\mathcal{P}_\Lambda^{-1}K_\Lambda\mathcal{P}_\Lambda$ не изменяет спектра, то наша задача сводится к исследованию $\sigma(\tilde K_\Lambda)$ для $D(\tilde K_\Lambda)=E_\xi^s(\Lambda)$. Пусть

$$\phi_n=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\int_{\Lambda^i} dY_i\,(\tilde K_\Lambda^n\phi)(Y_i),\quad n\geq 0,\quad \phi\in E_\xi^s(\Lambda), \qquad /3.14/$$

тогда нетрудно проверить, что оператор $\tilde{K}^n_\Lambda$ имеет вид:

$$\tilde{K}^n_\Lambda = \tilde{F}_n + \tilde{H}_n\,,$$

$$\tilde{F}_n\phi = \{\chi_\Lambda(x_1)e^{-\beta W(x_1, X_{\bar\Lambda})}\phi_{n-1},\ \chi_\Lambda(X_2)e^{-\beta W(X_2, X_{\bar\Lambda})-\beta U(X_2)}\phi_{n-2}, \dots$$

$$\dots, \chi_\Lambda(X_n)e^{-\beta W(X_n, X_{\bar\Lambda})-\beta U(X_n)}\phi_0, 0, \dots, 0, \dots\}, \qquad /3.15/$$

$$\tilde{H}_n\phi = \{0, \dots, 0, \chi_\Lambda(X_{n+1})e^{-\beta W(X_{n+1}, X_{\bar\Lambda})-\beta U(X_n)-\beta W(X_n, x_{n+1})}\phi(x_{n+1}),$$

$$\dots, \chi_\Lambda(X_{n+k})e^{-\beta W(X_{n+k}, X_{\bar\Lambda})-\beta U(X_n)-\beta W(X_n, X_{n+k}\setminus X_n)}\phi(X_{n+k}\setminus X_n), \dots\}.$$

Если потенциал $\Phi(x)$ удовлетворяет дополнительному условию /а/, тогда для сосуда $\Lambda \subset R^\nu$ существует такое число $n_\Lambda(c)$, что $U(X_n) = +\infty$ для $n > n_\Lambda(c)$. Поэтому /см. /3.15// для $n > n_\Lambda(c)$ оператор $\tilde{H}_n = 0$: степень $\tilde{K}^n_\Lambda$ будет равна оператору конечного ранга $\tilde{F}_n$ /конечную размерность имеет $\operatorname{Ran}\tilde{F}_n$ /, следовательно: $\sigma(\tilde{K}^n_\Lambda) = \sigma_p(\tilde{K}^n_\Lambda)$ и $\sigma(K_\Lambda) = \sigma_p(K_\Lambda)$. Из /3.13/ нетрудно получить /см. [1,6] /, что множество собственных значений оператора $K_\Lambda \upharpoonright E^s_\xi(\Lambda)$ совпадает с $N(\Xi)$, которое в данном случае конечно. В силу сверхустойчивости $\Phi(x)$ все собственные векторы $\{r_\Lambda(z_i|X_{\bar\Lambda})\}_{i\geq 1} \in E^s_\xi(\Lambda)$, $z_i \in N'(\Xi)$, что доказывает второе из равенств /3.12/.

Пусть теперь потенциал $\Phi(x)$ удовлетворяет дополнительному условию /б/, тогда из /3.11/ и /3.15/ следует, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое число $n(\epsilon)$, что для $n > n(\epsilon)$ имеем:

$$\sqrt[n]{\|\tilde{H}_n\|_{E^s_\xi(\Lambda)}} \leq e^{-\beta n A/|\Lambda|}\,\xi^{-1} < \epsilon\,. \qquad /3.16/$$

Рассмотрим оператор $(\lambda^n I - \tilde{K}^n_\Lambda)$, который удобно представить в виде:

$$(\lambda^n I - \tilde{K}^n_\Lambda) = (\lambda^n I - \tilde{H}_n) - \tilde{F}_n = \left(\lambda^n I - \frac{\tilde{F}_n}{I - \lambda^{-n}\tilde{H}_n}\right)(I - \lambda^{-n}\tilde{H}_n), \qquad /3.17/$$

тогда из оценки /3.16/ и конечности ранга оператора $\tilde{F}_n$ следует, что для $n > n(\epsilon)$ спектр оператора $\tilde{K}^n_\Lambda \upharpoonright E^s_\xi(\Lambda)$ в области $\mathcal{G}_\epsilon = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| > \epsilon\}$ состоит из не более чем n собственных значений. Пусть $\omega = \exp(2\pi i/n)$, тогда

$$(\lambda^n I - \tilde{K}^n_\Lambda) = (\lambda I - \tilde{K}_\Lambda)(\lambda\omega I - \tilde{K}_\Lambda)\dots(\lambda\omega^{n-1} I - \tilde{K}_\Lambda). \qquad /3.18/$$

Заметим теперь, что из обратимости $(\lambda^n I - \tilde{K}^n_\Lambda)$ следует обратимость оператора $(\lambda I - \tilde{K}_\Lambda)$, поэтому

$$((\sigma(\tilde{K}_\Lambda))^n \cap \mathcal{G}_\epsilon) \subset (\sigma(\tilde{K}^n_\Lambda) \cap \mathcal{G}_\epsilon) = \sigma_p(\tilde{K}^n_\Lambda) \cap \mathcal{G}_\epsilon\,. \qquad /3.19/$$

Из /3.19/ тогда следует, что спектр оператора $\tilde{K}_\Lambda \upharpoonright E^s_\xi(\Lambda)$ в области $\mathcal{G}_\epsilon$ состоит из конечного числа точек, т.е. $(\sigma(\tilde{K}_\Lambda) \cap \mathcal{G}_\epsilon) \subset \sigma_p(\tilde{K}_\Lambda)$. Поскольку $\epsilon > 0$ произвольно /см. /3.16//, то $\sigma(\tilde{K}_\Lambda) = \sigma_p(\tilde{K}_\Lambda)$ и, следовательно, $\sigma(K_\Lambda) = \sigma_p(K_\Lambda)$. Второе из равенств /3.12/ доказывается так же, как и в рассмотренном выше случае /а/. □

<u>Замечание 3.5</u>. Из доказательства теоремы 3.5 видно, что спектральные свойства оператора $K_\Lambda \upharpoonright E^s_\xi(\Lambda)$ являются следствием его топологических свойств. В случае /а/ - это следствие его <u>потенциальной компактности:</u> $K^n_\Lambda = \mathcal{P}_\Lambda \tilde{F}_n \mathcal{P}^{-1}_\Lambda$ - является компактным оператором для степеней $n > n_\Lambda(c)$, а в случае /б/ - из оценки /3.16/ следует, что оператор K_Λ -<u>асимптотически потенциально компактный</u> в том смысле, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое число $n(\epsilon)$ и компактный оператор $F_{n(\epsilon)} = \mathcal{P}_\Lambda \tilde{F}_{n(\epsilon)} \mathcal{P}^{-1}_\Lambda$, что $\|K^{n(\epsilon)}_\Lambda - F_{n(\epsilon)}\|_{E^s_\xi(\Lambda)} < \epsilon^{n(\epsilon)}$ см. [8, X.5].

Более точно эти свойства можно выразить на языке теории операторов Фредгольма. Напомним /см., например, [9] /, что оператор $K_\Lambda(\lambda) = \lambda I - K_\Lambda$ является <u>фредгольмовым</u> в точке $\lambda \in \mathbf{C}$ /т.е. $K_\Lambda(\lambda) \in \mathcal{F}(E^s_\xi(\Lambda))$ /, если он может быть представлен в виде:

$$K_\Lambda(\lambda) = U_\lambda + T_\lambda\,, \qquad /3.20/$$

где $U_\lambda : E^s_\xi(\Lambda) \to E^s_\xi(\Lambda)$, и обратим, а оператор T_λ - компактен. Тогда величина

$$\rho(K_\Lambda) = \inf_{\lambda \in \mathbf{C}}\{|\lambda| : K_\Lambda(\lambda) \in \mathcal{F}(E^s_\xi(\Lambda))\}$$

называется <u>радиусом Фредгольма</u> оператора K_Λ. Ясно, что $\rho(K_\Lambda) \leq r(K_\Lambda)$, где $r(K_\Lambda) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|K^n_\Lambda\|_{E^s_\xi(\Lambda)}}$ - спектральный радиус оператора K_Λ, более того, имеет место следующая

<u>Теорема 3.6.</u> Если выполнены условия теоремы 3.5, то радиус Фредгольма оператора КЗ с $D(K_\Lambda) = E^s_\xi(\Lambda)$ равен нулю.

<u>Доказательство</u>. Поскольку спектр оператора K_Λ чисто точечный и может иметь точку сгущения только при $\lambda = 0$ /см. теорему 3.5/, то для любого $\lambda \in \mathbf{C}$ найдется такое достаточно большое число $n \geq 1$, что одновременно $\sqrt[n]{\|H_n\|_{E^s_\xi(\Lambda)}} < |\lambda|\,e^{-2\xi|\Lambda|/m}$, $\{\lambda_k = \omega^k\lambda\}_{k=1}^{n-1} \not\subset \sigma(K_\Lambda)$, где $\omega = \exp(2\pi i/n)$. Тогда из /3.15/ и /3.18/ следует, что оператор $K_\Lambda(\lambda)$ фредгольмов /см. /3.20//:

$$K_\Lambda(\lambda)=(\lambda^n I-H_n)V_n^{-1}(\lambda)-F_n V_n^{-1}(\lambda);$$

$$V_n(\lambda)=(\lambda\omega I-K_\Lambda)(\lambda\omega^2 I-K_\Lambda)\dots(\lambda\omega^{n-1} I-K_\Lambda); \qquad /3.21/$$

$$F_n=\mathcal{P}_\Lambda\tilde{F}_n\mathcal{P}_\Lambda^{-1}; \quad H_n=\mathcal{P}_\Lambda\tilde{H}_n\mathcal{P}_\Lambda^{-1}.$$

Если теперь учесть, что представление /3.21/ для $K_\Lambda(\lambda)$ можно получить для любого $\lambda\neq 0$, то $\rho(K_\Lambda)=0$. □

Следствие 3.3. Резольвента $R_\lambda(K_\Lambda)$ конечноморфна в области фредгольмовости оператора $K_\Lambda(\lambda)$, т.е. для $\lambda\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$ см.[8,9].

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Спектральные свойства оператора КЗ /непрерывные и решетчатые системы/ для сосуда с пустыми граничными условиями были впервые рассмотрены в работе Пастура[6]. При этом предполагалось, что $D(K_\Lambda)=\mathcal{D}_s$, где $\mathcal{D}_s\subset\bigcup_{\xi>0}E^s_\xi(\Lambda)$ - собственное подпространство оператора K_Λ. В работе[6] показано, что спектр $\sigma(K_\Lambda\restriction\mathcal{D}_s)$ точечный и совпадает с множеством $N(\Xi)$, а также замечено, что в пространстве $\mathcal{D}_s$ уравнение КЗ обладает свойствами уравнений Фредгольма. Некоторая переформулировка результатов[6] на случай наличия внешнего поля содержится в работе[10], а в работе[11] сделана попытка описать структуру спектра оператора КЗ в термодинамическом пределе. Заметим, что наличие непустых граничных условий эквивалентно внешнему полю /ср.[10] и /2.8/, /2.9//, причем оно не влияет на спектральные свойства, а лишь определяет положение точек спектра на плоскости $\mathbf{C}$. Наконец, спектр некоторого "модифицированного" оператора КЗ в сосуде с пустыми граничными условиями для финитного парного потенциала взаимодействия с твердой сердцевиной исследовался в работе[12]. В этой работе было показано, что некоторая степень такого оператора является компактным оператором, т.е. спектр "модифицированного" оператора КЗ является точечным /вид спектра найден не был/.

В настоящей работе /см. теорему 3.5/ показано, что этим свойством обладает и "обычный" оператор КЗ. Более того, для сверхустойчивых потенциалов, удовлетворяющих условиям теоремы 3.5, показано, что точечность спектра оператора КЗ является следствием некоторого его общего свойства, а именно: уравнение КЗ является фредгольмовым, а оператор $K_\Lambda\restriction E^s_\xi(\Lambda)$ имеет радиус Фредгольма, равный нулю. Этот результат является более общим, чем[18] и частично[6]. Уменьшение отталкивающей части потенциала взаимодействия /устойчивые потенциалы/ приводит к появлению у оператора КР с $D(\Pi K_\Lambda)=E^s_\xi(\Lambda)$ остаточного спектра

/см. теорему 3.3/, а об операторе КЗ с $D(K_\Lambda)=E^s_\xi(\Lambda)$ нам удалось выяснить лишь, что $\sigma_p(K_\Lambda)\cup\tilde{\sigma}_p(K_\Lambda)=\sigma(K_\Lambda\restriction\mathcal{D}_s)$ /см. теорему 3.2/. Необходимо отметить, что так же, как и в теоремах 3.5, 3.6, спектральные свойства оператора КЗ в пространстве $\mathcal{D}_s$ определяются, возможно, его топологическими свойствами /см. замечание 3.5/, при наделении $\mathcal{D}_s$ естественной топологией /см. замечание 3.2 в работе[1] /. К этому вопросу мы еще вернемся.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить Л.А.Пастура, Н.Ангелеску и Д.Саса за обсуждения и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Загребнов В.А. ОИЯИ, Р5-80-458, Дубна, 1980, с.1-23.
2. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. "Мир", М., 1971.
3. Боголюбов Н.Н., Хацет Б.И. ДАН СССР, 1949, 66, №3, с.321-324; Боголюбов Н.Н., Петрина Д.Я., Хацет Б.И. ТМФ, 1969, 1, №2, с.251-274.
4. Ruelle D. Ann. of Phys., 1963, 25, No.1, p.109-120.
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т.1: Функциональный анализ. "Мир", М., 1977.
6. Пастур Л.А. ТМФ, 1974, 18, №2, с.233-242.
7. Gruber C., Lebowitz J.L. Comm.Math.Phys., 1975, 41, No.1, p.11-18.
8. Иосида К. Функциональный анализ. "Мир", М., 1967.
9. Функциональный анализ /под общ. ред. С.Г.Крейна/. "Наука", М., 1972; Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. "Наука", М., 1971.
10. Moraal H. Physica, 1975, 81A, No.3, p.469-474.
11. Moraal H. Physica, 1977, 87A, No.2, p.331-343.
12. Klein W. J.Math.Phys., 1975, 16, No.7, p.1482-1487.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 марта 1981 года.