объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-81-164

Б.П.Дамянов, Х.Я.Христов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ - НОВЫЙ КЛАСС ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ
VII. ЗАМЕНА НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Направлено в "Болгарский физический журнал"

1981

В предыдущих частях данного исследования [1-6] был введен новый класс обобщенных функций - асимптотические функции /АФ/ $f(x)$ $|-\infty < x < +\infty|$ и были изучены их свойства. Было показано, что они содержат, как частные случаи, классические бесконечно дифференцируемые функции, а также любые линейные комбинации функций Дирака $\delta(x-x_\ell)$ $(\ell = 1,2,\dots,L)$ и их производных $\delta^{(k)}(x-x_\ell)$, точнее - их асимптотических аналогов. АФ можно складывать, умножать на числа, дифференцировать и интегрировать, а также, что более существенно, их можно умножать между собой. Показано, что преобразование Фурье тоже является допустимой операцией.

В настоящей работе мы показываем, что в множестве АФ $f(x)$ мы можем совершать замены независимой переменной $x = \phi(y)$ более общего типа, чем в теории обобщенных функций Соболева-Шварца [7-12], а именно: $g(y) = f(\phi(y))$ будет новой АФ, если а/ $\phi(y)$ определена и бесконечно дифференцируема при всех y; б/ при $y \to \pm\infty$ $|\phi(y)|$ растет не медленнее, чем некоторая степень $|y|$; в/ производные $\phi^{(k)}(y)$, выраженные как функции от x - $\phi^{(k)}(\phi^{-1}(x))$,при $x \to \pm\infty$ имеют умеренный рост; г/ в точках $y_{k\ell}$, где $\phi(y) = x_\ell$, не все производные $\phi^{(k)}(y)$ исчезают; д/ если ϵ - малое положительное число, а $\chi_{k\ell} = \frac{1}{d_{k\ell}!}\phi^{(d_{k\ell})}(y_{k\ell})$, то $\hat{f}^{i}_{\ell mn}((1-\epsilon)\chi_{k\ell}\,\phi^{-1}(x)^{d_{k\ell}})$ при $x \to \pm\infty$ быстро исчезают /$d_{k\ell}$ - кратность корня $y_{k\ell}$ /.

Следовательно, при заданном y любое число производных функции $\phi(y)$ может исчезать ,и такие символы, как $\delta(x^2)$, $\delta''(x^5)$, а также $\delta(x^3)^2$, $\delta'''(x^4)^5$ и т.д., имеют смысл - являются определенными АФ. Однако их функционалы над финитными бесконечно дифференцируемыми пробными функциями $\tilde{f}(x)$, как и функционалы от $\delta(x)^2$, $\delta(x)^3$ и т.д., ведут не к классическим, а к бесконечно большим асимптотическим числам.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

В первой части [1] данного исследования был введен новый класс обобщенных функций - асимптотические функции /АФ/. Как обычно, они вводятся как классы последовательностей классических функций /КФ/ $f(s,x)$ $(0 < s \leq s_1; -\infty < x < +\infty)$ - представителей АФ $f(x)$. Введены также асимптотические числа /АЧ/ а как классы последовательностей классических чисел /КЧ/ $a(s)$ $(0<s\leq s_1)$. Наряду с обычными КЧ они охватывают инфинитезимальные и бесконечно большие числа /полиномиального типа/ [9]. Во второй части [2] были рассмотрены некоторые общие вопросы существования и однозначности введенных структур - АЧ и АФ. По принятым определениям, оказывается, что имеется много нулевых АЧ и нулевых АФ, а среди них - одно абсолютное нулевое АЧ и одна абсолютная нулевая АФ. В [3] даны общие определения понятий квазиклассической функции над /переменными/ АЧ - $a=F(a^i)$ $(i=1,2,\ldots,I)$, квазиклассического /возможно, нелинейного/ оператора над АФ - $f(x)=\Phi(f^i(x))$ и квазиклассического /тоже нелинейного/ функционала - $a=I(f^i(x))$. Все они вводятся теми же действиями над представителями $a^i(s)$ и $f^i(s,x)$: $a(s)=F(a^i(s))$, $f(s,x)=\Phi(f^i(s,x))$, $a(s)=I(f^i(s,x))$ при каждом заданном s. При этом здесь $F(a^i)$, $\Phi(\phi^i(x))$ и $I(\phi^i(x))$ - уже классические функции, операторы и функционалы над КЧ a^i и КФ $\phi^i(x)$. Конечно, области, по которым могут варьировать аргументы a^i и $f^i(x)$, т.е. области определенности квазиклассических действий F, Φ и I, зависят от их конкретного выбора. Показано, что основные алгебраические действия определены для всех АЧ /за исключением деления, когда знаменатель - некоторый нуль/, а линейные операторы сложения, умножения на число, дифференцирования и интегрирования определены для всех АФ без исключения. В работе [4] показано, что действия умножения АФ одну на другую и линейные функционалы типа

$$I=\int f(x)\tilde{f}(x)\,dx, \qquad /1/$$

где $\tilde{f}(x)$ - КФ класса $D(x)$ /финитная и бесконечно дифференцируемая/, определены для всех АФ $f(x)$. При этом, однако, в общем I является не классическим, а асимптотическим числом. На базе этого показано, что бесконечно дифференцируемые КФ, а также функции Дирака $\delta(x-x_\ell)$ и их производные $\delta^{(k)}(x-x_\ell)$, как и все их линейные комбинации, имеют асимптотические аналоги. В [5] и [6] показано, что АФ имеют фурье-образы, которые, однако, принадлежат другому классу АФ - АФ второго рода, аналогичных, но все же отличающихся от исходных /которые следует назвать АФ первого рода/.

Как известно, в теории обобщенных функций Соболева-Шварца /ОФ/ [7-9] допустимы замены независимой переменной $x=\phi(y)$, только если $\phi'(y)\neq 0$ в точках y, соответствующих особым точкам x ОФ $f(x)$ [7,8]. В последнее время рассматриваются еще случаи с исчезающими производными $\phi^{(k)}(y)$, но тогда результат не вполне определен или соответствующие функционалы над пробными функциями $\tilde{f}(x)$ не являются определенными при всех $\tilde{f}(x)$ [10-12]. Здесь мы, пользуясь определениями и обозначениями работ [1-6],

покажем, что АФ допускают более общие замены независимой переменной $x=\phi(y)$, чем те, которые рассматриваются в теории ОФ. Точнее, множество преобразований для АФ частично перекрывается с аналогичными для ОФ. Опускаем преобразования, когда $\phi(y)$ при $y\to\pm\infty$ слишком медленно стремится к $\pm\infty$, но добавляются такие, $\phi(y)$ производные которых до любого порядка /лишь бы не все/ могут исчезать в точках $y_{k\ell}$, соответствующих особым точкам $f(x)$ $(\phi(y_{k\ell})=x_\ell)$, так что такие символы, как $\delta(x^2)$, $\delta''(x^5)$, а также $\delta(x^3)^2$, $\delta'''(x^4)^5$ и т.д., которые в теории ОФ являются бессмысленными, имеют здесь вполне определенный смысл. Однако функционалы типа /1/ будут задавать не КЧ, а бесконечно большие АЧ, подобно функционалам, соответствующим $\delta(x)^2$, $\delta'(x)^3$ и т.д. [4].

Зададим прежде всего класс допустимых подстановок $x=\phi(y)$.

<u>Определение 1</u>. Пусть

$$x=\phi(y) \qquad /2/$$

- КФ со следующими свойствами:

а/ функция определена и бесконечно дифференцируема при всех вещественных y;

б/ при $y\to\pm\infty$ она растет по абсолютному значению не медленнее некоторой положительной степени $p_\pm$ аргумента y, при любом положительном $y_\pm$ существуют числа $c_\pm>0$ и $p_\pm>0$, такие, что $|\phi(y)|\geq c_\pm|y|^{p_\pm}$ при $y\leq -y_-$ и $y\geq y_+$ соответственно, короче,

$$\pm y\geq y_\pm; \qquad /3/$$

в/ производные функции /2/ любого порядка k $(k=1,2,\ldots)$, рассматриваемые как функции от x: $\phi^{(k)}(\psi(x))$, где $\psi(x)$ - функция, обратная к /2/, не растут по абсолютному значению быстрее некоторых положительных степеней p_k от $|x|$, то есть при любых положительных $x_\pm$ существуют числа $c_{k\pm}$ и $p_{k\pm}$, такие, что

$$|\phi^{(k)}(\psi(x))|\leq c_{k\pm}|x|^{p_{k\pm}} \quad \text{при} \quad \pm x\geq x_\pm; \qquad /4/$$

г/ все корни $y_{k\ell}$ $(k=1,2,\ldots,K_\ell;\ K_c\geq 0)$ уравнения

$$\phi(y)=x_\ell \quad (\ell=1,2,\ldots,L) \qquad /5/$$

имеют конечные кратности $d_{k\ell}$ - $\phi^{(d_{k\ell})}(y_{k\ell})\neq 0$ $(k=1,2,\ldots,K_\ell;\ \ell=1,2,\ldots,L)$ /а $\phi^{(i)}(y_{k\ell})=0$ при $i<d_{k\ell}$ /;

д/ если $\chi_{k\ell}=\frac{1}{d_{k\ell}!}\phi^{(d_{k\ell})}(y_{k\ell})$, а ϵ - малое положительное число, то функции $\hat{f}^{\,i}_{\ell mn}((1-\epsilon)\chi_{k\ell}\psi(x)^{d_{k\ell}})$ при всех значениях индексов i, k, ℓ, m, n исчезают быстро, когда $x\to\pm\infty$ /если уравнение /5/ при некотором ℓ не имеет корней, то данное условие при этом ℓ выпадает/.

Примечания

1. Можно подразумевать, что при заданной функции $\phi(y)$ $p_{\pm}$ имеют самые большие, а $p_{k\pm}$ – самые маленькие возможные значения. После того, как $p_{\pm}$ и $p_{k\pm}$ фиксированы, мы можем подразумевать, что $c_{\pm}$ и $c_{k\pm}$ тоже самые большие и самые маленькие возможные /если множества допустимых $p_{\pm}$, $c_{\pm}$ и $p_{k\pm}$, $c_{k\pm}$ открыты снизу или сверху соответственно, то мы выберем значения, которые на ϵ меньше или больше соответствующих пределов/. Тогда $p_{\pm}$ и $p_{k\pm}$ будут, а $c_{\pm}$ и $c_{k\pm}$ не будут зависеть от выбора $y_{\pm}$ и $x_{\pm}$ соответственно.

2. С учетом а/ и г/ ясно, что множества корней K_ℓ при каждом ℓ конечны.

3. Функция $x=\phi(y)$ в общем случае не монотонная, она может иметь много локальных минимумов и максимумов, и поэтому обратная функция $y=\psi(x)$ может не быть определенной при всех x, а там, где определена, она может не быть однозначной. Уточним определение $\psi(x)$. Функции $\phi(y)$ распадаются на 4 класса $\Phi_{\pm\pm}$ в зависимости от того, к $+\infty$ или к $-\infty$ стремится $\phi(y)$, когда $y\to\pm\infty$ /рис.1/. Выберем произвольно некоторое фиксированное значение y_0 переменной y. /Все, что будет сказано в дальнейшем безотносительно к выбору y_0 — если оно справедливо при некотором

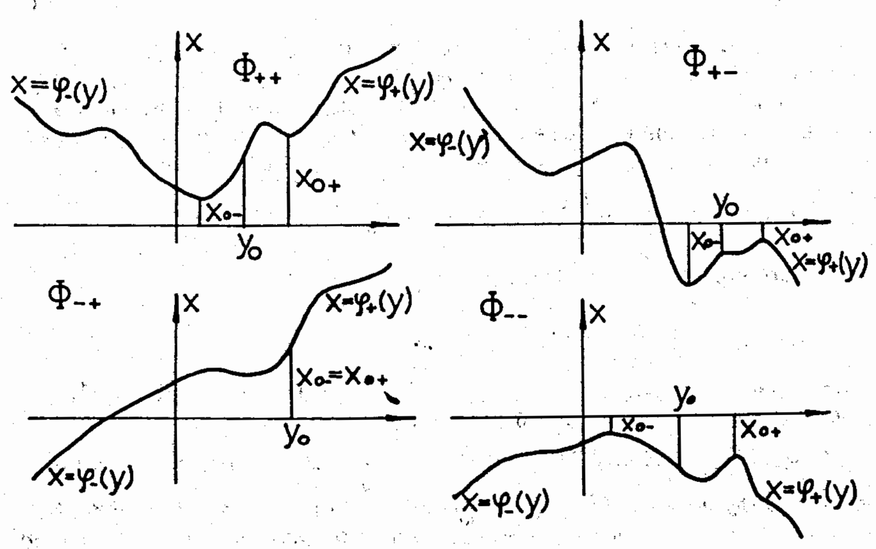

Рис.1

y_0, то будет справедливым и при любом ином y_0/. Тогда $\phi(y)$ можно разложить на две функции $\phi_-(y)$ и $\phi_+(y)$, определенные и совпадающие с $\phi(y)$ при $y\leq y_0$ и $y\geq y_0$. Обозначим через $x_{0\pm}$ минимальное значение функции $\phi_{\pm}(y)$, если она при $y\to\pm\infty$ стремится к $+\infty$, или ее максимальное значение, если стремится к $-\infty$. В случае Φ_{++} мы можем в качестве y_0 взять ту точку или одну из тех точек, где $\phi(y)$ получает свой минимум, а в случае Φ_{--} – одну из точек максимума. Тогда будем иметь $x_{0+} = x_{0-} = \phi(y_0)$. В случае Φ_{++} функции $\psi_{\pm}(x)$, обратные к $\phi_{\pm}(y)$, определены при $x\geq x_{0\pm}$, а в случае Φ_{--} – при $x<x_{0\pm}$. В случае Φ_{+-} функция $\psi_+(x)$ определена при $x\geq x_{0+}$, а $\psi_-(x)$ – при $x<x_{0-}$, а в случае Φ_{-+} $\psi_+(x)$ определена при $x<x_{0+}$, а $\psi_-(x)$ – при $x\geq x_{0-}$. Во всех случаях $\Phi_{\pm\pm}$ функции $\psi_{\pm}(x)$, как правило, многозначны, но при всех детерминациях, когда $x\to\pm\infty$, $\psi_+(x)$ стремится к $+\infty$, а $\psi_-(x)$ – к $-\infty$, принимая при этом все значения от y_0 до $\pm\infty$ соответственно. Можем ввести функции $\phi^+_{\pm}(y)$ и $\phi^-_{\pm}(y)$ – монотонно возрастающие или убывающие мажоранты и миноранты функций $\phi_{\pm}(y)$. При $y\to\pm\infty$ обе одновременно стремятся к $+\infty$ или к $-\infty$. Пусть $\psi^+_{\pm}(x)$ и $\psi^-_{\pm}(x)$ – их обратные функции, причем, по определению, $\psi^-_{\pm}(x)\leq\psi^+_{\pm}$. Они определены и однозначны при $x\geq x_{0\pm}$ или $x\leq x_{0\pm}$ и представляют собой две возможные детерминации $\psi_+(x)$ и $\psi_-(x)$. Если примем, что в точках разрыва $\psi^-_{\pm}(x)$ принимают нижнее граничное значение, а $\psi^+_{\pm}(x)$ – верхнее, то при любой детерминации $\psi_{\pm}(x)$ будем иметь $\psi^-_{\pm}(x)\leq\psi_{\pm}(x)\leq\psi^+_{\pm}(x)$. Таким образом, $\psi^{\pm}_{\pm}(y)$ или, что все равно, $\phi^{\pm}_{\pm}(x)$ ограничивают на плоскости x,y две полосы – одну при $y\geq y_0$ и другую при $y\leq y_0$. Они монотонно уходят к $x=\pm\infty$, когда $y\to\pm\infty$, или к $y=\pm\infty$, когда $x\to\pm\infty$. На них лежат все детерминации $\psi_{\pm}(x)$. Многозначные в общем случае функции $\psi_{\pm}(x)$ могут быть заданы эквивалентно и через некоторое множество обычных однозначных функций, и так как при различных x мы можем выбирать различные детерминации, то множество этих однозначных функций очень велико. Без потери общности мы можем ограничиться такими функциями $\psi_{\pm}(x)$, у которых или левая, или правая производная в точках разрыва возрастает неограниченно /т.е. производная функция $\phi(y)$ хотя бы в одной из точек разрыва $\psi_{\pm}(x)$ должна быть равна нулю/.

4. После этого уточнения обратной функции $\psi(x)$ условие в следует понимать в том смысле, что в левом члене неравенства /4/ мы должны писать $\psi_{\pm}(x)$ вместо $\psi(x)$ и полученные два неравенства должны иметь место при $x>x_{0\pm}$ или при $x<x_{0\pm}$, смотря по тому, где определена каждая из функций $\psi_+(x)$ и $\psi_-(x)$. В таком же смысле следует понимать и условие д: функции $\hat{f}^{i}_{\ell_{mn}}((1-\epsilon)\chi_{k\ell}\,\psi_{\pm}(x)^{d_{k\ell}})$ должны быстро исчезать при $x\to\infty$ или $x\to-\infty$,

смотря по тому, где заданы $\psi_+(x)$ и $\psi_-(x)$. Это значит, что нет необходимости рассматривать обратные функции $\psi(x)$, значения которых при некоторых x больше, а при других - меньше y_0. Этим множество допустимых функций /2/ не меняется.

5. Отметим, что ограничения, накладываемые на мажоранты $\hat f^i_{\ell_{mn}}(t)$ условием д, одинаковы при всех значениях i, m, n. Классы допустимых мажорант зависят только от ℓ и при этом $\hat f^i_{\ell_{mn}}(t)$ для каждого заданного ℓ должны быть такими, что когда $x\to\pm\infty$ некоторое множество функций $\hat f^i_{\ell_{mn}}(t(x))$, $t(x)=(1-\epsilon)\chi_{k\ell}\psi_\pm(x)^{d_{k\ell}}$, получаемых при обоих знаках $\pm$, при $k=1,2,\dots,K_\ell$ и при всех детерминациях $\psi_\pm(x)$, должно быстро исчезать. Покажем, что мы можем свести это условие к не более чем двум условиям того же типа для $\phi(y)$ при $y>y_0$ и $y<y_0$ или для $\hat f^i_{\ell_{mn}}(t)$ при $t>0$ или $t<0$.

Обозначим через $\bar f^i_{\ell_{mn}}(t)$ наименьшую мажоранту функции $\hat f^i_{\ell_{mn}}(t)$, которая убывает монотонно при $t\geq 0$, $t\to\infty$ и $t<0$, $t\to-\infty$. Ясно, что условие д для $\hat f^i_{\ell_{mn}}(t)$ эквивалентно тому же условию для $\bar f^i_{\ell_{mn}}(t)$. Иными словами, без ограничения общности мы можем ограничиться монотонно убывающими мажорантами $\hat f^i_{\ell_{mn}}(t)$. Дальше мы будем подразумевать это, и вместо $\bar f^i_{\ell_{mn}}(t)$ будем писать $\hat f^i_{\ell_{mn}}(t)$. Мы можем не рассматривать все детерминации многозначных функций $\psi_\pm(x)$, а взять только $\bar\psi_\pm(x)$. Учитывая, что $\bar\psi_\pm(x)$ при $x\to\pm\infty$ возрастают бесконечно, видим, что мы не должны рассматривать ни все значения $k=1,2,\dots,K_\ell$, ни оба нижних знака к $\bar\psi_\pm(x)$. Разделим их на две группы: группа A^+, при которых аргумент $t(x)$ при $\psi_\pm=\bar\psi_\pm$ положителен, и A^- - когда он отрицателен. Первая группа охватывает случаи, когда $d_{k\ell}$ четно и $\chi_{k\ell}>0$ или $d_{k\ell}$ нечетно и $\chi_{k\ell}\bar\psi_\pm>0$, а вторая - когда $d_{k\ell}$ четно и $\chi_{k\ell}<0$ или $d_{k\ell}$ нечетно и $\chi_{k\ell}\bar\psi_\pm<0$. Среди элементов каждой из этих групп выделим те, у которых $d_{k\ell}$ имеет минимальное значение, а среди них - тот или один из тех, у которого $|\chi_{k\ell}|$ минимально. Обозначим их через $t^\pm_+(x)$. Аналогично вводим $t^\pm_-(x)$, рассматривая аргументы $t(x)$, содержащие $\bar\psi_-(x)$. Чтобы обеспечить условие д, достаточно проверить для функции $\hat f^i_{\ell_{mn}}(t^\pm_\pm(x))$ быстрое убывание в четырех случаях.

В случаях $t^\pm_+(x)$ ограничения накладываются на $\phi(y)$ при $y>y_0$, а в случаях $t^\pm_-(x)$ - при $y<y_0$. В случаях $t^+_\pm(x)$ ограничения накладываются на $\hat f^i_{\ell_{mn}}(t)$ при $t>0$, а в случаях $t^-_\pm(x)$ - при $t<0$. Если некоторая из групп A^+ или A^- пустая, то никаких условий на $\hat f^i_{\ell_{mn}}$ при $t>0$, соответственно при $t<0$, не накладывается. При этом, чтобы осуществить переход $\hat f^i_{\ell_{mn}}(1-\epsilon)\chi_{k\ell}\times\psi_\pm(x)^{d_{k\ell}})\to 0$, аргумент x должен стремится к $+\infty$ или к $-\infty$.

Какой из этих случаев будем иметь, зависит от случая Φ_{++}. Первый знак указывает, куда стремится аргумент функции $\bar\psi_+(x)$ /и $\bar\psi_\mp(x)$ /, а второй - $\psi_-(x)$ /и $\bar\psi_-(x)$ /.

Дальше для простоты ограничимся случаем Φ_{++}, так что функции $\psi_+(x)$ и $\psi_-(x)$ определены при $x>x_{0\pm}$ - их аргумент стремится к $+\infty$ /а не к $-\infty$ /.

6. С учетом условия д покажем, что

$$\hat f(\chi_{k\ell}(\psi_\pm(x_\ell+\xi)-y_{k\ell})^{d_{k\ell}}) \text{ быстро исчезает при } \xi=x-x_\ell\to\infty. \qquad /6/$$

Индексы i, ℓ, m, n к $\hat f$ для краткости опускаем.

По п.5 знаем, что $\hat f((1-\epsilon)\chi_{k\ell}\psi_\pm(x)^{d_{k\ell}})$ быстро убывает, т.е. что $\hat f((1-\epsilon)\chi_{k\ell}\psi_\pm(x)^{d_{k\ell}})x^k\to 0$ при любом k. Следовательно,

$$\hat f((1-\epsilon)\chi_{k\ell}\psi_\pm(x_\ell+\xi)^{d_{k\ell}})\xi^k\left(\frac{x_\ell+\xi}{\xi}\right)^k\to 0.$$

Но $(x_\ell+\xi)/\xi\to 1$ при $\xi\to\infty$, итак, быстрое убывание функции $\hat f((1-\epsilon)\chi_{k\ell}\psi_\pm(x)^{d_{k\ell}})$ доказано. Далее, ввиду того, что $\psi_\pm(x)\to\infty$, когда $x\to\infty$, при достаточно больших x будем иметь

$$|\chi_{k\ell}(\psi_\pm(x)-y_{k\ell})^{d_{k\ell}}| = |\chi_{k\ell}\psi_\pm(x)^{d_{k\ell}}|\cdot\frac{(\psi_\pm(x)-y_{k\ell})^d}{\psi_\pm(x)^d}\geq$$

$$\geq|(1-\epsilon)\chi_{k\ell}\psi_\pm(x)^{d_{k\ell}}|.$$

А так как $\hat f^i_{\ell_{mn}}(t)$ убывает при $t>0, t\to\infty$ и $t<0, t\to-\infty$, то этим /6/ доказано.

В условие д был введен множитель $1-\epsilon$ именно для того, чтобы вывести /6/. Отметим, что этот множитель необходим - если бы мы знали только, что $\psi(t)$ возрастает, а $\hat f(t)$ и $\hat f(\psi(x))$ быстро убывают, мы не смогли бы вывести, что $\hat f(\psi(x)-y_0)$ также быстро убывает.

В самом деле, $\psi(x)=\ln\ln\ln^\alpha x$ $(\alpha>0)$ растет неограничено, а $\hat f(t)=\exp(-\exp\exp t)$ быстро убывает. Функция

$$\hat f(\psi(x)) = \exp(-\ln x\ln^{\alpha-1}x) = \frac{1}{x^{\ln^{\alpha-1}x}}$$

тоже убывает: при $\alpha>1$ - быстро, а при $0<\alpha<1$ - медленно. Если теперь в $\hat f(t)$ подставим $t=\psi(x)-y_0=\ln\ln\ln^\alpha x-\ln e^{y_0} = \ln(e^{-y_0}\ln\ln x)$, найдем $\hat f(\psi(x)-y_0)=\exp(-\exp(e^{-y_0}\ln\ln^\alpha x))=\exp(-\ln^{\alpha e^{-y_0}}x)$.

Если $\alpha>1$, а $y_0<-\ln\alpha$, то функция $\hat f(\psi(x)-y_0)$ будет быстро убывать. Но если $\alpha>1$, а $y_0>-\ln\alpha$, она тоже будет убывать, но не быстро. Отсюда видна необходимость множителя $1-\epsilon$.

7. С учетом свойства в при любой детерминации имеем

$$|\psi_{\pm}(x)| \leq d_{\pm}\, |x|^{1/p\pm} \quad \text{при} \quad \pm x \geq x_{\pm}\,, \qquad /7/$$

где

$$x_{\pm} = c_{\pm} y_{\pm}^{p_{\pm}}\,, \qquad d_{\pm} = c_{\pm}^{-1/p_{\pm}}\,,$$

причем без ограничения общности будем считать, что эти $x_{\pm}$ совпадают с аналогичными в /4/.

8. Класс подстановок $x=\phi(y)$ /2/ охватывает, во-первых, все функции, которые при $\pm y \leq y_{\pm}$ сводятся к полиномам $P_{\pm}(y)$. /Функцию $\phi(y)$ при $-y_{-}<y<y_{+}$ следует определить так, чтобы в целом она получилась бесконечно дифференцируемой и удовлетворяла г/. Легко сообразить, что если $m_{\pm}$ - степень полинома $x=P_{\pm}(y)$, а $a_{\pm}$ - его старший коэффициент, то чтобы реализовать случай Φ_{++}, мы должны иметь, во-первых, $c_{+}>0$ и, во-вторых, $c_{-}>0$ при m_{-} четном или $c<0$ при m нечетном. Тогда $|P_{\pm}^{(k)}(P_{\pm}^{-1}(x))|$ будет возрастать не быстрее, чем $c_k |x|^{(m-k)/m}$ $\left(c_k = \frac{m!}{(m-k)!}|a_{\pm}^{k/m}|\right)$./При $k>m$, очевидно, $P^{(k)}(P^{-1}(x)) \equiv 0$ /.

Класс функций /2/ охватывает также все те функции, которые при $\pm y \leq y_{\pm}$ имеют вид $P_{\pm}(y)\, e^{b_{\pm}|y|^{n_1}}$ $(b_{+}>0)$. Пусть $y>y_{+}$ /случай $y<-y_{-}$ рассматривается аналогично/. Опуская для простоты индекс + к P, a, b, m и n, получаем, что производные $\phi^{(k)}(y)$ $(k=1,2,\ldots)$ имеют вид $P_k(y)e^{by^n}$, где $P_k(y)$ - полиномы степени $m+k(n-1)$ со старшим коэффициентом $ab^k n^k$. Чтобы оценить $y=\psi(x)$, используем связь $y=(\ln x^{\frac{1}{b}} - \ln P(y))^{\frac{1}{n}}$ /знак x совпадает со знаком $P(y)$ /. В качестве первого приближения возьмем $y=(\ln x^{\frac{1}{b}})^{\frac{1}{n}}$. Тогда вторым будет $y=(\ln x^{\frac{1}{b}} - \ln P((\ln x^{\frac{1}{b}})^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{a}})^{\frac{1}{n}}$. Следовательно,

$$\phi^{(k)}(\psi(x)) = P_k((\ln x^{1/b})^{1/n})\, e^{\ln x - \ln P((\ln x^{1/b})^{1/n})} =$$

$$= x \cdot \frac{P_k((\ln x^{1/a})^{1/n})}{P((\ln x^{1/a})^{1/n})}\,.$$

Ограничиваясь старшими степенями в P и P_k, находим

$$\phi^{(k)}(\psi(x)) = x \cdot \frac{ab^k n^k (\ln x^b)^{m+k(n+1)}}{c((\ln x^{1/a})^{1/n})}.$$

Очевидно, при больших x имеем $|\phi^{(k)}(\psi(x))| < b^{k/n} x^{1+\epsilon}$, где ϵ - малое число.

Такой же результат находим и в более общем случае, когда $x=P_{\pm}(y)\, e^{Q_{\pm}(y)}$, где старший коэффициент $b_{\pm}$ полинома $Q_{\pm}(y)$ связан с его степенью $n_{\pm}$ таким же образом, как и в описанном выше случае.

Можно составить примеры функций $x=\phi(y)$ с осциллирующими членами, и тогда $\phi^{(k)}(\psi(x))$ будут иметь более высокие степени роста /см. приложение, п.4/. Подводя итоги, видим, что класс допустимых преобразований /2/ очень богат. Замену /2/ можно выбрать сколь угодно быстро возрастающей /по абсолютному значению/, лишь бы ее осцилляции и осцилляции ее производных при $y \to \pm\infty$ не были слишком большими и крутыми.

9. Условия в и д накладывают ограничения на $\phi(y)$ /2/, зависящие от выбора АФ $f(x)$, к которой мы будем применять /2/, - мажоранты $\hat{f}^{1}_{\ell mn}(t)$ должны исчезать достаточно быстро при $t \to \pm\infty$, тем быстрее, чем быстрее возрастает $\phi(y)$ при $y \to \pm\infty$. Поэтому попробуем сузить класс подстановок /2/, так чтобы они стали применимыми к любой АФ $f(x)$.Для этой цели достаточно сохранить условия а и б , отбросить д, а вместо в и г принять:

в′/ существуют положительные числа $\bar{c}_{\pm}$ и $\bar{p}_{k\pm}$, такие, что

$$|\phi^{(k)}(y)| \leq \bar{c}_{k\pm} |y|^{\bar{p}_{k\pm}}\,, \text{если} \ \pm y > y_{\pm}\ ;$$

г′/ каждому $x=\phi(y)$ соответствует целое неотрицательное число $d=d(y)$, такое, что $\phi(y)^{(d)} \neq 0$ /а $\phi(y)^{(i)}=0$ при $i<d$ /.

Условия а, б, в′, г′ уже не зависят от выбора $f(x)$. Кроме того,из г′ сразу можно вывести г.Интегрируя, получаем, что если условие в выполнено при больших k, оно будет иметь место и при всех k, в том числе и при $k=0$. Отсюда с учетом условия б выводим в и д. Следовательно, если а-д обеспечивают существование АФ $f(\phi(y))$ /что мы докажем/, то а, б, в′,г′ тоже будут это обеспечивать.

10. На основе этих более простых условий а, б, в′, г′ получаем, что неоднозначные функции $\psi_{\pm}(x)$ при каждом x могут принимать только конечное множество значений, что функции $\psi_{\pm}^{+}(x)$ и $\psi_{\pm}^{-}(x)$ в любом конечном интервале оси x могут иметь только конечное множество разрывов и что, если сузим множество детерминаций $\psi_{\pm}(x)$,как указано в конце примечания 3, то то же самое будет относиться к любой из этих детерминаций.

<u>Определение 2</u>. По определениям 2 и 3в [3],совершить замену независимой переменной /2/ в данной АФ $f(x)$ означает найти новую АФ $g(y)$,представители которой $g(s,y)$ получаются из $f(s,x)$ заменой /2/:

$$f(x) \to g(y) = f(\phi(y)) \quad \text{и} \quad f(s,x) \to g(s,y) = f(s,\phi(y))\,. \qquad /8/$$

Имея эти определения, мы можем сформулировать

Теорему 1. Расширенное множество асимптотических функций $F(x)$ /см. определение 16 в [1] / замкнуто по отношению к любой замене независимой переменной /8/. При этом преобразование /8/ является четким /см. определение 5 в [3] /. Регулярная компонента $f_0(s,x)$ исходной АФ $f(x)$ переходит в регулярную компоненту $g_0(s,y)$ новой АФ $g(y)$, а каждая сингулярная компонента $f_{\ell m}(s,t)$ $(t=(x-x_\ell)s^{-m})$ в общем порождает у $g(y)$ не одну, а некоторое конечное множество K_ℓ $(\ell=0,1,2,\dots)$ компонент $g_{k\ell m'}(s,r)$ $(k=1,2,\dots,K_\ell;$ $r=(y-y_{k\ell})s^{-m'})$, где K_ℓ – число корней $y_{k\ell}$ уравнения /3/. Эти корни задают особые точки АФ $g(y)$. Для них можно ввести и общую нумерацию $y_{\ell'}$ $(\ell'=1,2,\dots,L';L'=\sum_\ell K_\ell)$. Внутренние степени компонент $g_{k\ell m'}(s,r)$ задаются через

$$m'=m/d_{k\ell}. \qquad /9/$$

Предполагая без ограничения общности, что параметр N для исходной функции $f(x)$ равен 1 /см. определение 14 в [1] /, параметр $N'_{k\ell m}$ для компоненты $g_{k\ell m}(s,r)$ будет задаваться /наименьшим/ знаменателем выражения /9/, а параметр N' для всей АФ $g(y)$ будет /наименьшее/ общее кратное чисел $N'_{k\ell m}$. Если /5/ при заданном ℓ не имеет корней $(K_\ell=0)$, то компоненты $f_{\ell m}(s,t)$ $(m\in M_\ell)$ переходят в представители абсолютной нулевой АФ $g_{00}(s,y)$ без разрывов /см. определение 5 в [2] /, так что при наличии других компонент у $g(y)$ их можно и не писать.

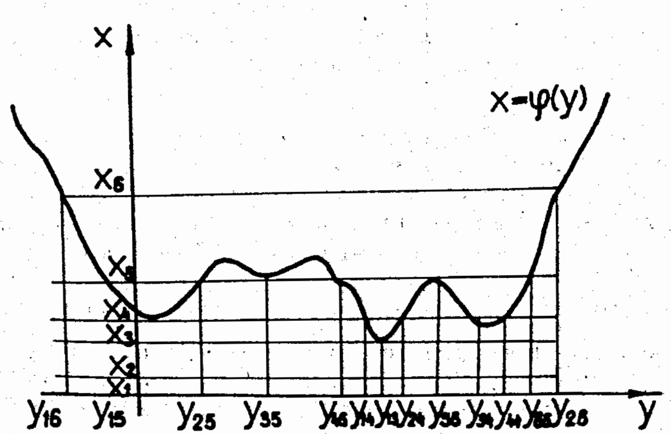

Рис.2

На рис.2 представлен график одной функции $x=\phi(y)$ /2/. По ординате отложены особые точки x_ℓ исходной АФ $f(x)$, а по абсциссе – особые точки $y_{k\ell}$ искомой АФ $g(y)$. Каждой особой точке x_ℓ соответствуют столько же особых точек $y_{k\ell}$ $(k=1,2,\dots,K_\ell)$, сколько раз прямая $x=x_\ell$ пересекает график функции /2/. Ввиду условий б и г определения 1 множество точек $y_{k\ell}$ конечно /оно может быть и пустым/. В данном случае имеем $L=6$; $K_1=K_2=0$; $K_3=1$; $K_4=4$; $K_5=6$; $K_6=2$; $L'=13$. Вместо $y_{k\ell}$ можем записать $y_{\ell'}$ $(\ell'=1,2,\dots,13)$.

Доказательство теоремы 1 сводится к двум утверждениям:

I. Регулярная компонента $f_0(s,x)$ после замены /8/ переходит точно в регулярную компоненту новой АФ:

$$f_0(s,\phi(y))=g_0(s,y). \qquad /10/$$

II. Каждая сингулярная компонента $f_{\ell m}(s,(x-x_\ell)s^{-m})$ при подстановке /2/ переходит в функцию, которую можно представить точно как сумму из K_ℓ сингулярных компонент:

$$g_{k\ell m'}(s,r_{k\ell m'}) \quad (k=1,2,\dots,K_\ell,\ r_{k\ell m'}=(y-y_{k\ell})s^{-m'}), \qquad /11/$$

с надлежащим образом выбранными характеристиками.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОТДЕЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ АФ

Начнем с утверждения I. Возможность разложения функции $g_0(s,y)$ по степеням s от ν_0 до ν_0^* /условие А определения 8 в [1] / следует непосредственно из /8/ – замена /2/ не затрагивает параметр s, и мы можем совершить ее почленно в /11/ [1]. Дифференцируемость при $y\neq y_\ell$ тоже получаем легко. Докажем мажорируемость /условие С/. Рассмотрим i-ю производную n-й остаточной суммы функции /11/:

$$g^{*(i)}_{0n}(s,y)=\frac{d^i}{dy^i}(f^*_{0n}(s,\phi(y))) \qquad (i\geq 0). \qquad /12/$$

При $i=0$ она, очевидно, сводится к $f^*_{0n}(s,\phi(y))$, а при $i>0$ представляет собой конечную сумму членов, каждый из которых является произведением одной производной $f^{*(j)}_{0n}(s,x)_{x=\phi(y)}$ $(j\leq i)$ остаточной суммы $f^*_{0n}(s,x)$ при $x=\phi(y)$ и j производных $\phi^{(i_h)}(y)$ функции /2/ $(h=1,2,\dots,j;\ i_h\geq 1;\ \sum i_h=j)$. При помощи теоремы 1 в [2] видим, что мажорирующую функцию $i!\hat O'_{0n}(s)\hat g^i_{0n}(y)$ можем получить, если в каждом члене вместо производных $f^{*(j)}_{0n}(s,x)_{x=\phi(y)}$ поставим соответственно $j!\hat O_{0n}(s)\hat f^j_{0n}(\phi(y))$, а производные $\phi^{(i_h)}(y)$ заменим их абсолютными значениями. Видно при этом, что $\hat O'_{0n}(s)=\hat O_{0n}(s)$ не будет зависеть от j /а следовательно, и от i /. Этим утверждение I проверено.

Доказательство утверждения II более сложно. Чтобы понять, почему особые точки новой АФ g(y) задаются корнями $y_{k\ell}$ $(k=1,2,\dots,K_\ell)$ уравнения /5/, возьмем графики некоторой компоненты $f_{\ell m}(s,(x-x_\ell)s^{-m})$ исходной АФ f(x) при нескольких значениях $s_1>s_2>s_3$ параметра s /рис.3а/. /У $f_{\ell m}(s,(x-x_\ell)s^{-m})$

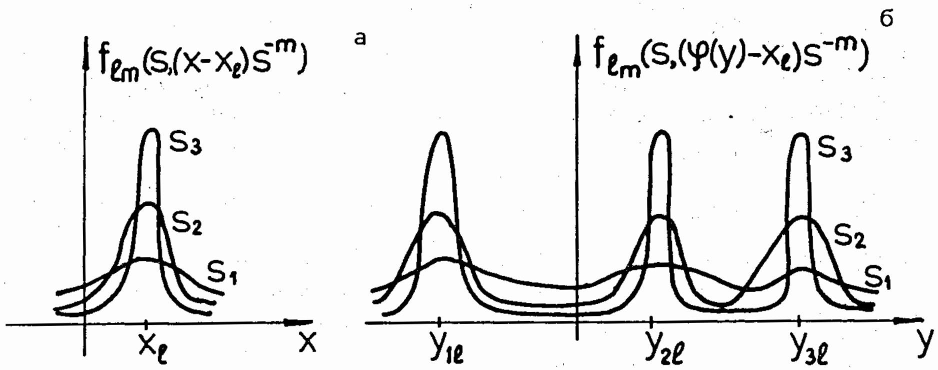

Рис.3

может быть и несколько максимумов, но когда $s\to 0$ все они будут сужаться и собираться к одной точке x_ℓ /. Очевидно, $f_{\ell m}(s,(\phi(y)-x_\ell)s^{-m})$ задает вклад $f_{\ell m}(s,t_{\ell m})$ в новой АФ g(y) /12/ и, если /5/ при заданном ℓ имеет несколько корней $y_{k\ell}$, то легко сообразить, что графики /12/ при $s=s_1,s_2,s_3$ $(s_1>s_2>s_3)$ будут иметь вид, представленный на рис.3б, с максимумами, сужающимися к точкам $y_{k\ell}$ /на рисунке $K_\ell=3$ /. Если для простоты учтем только ведущий член $f_{\ell m\nu_{\ell m}}((x-x_\ell)s^{-m})s^{\nu_{\ell m}}$ рассматриваемой компоненты и если у него всего один максимум при $x=x_\ell$, то при заданном s максимумы будут иметь одну и ту же высоту, равную высоте максимума /12/:

$$f_{\ell m}(s,t)\approx f_{\ell m\nu_{\ell m}}(t)\,s^{\nu_{\ell m}},$$

и будут тем уже, чем выше кратность $d_{k\ell}$ корня $y_{k\ell}$ и чем меньше абсолютное значение первой отличной от нуля производной $\phi(y)$ при $y=y_{k\ell}$.

Рассмотрим четыре случая: II_0 – уравнение /5/ при заданном x_ℓ не имеет решений $(K_\ell=0)$; II_1 – (5) имеет точно одно решение $y_\ell(K_\ell=1)$; II_2 – существуют точно два различных решения $y_{k\ell}(K_\ell=2)$, и II_3 – имеются больше двух решений $y_{k\ell}(K_\ell>2)$. Случай II_0 относительно простой: подстановка /8/ ведет к абсолютной нулевой АФ $g_{00}(y)$. В случае II_1 разложение /11/ в [1] выводится

нетривиально, потому что x и y входят в $f_{\ell m}$ и $g_{k\ell m}$ через

$$t=(x-x_\ell)s^{-m} \text{ и } r=(y-y_{k\ell})s^{-m'}, \qquad /13/$$

а здесь s участвует в отрицательных степенях, и поэтому возникает опасность, что у $g^{*(k)}_{k\ell mn}(s,r)$ появятся неограниченно большие отрицательные степени s /что недопустимо/. Оказывается, однако, что связь $t=t(s,r)$, выводимая из /2/ и /13/, содержит только положительные степени s /см. приложение, п.3/. Проверка свойства в сводится к мажорированию производных по r остаточных сумм разложения функции /12/ или, что все равно, /11/ по степеням s. Представим их в виде сумм произведений от производных функции $f_{\ell m}(s,t)$ и от остаточных сумм $\phi(y)$. Мы найдем в явном виде эти комбинации. /Их структура не проста, так как $f_{\ell m}(s,t)$ зависит от s прямо и через $t=(x-x_\ell)s^{-m}$, где $x=\phi(y)$, а $y=y_\ell+rs^{m'}$ /. Потом покажем, что $f_{\ell m}(s,t)$ и $\phi(y)$ входят в каждый член так, что на базе их свойств можно вывести мажорирование. В случае II_2 – когда /5/ имеет два корня $y_{k\ell}$ $(k=1,2)$ – компоненте $f_{\ell m}(s,t_{\ell m})$ $(m\in M_{\ell m})$ соответствуют две компоненты /11/ для $g(s,y)$, и возникает проблема, как расчленить /12/ на две части так, чтобы каждая обладала свойствами A–D определения 8 в [1]. Случай II_3 не ведет к существенным новым трудностям.

Докажем, что /12/ в случае II_0 задает некоторый представитель абсолютной нулевой АФ $g_{00}(s,y)$ /определение 5 в [2] /. Так как /5/ не имеет корней, существуют две альтернативы: а/ $\phi(y)>x_\ell$ при всех y и б/ $\phi(y)<x_\ell$ при всех y. Рассмотрим случай а/ $\ell=1$ и $\ell=2$ на рис.2/. Альтернатива б аналогична. Учитывая /23/ в [1], для $g_{00}(s,y)=f_{\ell m}(s,(\phi(y)-x_\ell)s^{-m})$ находим

$$|g_{00}(s,y)|\leqq \hat O_{\ell m}(s)\,\hat f_{\ell m}((\phi(y)-x_\ell)s^{-m})=\hat O_{\ell m}(s)\,\hat d_{\ell m}[(\phi(y)-x_\ell)s^{-m}]^2,$$

где $\hat d_{\ell m}(t)=+\sqrt{\hat f_{\ell m}(t)}$. Очевидно,

$$\hat d_{\ell m}((\phi(y)-x_\ell)s^{-m})\leqq \hat d_{\ell m}((\phi^-(y)-x_\ell)s_1^{-m}),\ \hat d_{\ell m}((\phi^-(y_0)-x_\ell)s^{-m}), \qquad /14/$$

и если определим

$$\hat O_{00}(s)=\hat O_{\ell m}(s)\,\hat d((\phi^-(y_0)-x_\ell)s^{-m}) \text{ и } \hat g_{00}(y)=\hat d((\phi^-(y)-x_\ell)s_1^{-m}),$$

то будем иметь

$$|g_{00}(s,y)|\leqq \hat O_{00}(s)\,\hat g_{00}(y),$$

причем $\hat O_{00}(s)$ убывает быстро при $s\to 0$, а $\hat g_{00}(y)$ – при $y\to\pm\infty$.

Обобщение этого результата для производных $g_{00}^{(j)}(s,y)$ функции $g_{00}(s,y)$ осуществляется как при доказательстве утверждения I: дифференцируя /12/ i раз по y, получим конечную сумму членов $R(s,y)$, каждый из которых содержит одну производную $\frac{d^j}{dt^j} f_{\ell m}(s,t)$ $(t=(\phi(y)-x_\ell)s^{-m};\ j=1,2,\dots,i)$, и помноженное на s^{-m} произведение j-производных $\phi^{(i_h)}(y)$ $(h=1,2,\dots,j,\ \sum_{h=1}^{i} i_h = i)$:

$$g_{00}^{(j)}(s,y)=\sum_{i=1}^{j}\sum_{i_h} R_{iji_h}(s,y) \quad (h=1,2,\dots,j;\ i_h\geq 1;\ \sum i_h = i),$$

$$R_{iji_h}(s,y)=s^{-mj} f_{\ell m}^{(j)}(s,t)\,\phi^{(i_1)}(y)\,\phi^{(i_2)}(y)\dots\phi^{(i_j)}(y) \quad (t=(\phi(y)-x_\ell)s^{-m}).$$

На основании теоремы 1 в [2] мажорирование $g_{00}^{(i)}(s,y)$ сводится к мажорированию членов типа $R(s,y)$ /индексы i, j, i_h опущены/. Заменяем производные $f_{\ell m}^{(j)}(s,t)$ на их мажоранты $j!\,\hat O_{\ell m}(s)\,\hat f_{\ell m}^{j}(t)$. /Если не пишем нижний индекс n и верхний *, то это означает, что мажорируются производные самой функции $f_{\ell m}(s,t)$, а не производные их остаточных сумм, т.е. что $n = \nu_{\ell m}-1$ /. Находим

$$|R(s,y)|\leq j!\,\hat O_{\ell m}(s)\,s^{-mj}\,\hat d_{\ell m}^{j}(t)^2\,|\phi^{(i_1)}(y)|\,|\phi^{(i_2)}(y)|\dots|\phi^{(i_j)}(y)|$$

$$(t=(\phi^{-}(y)-x_\ell)s^{-m}).$$

Здесь, как и выше, $\hat d_{\ell m}^{j}(t)=\sqrt{\hat f_{\ell m}^{j}(t)}$. На основании /14/ и примечания в к построению 1 в [2] определим константы $a_{\ell m}^{j}$ и не зависящую от j быстро убывающую при $s\to 0$ функцию $\hat O_{00}(s)$ так, чтобы

$$a_{\ell m}^{j}\hat O_{00}(s) > \hat O_{\ell m}(s)\,s^{-mj}\,\hat d_{\ell m}^{j}((\phi^{-}(y)-x_\ell)s^{-m}).$$

Это возможно ввиду быстрого исчезновения $\hat d_{\ell m}^{j}(t)$ при $t\to\infty$. Если зададим еще

$$\hat g_{00}^{i}(y)=\sum_{j,i_h}\hat g_{iji_h}(y)$$

$$(1\leq j\leq i;\ i_h\geq 1;\ \sum i_h = j),$$

где

$$\hat g_{iji_h}(y)=a_{\ell m}^{j}\hat d_{\ell m}^{j}((\phi^{-}(y)-x_\ell)s_1^{-m})|\phi^{(i_1)}(y)|\,|\phi^{(i_2)}(y)|\dots|\phi^{(i_j)}(y)|,$$

то искомое неравенство

$$|g_{00}^{i}(s,y)|\leq \hat O_{00}(s)\,\hat g_{00}^{i}(y)$$

будет обеспечено, причем, как уже упомянуто, $\hat O_{00}(s)$ быстро исчезает. Остается проверить, что $\hat g_{00}^{i}(y)$ или, что все равно,

$\hat g_{iji_h}(y)$ при $y\to\pm\infty$ тоже быстро исчезают. Для этой цели достаточно проверить, что при любом $k>0$ выражения

$$G_k(r)=\hat g_{iji_h}(y)|y|^k=$$

$$=a_{\ell m}^{j}\hat d_{\ell m}^{j}((\phi(y)-x_\ell)s_1^{-m})|\phi^{(i_1)}(y)|\,|\phi^{(i_2)}(y)|\dots|\phi^{(i_j)}(y)|\,|y|^k \quad /15/$$

стремятся к нулю при $y\to\pm\infty$. /Индексы i, j, i_h к G опущены/. Вернемся к переменной $x=\phi(y)$, то есть выразим y через x /2/. Мы ограничились случаем Φ_{++}, так что достаточно проверить это же свойство при $x\to\infty$. Так, /15/ переходит в

$$R_{n\pm}(x)=R_n(\psi_\pm(x))=a_{\ell m}^{j}\hat d_{\ell m}^{j}((x-x_\ell)s_1^{-m})\times$$

$$\times|\phi^{(i_1)}(\psi_\pm(x))|\,|\phi^{(i_2)}(\psi_\pm(x))|\dots|\phi^{(i_j)}(\psi_\pm(x))|\,|\psi_\pm(x)|^k,$$

и мы должны показать, что эти два выражения, соответствующие двум знакам ± к $\psi(x)$, при любой детерминации $\psi_\pm(x)$ стремятся к нулю, когда $x\to\infty$. Но с учетом /4/ и /7/ видим, что при $x>x_{0\pm}$

$$R_{n\pm}(x)\leq a_{\ell m}^{j}\hat d_{\ell m}^{j}((x-x_\ell)s_1^{-m})\times$$

$$\times c_{i_1\pm}x^{p_{i_1\pm}}\,c_{i_2\pm}x^{p_{i_2\pm}}\dots c_{i_j\pm}x^{p_{i_j\pm}}\,\hat d_\pm^k\,x^{k/p_\pm}.$$

Эти выражения стремятся к нулю, так как $\hat d_{\ell m}^{i}((x-x_\ell)s_1^{-m})$ быстро убывает и компенсирует все степени x в следующих множителях.

Мы доказали мажорируемость функции /12/ и ее производных, а не остаточных сумм ее разложения по степеням s и их производных, что требует свойство C определения 8 в [1]. Не доказали даже разложимость /12/ по степеням s /свойство A/. В этом нет необходимости, так как мы видели, что $\hat O_{00}(s)$ стремится быстро к нулю и, следовательно, /12/ сводится к своему остаточному члену, степень и точность которого равны ∞, то есть функция /12/ имеет только одну остаточную сумму, которая совпадает с этой функцией.

Итак, в случае II_0 выражение /12/, то есть компонента $f_{\ell m}(s,(x-x\ )s^{-m})$ после преобразования /2/ превращается в функцию, которую можно рассматривать как представителя абсолютной нулевой АФ. При этом мы получили $m'=0$, то есть она отнесена к регулярной компоненте $g_0(s,y)$. Но в силу теорем 5 и 6 в [2] это несущественно - ее можно отнести также к любой из сингулярных компонент $g_{k\ell m}(s,(y-y_{k\ell})s^{-m'})$.

Перейдем к случаю II_1 - когда уравнение /5/ при данном ℓ имеет точно один корень y_ℓ. Пусть d - его кратность. Покажем, что в этом случае /12/ дает точно одну сингулярную функцию $g_{\ell m}(s,r)$ /11/ $(K_\ell=1)$ при $r=r_{\ell m}=(y-y_\ell)s^{-m'}$. Ее внутренняя степень m' /9/ будет целым числом, только если m кратно d. Иначе она дробная. Без ограничения общности сочтем, что m кратно d, так что m' целое. Достаточно для этой цели формально заменить исходное s на s^d./Кратность корня d от этого не изменится/. В конце можем вернуться к исходному s, заменяя промежуточное s на d-й корень от исходного. Итак, мы должны показать, что компонента

$$g_{\ell m}(s,r)=f_{\ell m}(s,t(s,r)) \qquad /16/$$

обладает свойствами сингулярной компоненты с особой точкой y_ℓ и с внутренней степенью m' /9/. При этом согласно /2/ и /13/

$$t=t(s,r)=(\phi(y_\ell+rs^{m'})-x_\ell)s^{-m}, \qquad /17/$$

а степень $\nu_{\ell m}$ и точность $\nu^*_{\ell m}$ компоненты $g_{\ell m}(s,r)$ совпадают с аналогичными для $f_{\ell m}(s,t)$. Обозначим

$$\xi=x-x_\ell=ts^m, \quad \eta=y-y_\ell=rs^{m'},$$

$$\xi=\phi(\eta+y_\ell)-x_\ell=\chi(\eta)=\chi_d\eta^d+\Delta\chi(\eta) \quad \left(\chi_j=\frac{\chi^{(j)}(0)}{j!}\right), \qquad /18/$$

где $\Delta\chi(\eta)$ - остаточная сумма разложения $\chi(\eta)$ по η точности d /и степени $d+1$ /. Функция $\chi(\eta)$, получаемая из $x=\phi(y)$ трансляциями $\xi=x-x_\ell$, $\eta=y-y_\ell$ /или, что все равно, - $\chi_d\eta^d$ и $\Delta\chi(\eta)$ /, задается через $\phi(y)$ /и еще x_ℓ или y_ℓ /. Она несет всю информацию, содержащуюся в $\phi(y)$ /кроме значения x_ℓ или y_ℓ /. Она и ее производные порядка ниже d равны 0 при $\eta=0$, а в $\Delta\chi(\eta)$ равна нулю еще и d-я производная при $\eta=0$. Тогда из /18/ находим

$$t(s,r)=s^{-m}\chi(rs^{m'})=t_0(r)+\Delta t(s,r),$$
$$t_0(r)=\chi_d r^d, \quad \Delta t=s^{-m}\Delta\chi(rs^{m'}) \qquad (m=m'd). \qquad /19/$$

Видно, что зависимость между t и r содержит еще и s, но, несмотря на это, значению $t=0$ соответствует значение $r=0$, так что $g_{\ell m}$ может иметь разрывы только при $r=0$, как и должно быть.

Нам понадобятся величины более общие, чем $\Delta\chi$ и Δt. Пусть $\chi^+_j(\eta)$ и $t^+_j(s,r)$ - остаточные суммы степени j разложений $\chi(\eta)$ и $t(s,r)$ по η и $s^{m'}$ соответственно:

$$\chi(\eta)=\sum_{i=d}^{j-1}\chi_i\eta^i+\chi^+_j(d), \qquad /20/$$
$$t(s,r)=\sum_{i=0}^{j-1}t_i(r)s^{m'i}+t^+_j(s,r).$$

/Если по обозначениям в [1] $t^*(s,r)$ - остаточная сумма точности j, такая, что $t^*_j(s,r):s^j\to 0$ при $s\to 0$, то $t^+_j(s,r)=t^*_{m'j-1}(s,r)$ /. Так, с учетом /19/

$$t^+_j(s,r)=s^{-m}\chi^+_{j+d}(rs^{m'}) \qquad (m=m'd).$$

Если $\chi^{+(k)}_j$ и $t^{+(k)}_j$ - k-е производные от χ^+_j и t^+_j по η и r, то

$$\chi^{+(k)}_j(\eta)=\chi^{(k)+}_{\overline{j-k}}(\eta)=\sum_{i=\overline{j-k}}^{\infty}\frac{(i+k)!}{i!}\chi_{i+k}\eta^i+\chi^{+(k)+}_j(\eta),$$

$$\chi^{(k)+}_j(\eta)=\chi^{+(k)}_{j+k}(\eta),$$

$$t^{+(k)}_j(s,r)=t^{(k)+}_{\overline{j-k}}(s,r)=s^{-(d-k)m'}\chi^{+(k)}_{j+d}(rs^{m'})= \qquad /21/$$

$$\doteq\sum_{i=\overline{j+d-k}}^{\infty}\frac{(i+k)!}{i!}\chi_{i+k}r^is^{(i+k-d)m'}+\chi^{+(k)+}_j(s,r),$$

$$t^{(k)+}_j(s,r)=t^{+(k)}_{j+k}(\eta).$$

При этом $\overline{n}=n$, если $n\geq 0$, и $\overline{n}=0$, если $n<0$. /Остаточные члены $\chi^{+(k)+}_j(\eta)$ и $t^{+(k)+}_j(s,r)$ получаются вследствие того, что ряды асимптотические. Они быстро исчезают при $\eta\to 0$ и $s\to 0$, но их форма зависит от выбранного способа суммирования/. Очевидно, $\Delta\chi$ и Δt получим при $j=d+1$, $k=0$ и $j=1$, $k=0$ соответственно.

Введем еще функции $\sigma_\pm(\xi)$ и $r_\pm(s,t)$, обратные к $\chi(\eta)$ и $t(s,r)$. Они, как правило, многозначны, причем σ_+ и r_+ принимают только положительные значения, а σ_- и r_- - отрицательные. В случае $\Phi_{++}\mathrm{II}_1$, который мы рассматриваем здесь, они определены при $\eta\geq 0$ и $t>0$ соответственно. Каждая из этих функций, хотя и многозначная, как и $\psi_\pm(x)$, имеет асимптотическое разложение по целым положительным степеням от $\xi^{1/d}$ и $t^{1/d}$ соответственно:

$$\sigma_\pm(\xi)=\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_{i\pm}\xi^{1/d}+\sigma^+_\pm(\xi), \qquad /22/$$
$$r_\pm(s,t)=s^{-m'}\sigma_\pm(ts^m)=\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_{i\pm}s^{(i-1)m'}t^{i/d}+s^{-m'}\sigma^+_\pm(ts^m).$$

/Многозначность затрагивает только остаточные члены $\sigma^{+}_{\pm}(\xi)$ и $s^{-m'}\sigma^{+}_{\pm}(ts^{m})$ /. Второе выражение является в то же время разложением $r_{\pm}(s,t)$ по целым степеням $s^{m'}$. Коэффициенты всех разложений выражаются через коэффициенты разложения $\chi(\eta)$ /20/:

$$\sigma_{1\pm} = \pm\frac{1}{\chi_d^{1/d}};\quad \sigma_{2\pm} = -\frac{\chi_{d+1}}{d\chi_d^{1+2/d}};\quad \sigma_{3\pm} = \pm\frac{(d+3)\chi^2_{d+1}}{2d^2\chi_d^{2+3/d}} \mp \frac{\chi_{d+2}}{d\chi_d^{1+2/d}}. \qquad /23/$$

Из /19/, $r_{\pm}(s,t)$ и $\sigma_{\pm}(\eta)$ следует, что

$$r_{\pm}(s,t) = s^{-m'}\sigma_{\pm}(ts^{m}). \qquad /24/$$

Обозначим через

$$\sigma^{k}_{j\pm}(\xi) = \chi_j^{+(k)}(\sigma_{\pm}(\xi)) \quad \text{и} \quad p^{k}_{j\pm}(s,t) = t_j^{+(k)}(r_{\pm}(s,t)) \qquad /25/$$

функции $\chi_j^{+(k)}(\eta)$ и $t_j^{+(k)}(s,r)$, где η и r выражены через ξ и t /$\eta=\sigma_{\pm}(\xi)$, $r=r_{\pm}(s,t)$ /. Каждая из них многозначна, но имеет асимптотическое разложение по целым степеням $\xi^{1/d}$ и $(ts^{m})^{1/d}$ с однозначно определенными коэффициентами. Разложения начинаются следующим образом:

$$\sigma^{k}_{j\pm}(\xi) = (-1)^{\overline{j-k}}\frac{(k+\overline{j-k})!}{(\overline{j-k})!}\chi_{k+\overline{j-k}}\left(\frac{\xi}{\chi_d}\right)^{(\overline{j-k})/d}+\ldots = \begin{cases}(-1)^{j-k}\dfrac{j!}{(j-k)!}\chi_j\left(\dfrac{\xi}{\chi_d}\right)^{(j-k)/d}+\ldots \\ \text{при } k\leqq j, \\ k!\,\chi_d+\ldots \quad \text{при } k\geqq j.\end{cases} \qquad /26/$$

$$p^{k}_{j\pm}(s,t) = (-1)^{\overline{d+j-k}}\frac{(k+\overline{d+j-k})!}{(\overline{d+j-k})!}\chi_{k+\overline{d+j-k}}\, s^{(k-d+\overline{d+j-k})m'}\left(\frac{t}{\chi_d}\right)^{(\overline{d+j-k})/d}+\ldots =$$

$$= \begin{cases}(-1)^{d+j-k}\dfrac{(d+j)!}{(d+j-k)!}\chi_{d+j}\, s^{jm'}\left(\dfrac{t}{\chi_d}\right)^{(d+j-k)/d}+\ldots \quad \text{при } k\leqq d+j, \\ k!\,\chi_k\, s^{(k-d)m'}+\ldots \quad \text{при } k\geqq d+j.\end{cases} \qquad /27/$$

Принимая во внимание /19/ и /24/, находим, что $t_j^{+(k)}(s,r)$ и $p^{k}_{j\pm}(s,t)$ выражаются через $\chi_j^{(k)}(y)$ и $\sigma^{k}_{j\pm}(\xi)$:

$$t_j^{+(k)}(s,r) = s^{-(d-k)m'}\chi^{(k)}_{j+d}(rs^{m'}), \qquad /28/$$

$$p^{k}_{j\pm}(s,t) = s^{-(d-k)m'}\sigma^{k}_{j+d\pm}(ts^{m}).$$

Пусть, наконец,

$$t_j^{+(k)x}(s,r) = s^{-(k-d+\overline{j+d-k})m'}t_j^{+(k)}(s,r) = s^{-(\overline{j+d-k})m'}\chi^{(k)}_{j+d}(rs^{m'}),$$

$$p^{kx}_{j\pm}(s,t) = t_j^{+(k)}(s,r_{\pm}(s,t)) - s^{-(k+d+\overline{j+d-k})m'} = s^{-(\overline{j+d-k})m'}\sigma^{k}_{j+d\pm}(ts^{m}). \qquad /29/$$

Функции $t_j^{+(k)x}(s,r)$ и $p^{kx}_{j\pm}(s,t)$, очевидно, получаются из $t_j^{+(k)}(s,r)$ и $p^{k}_{j\pm}(s,t)$ вследствие выделения максимальной / не зависимой от выбора коэффициентов/ степени s, после чего в разложениях типа /21/ для $t_j^{x(k)}$ и $p^{xk}_{j\pm}$ все еще не появятся отрицательные степени s.

Теперь, следуя выводу /18/ в [4], докажем свойство А, что функция $g_{\ell m}(s,r)$ /11/ или, что все равно, /12/ разложима по степеням s:

$$g_{\ell m}(s,r) = \sum_{n'=\nu_{\ell m}}^{n} g_{\ell m n'}(r)\,s^{n'} + g^{*}_{\ell mn}(s,r), \qquad /30/$$

при любом $n=\nu_{\ell m}-1, \nu_{\ell m}, \ldots \nu^{*}_{\ell m}$. Разложим прежде всего $f_{\ell m}(s,t(s,r))$ /16/ по степеням s и $\Delta t(s,r)$ /19/ /а не $t(s,r)$ /. Учитывая, что степень Δt по s положительна – она равна m', находим

$$g_{\ell m}(s,r) = \sum_{n'=\nu_{\ell m}}^{n}\sum_{i=0}^{i_{n'}} f^{i}_{\ell,m,n'-m'_i}(t_0)\,\Delta t^{i}\, s^{n'-m'_i} + f^{*}_{\ell m}(s,t_0,\Delta t) \qquad /31/$$

$(i_{n'} = [(n'-\nu_{\ell m})/m']),$

$$f^{*}_{\ell m(n)}(s,t_0,\Delta t) = \sum_{i=0}^{i_n+1} f^{x\,i-1*}_{\ell,m,n-m_i}(s,t_0,\Delta t) - \sum_{i=0}^{i_n} f^{x\,i*}_{\ell,m,n-m'_i}(s,t_0,\Delta t). \qquad /32/$$

Здесь $i_n=[(n-\nu_{\ell m})/m']$, причем, как известно, $[x]$ означает самое большое целое число, которое содержится в x, а $f^{i}_{\ell,m,n-m'_i}$ и $f^{x\,i*}_{\ell,m,n-m'_i}(s,t_0,\Delta t)$ – коэффициенты и двойные остаточные суммы разложения $f_{\ell m}(s,t_0+\Delta t)$ по степеням s и Δt [4].

Чтобы привести /31/ в вид /30/, остается при помощи /20/ разложить $\Delta t(s,r)^{i}$ по $s^{m'}$ до степени $j_{nn'}=[(n-n')/m']+i$. Имеем

$$\Delta t(s,r)^{i} = s^{-mi}\Delta\chi(rs^{m'}) = \sum_{j=i}^{j_{nn'}-1}\Delta t^{i}_{j}(r)\,s^{m'j} + \Delta t^{i+}_{j_{nn'}}(s,r), \qquad /33/$$

где

$$\Delta t_j^i(r)=\Delta\chi^i_{d_{i+j}}\, r^{d_{i+j}}, \quad \Delta t^{i+}_{j_{nn'}}(s,r)=s^{-mi}\Delta\chi^{ix}_{d_i+j_{nn'}}(rs^m). \qquad /34/$$

При этом Δt^i – i-я степень Δt, Δt^i_j – ее деленная на j! j-я производная по $s^{m'}$ при $s^{m'}=0$, а $\Delta t^{i+}_{j_{nn'}}$ – остаточная сумма разложения Δt^i по $s^{m'}$ точности $j_{nn'}$. Проверяем

$$\Delta t^i_j(r)=r^{d_{i+j}}\sum_{j_h\geq 1} {}_j \prod_{h=1}^i \chi_{d+j_h}, \qquad /35/$$

$$\Delta t^{i+}_{j_{nn'}}(s,r)=\sum_{\ell=0}^{i-1}\frac{(-1)^\ell (i-1)!}{\ell!(i-1-\ell)!}\sum_{j_h\geq \ell+1} {}_{j_{nn'}+\ell+1}\prod_{h=1}^i t^+_{j_h}(s,r). \qquad /36/$$

При этом индекс к i-кратным суммам по j_h означает, что суммирование производится по тем значениям j_h, сумма которых имеет указанное значение – j или $j_{nn'}+\ell+1$ соответственно. Отметим, что формула /36/ является некоторым аналогом и обобщением /18/ в[4]. Она выражает остаточную сумму степени $\Delta t(r)^i$ данной функции $\Delta t(r)$ в виде конечной суммы из произведений различных остаточных сумм этой функции. Теперь, чтобы получить /30/, достаточно подставить /35/ и /36/ в /34/, а результат – в /33/ и потом в /31/. Так, значащая часть /30/ будет

$$\sum_{n'=\nu_{\ell m}}^{n} g_{\ell m n'}(r)s^{n'}= \sum_{n''=\nu_{\ell m}}^{n}\sum_{i=0}^{i_{n''}}\sum_{j=i}^{j_{nn''}} f^i_{\ell,m,n''-m'i}(t_0(r))\,s^{n''-m'i-m'j}\, r^{d_{i+j}}\sum_{j_h\geq 1}{}_j\prod_{h=1}^i\chi_{d+j_h},$$

и, подставляя $n'=n''-m'i-m'j$, для коэффициентов $g_{\ell m n'}(r)$ находим

$$g_{\ell m n'}(r)=\sum_{i=0}^{j_{nn'}}\sum_{j=i}^{i_{n'}} f^i_{\ell,m,n'-m'j}(t_0(r))\, r^{d_{i+j}}\sum_{j_h\geq1}{}_j\prod_{h=1}^i\chi_{d+j_h}. \qquad /37/$$

Кроме того, переходя к $t_j^{+x}(s,r)=t_j^{+(0)x}(s,r)$ /28/, для остаточной суммы получаем

$$g^*_{\ell mn}(s,r)=\sum_{i=0}^{i_n+1} f^{x\,i-1\,*}_{\ell,m,n-m'i}(s,t_0(r),\Delta t(s,r))-\sum_{i=0}^{i_n} f^{x\,i\,*}_{\ell,m,n-m'i}(s,t_0(r),\Delta t(s,r))+ \qquad /38/$$

$$+\sum_{n'=\nu_{\ell m}}^{n}\sum_{i=0}^{i_{n'}} f_{\ell,m,n'-m'i}(t_0(r))\,s^{n'-m'i}\sum_{\ell=0}^{i-1}\frac{(-1)^\ell(i-1)!}{\ell!(i-1-\ell)!}\sum_{j_h\geq\ell+1}{}_{j_{nn'}+\ell+1}\prod_{k=1}^{i} s^{m'j_h}\, t^{*x}_{j_h}(s,r).$$

Видим, что остаточная сумма /38/ оказывается конечной алгебраической суммой членов двух типов:

$$S(s,r)=f^{xi*}_{\ell mn'}(s,t_0(r),\Delta t(s,r)) \quad (n'-m'i+m'=n,n+1) \qquad /39/$$

и

$$T(s,r)=\frac{(i-1)!}{\ell!(i-1-\ell)!}\,s^{n'-m'i+m'(j_{nn'}+\ell+1)} f^i_{\ell,m,n'-m'i}(t_0(r))\prod_{h=1}^i t^{+x}_{j_h}(s,r), \qquad /40/$$

$$(j_h\geq\ell+1,\ \ \nu_{\ell m}\leq n'\leq n,\ \ 0\leq i\leq i_{n'},\ \ 0\leq\ell\leq i-1.$$

/При составлении T(s,r) имеем $\Sigma j_h=j_{nn'}+\ell+1$ /.

Учитывая, что $\Delta t(s,r)$ как функция от t имеет степень m', а $f_{\ell m}(s,t)$ как функция от t бесконечно дифференцируема, нетрудно сообразить, что точность двойной остаточной суммы типа S будет $\nu^*_S=n'+(i+1)m'$. И так как $n'+(i+1)m'=n,n+1$ /39/, видим, что точности членов S не ниже n. Учитывая дальше, что множители $t_j^{+x}(s,r)$ /$=t_j^{+0x}(s,r)$ /29// имеют степень нуль по s, находим, что степень членов типа T /40/ будет

$$\nu_T=n'-m'i+m'(j_{nn'}+\ell+1)=n'-m'i+m([(n-n')/m']+i+\ell+1).$$

И так как $[(n-n')/m']>(n-n')/m'-(m'-1)/m'$, находим $\nu_T\geq n+m'\ell+1$, то есть при любом ℓ имеем $\nu_T\geq n+1$, так что можем взять $\nu^*_T=n$. Так, свойство А – разложимость $g_{\ell m}(sr)$ /12/ по степеням до $\nu^{*'}_{\ell m}=\nu^*_{\ell m}$ – обеспечено. Дифференцируемость по r при $r\neq0$ /свойство В/ очевидна.

Проверим мажорируемость – свойство С. По теореме 1 в[2], мажорирование всей суммы /38/ сводится к мажорированию отдельных членов /39/ и /40/. Начнем с /39/. По формуле Коши для остаточного члена ряда Тейлора, мы можем написать

$$S(s,r)=\Delta t(s,r)^{i+1} f^{*\,i+1}_{\ell mn'}(s,t_0(r)+\theta\Delta t(s,r)) \quad (0\leq\theta\leq1).$$

/Верхний индекс i+1 к Δt означает степень, а f* – производная по t, деленная по (i+1)! /. Тогда находим

$$|S(s,r)|\leq s^{(i+1)m'}\hat O_{\ell mn'}(s)\Delta t^x(s,r)^{i+1}\hat f^{i+1}_{\ell mn'}(\theta t(s,r)+(1-\theta)t_0(r)),$$

где согласно /29/ $\Delta t^x(s,r)=s^{-m'}\Delta t(s,r)$. Выбираем

$$\hat O_S(s)=s^{(i+1)m'}\hat O_{\ell mn'}(s),$$

$$\hat g_S(r)=\sup_{0<s\leq s_0}\Delta t^x(s,r)^{i+1}\sup_{0<s\leq s_0}\hat f^{i+1}_{\ell mn'}(\theta t(s,r)+(1-\theta)t_0(r)). \qquad /41/$$

Так, искомая оценка $|S(s,r)| \leq \hat{O}_S(s)\hat{g}_S(r)$ обеспечена, лишь бы $\hat{O}_S(s)$ и $\hat{g}_S(r)$ имели требуемые свойства. Точность $\hat{O}_S(s)$ равна $(i+1)m'+n'$, и согласно /39/ она не ниже n, как и должно быть. Остается проверить, что $\hat{g}_S(r)$ при $r \to \pm\infty$ стремится быстро к нулю, то есть что при любом k $\hat{g}_S(r)r^k \to 0$, когда $r \to \pm\infty$. Аргумент $\theta t(s,r)+(1-\theta)t_0(r)$ функции $\hat{f}^{i+1}_{\ell mn'}$ в /41/ находится между положительными границами $t_0(r)$ и $t(s,r)$. И так как $\hat{f}^{i+1}_{\ell mn}(t)$ при $t \geq 0$ монотонно убывает, искомое утверждение сводится к тому же утверждению для $\hat{g}'_S(r)$ и $\hat{g}''_S(r)$, получаемых из $\hat{g}_S(r)$, когда аргумент заменим на эти граничные значения. В первом случае вопрос сводится к тому, что если

$$g'_{S_k}(s,r) = |r|^k \Delta t^{x}(s,r)^{i+1}\, \hat{f}^{\,i+1}_{\ell mn'}\,(t_0(r)), \qquad /42/$$

то

$$\hat{g}'_{S_k}(r) = \sup_{0<s\leq s_0} |g'_{S_k}(s,r)| \qquad /43/$$

при каждом k стремится /быстро/ к нулю, когда $r \to \pm\infty$. Но $g'_{S_k}(s,r)$ и $\hat{g}'_{S_k}(r)$ представляют собой выражения типа $W(s,r)$ и $r^k U(r)$, рассмотренные в приложении, п.7, при $j=i+1$, $j_h=1$, $k_h=0$. Поэтому искомое утверждение здесь является следствием доказанной там общей теоремы. Аналогично рассматривается $\hat{g}''_{S_k}(r)$. В этом случае даже доказательство более простое, так как после восстановления переменной t аргумент мажоранты $\hat{f}^{i+1}_{\ell mn'}$ оказывается равным t, а $\hat{f}^{i+1}_{\ell mn'}(t)$, по определению, быстро убывает. Этим мажорирование членов типа $S(s,r)$ /39/ доказано.

Мажорирование членов $T(s,r)$ /40/ доказывается аналогично. Из определения 8 в[1] /свойства А и С/ можно вывести, что $|f^i_{\ell mn}(t)| < c^i_{\ell mn}\hat{f}^{\,i}_{\ell mn}(t)$, где $c^i_{\ell mn}$ – подходящим образом выбранные константы. Поэтому мы можем написать

$$|T(s,r)| \leq c^i_{\ell,m,n'-m'i}\,\frac{(i-1)!}{\ell!(i-1-\ell)!}\,s^{n'-m'i+m'(j_{nn'}+\ell+1)}\,\hat{f}^{\,i}_{\ell,m,n'-m'i}(t_0(r)) \times$$

$$\times \prod_{h=1}^{i} \sup_s |t^{+x}_{j_h}(s,r)| \qquad (j_h \geq 1,\ \sum_{h=1}^{i} j_h = j_{nn'}+\ell).$$

Если примем

$$\hat{O}_T(s) = s^{n'-m'i+(j_{nn'}+\ell+1)m'},$$

$$\hat{g}_T(r) = \frac{(i-1)!}{\ell!(i-1-\ell)!}\,c^i_{\ell,m,n'-m'i}\,\hat{f}^{\,i}_{\ell,m,n'-m'i}(t_0(r))\prod_{h=1}^{i}\sup_s t^{+x}_{j_h}(s,r), \qquad /44/$$

то неравенство $|T(s,r)| \leq \hat{O}_T(s)\hat{g}_T(r)$ обеспечено, причем, как уже упомянуто, степень $\hat{O}_T(s)$ больше n /и значит, точность не ниже n /. Остается показать, что $\hat{g}_T(r)$ быстро стремится к нулю, то есть что $\hat{g}_T(r)|r|^k$ исчезает при $r \to \pm\infty$. Нет существенной разницы между этим выражением и $\hat{g}'_S(r)$ //41/ при $\theta=0$ /. Во-первых, здесь появляется еще некоторый константный /не зависящий от s и r / множитель, но он, очевидно, не меняет порядка исчезновения мажоранты $\hat{g}_T(r)$. Во-вторых, вместо $\sup_s (|\Delta t^{x}(s,r)|^{i+1})$ в /41/ здесь имеем $\sup_s(\prod_{h=1}^{i} t^{+x}_{j_h}(s,r))$, но этот случай тоже охватывается общей теоремой, доказанной в приложении, п.7.

Тем самым доказана мажорируемость и остаточной суммы $g^*_{\ell mn}(s,r)$ /39/. Однако нам необходимо доказать мажорируемость не только функции $g^*_{\ell mn}(s,r)$, но и ее производных по r. По идее это осуществляется как и при доказательстве утверждения I: дифференцируем члены S /39/ и T /40/ и показываем, что каждый из них дает конечную сумму членов несколько более общего типа, которые все же охватываются теоремой, доказанной в приложении, п.7. В самом деле, напомним, что $S(s,r)$ /39/ не что иное, как остаточная сумма степени i разложения $f^*_{\ell mn}(s,t)$ по степеням Δt вокруг точки t_0 $(t=t(s,r)=t_0(r)+\Delta t(s,r)$, $t_0(r)=\chi_d r^d$ (19)). Следовательно,

$$\frac{dS}{dr} = \frac{dt_0}{dr}\,\frac{\partial f^{xi*}_{\ell mn}(s,t_0,\Delta t)}{\partial t_0} + \frac{d\Delta t}{dr}\cdot\frac{\partial f^{xi*}_{\ell mn}(s,t_0,\Delta t)}{\partial \Delta t}.$$

И так как

$$f^{xi*}_{\ell mn}(s,t_0,\Delta t) = f^*_{\ell mn}(s,t_0+\Delta t) - \sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{j!}\,f^{(j)*}_{\ell mn}(s,t_0)\Delta t^j,$$

легко проверить, что

$$\frac{\partial f^{xi*}_{\ell mn}(s,t_0,\Delta t)}{\partial t_0} = f'^{\,xi*}_{\ell mn}(s,t_0,\Delta t), \qquad \frac{\partial f^{xi*}(s,t_0,\Delta t)}{\partial \Delta t} = f'^{\,x(i-1)*}_{\ell mn}(s,t_0,\Delta t).$$

Тогда с учетом /19/ и /29/ находим

$$\frac{dS}{dr} = d\chi_d r^{d-1} f'^{\,xi*}_{\ell,m,n'-m'i}(s,t_0,\Delta t) + s^{m'} t^{+1x}_1(s,r)\, f'^{\,xi-1*}_{\ell,m,n'-m'i}(s,t_0,\Delta t).$$

Итак, производные $\frac{d^kS}{dr^k}$ представляют собой конечные суммы произведений, в которых участвует одна функция типа $f^{(j)xi,*}_{\ell,m,n'-m'i}(s,t_0,\Delta t)$, некоторая степень аргумента r и некоторое число множителей $t^{+(j)x}_1(s,r)$ /29/ /и еще некоторые константные множители и некоторые неотрицательные степени $s^{m'}$, которые несущественны/. Выражения такого типа мажорируются точно так же, как и сама функция S, так как, во-первых, свойство д относится не только к $f^*_{\ell mn}$, но и к их производным и, во-вторых, учитывая /П9/, видим, что появление новых множителей r и $t_1^{+kx}(s,r)$ не выводит полученные выражения из области приложимости теоремы, доказанной в приложении, п.7.

Так же доказывается мажорирование производных $\frac{d^kT}{dr^k}$ - этот случай даже более простой; он сводится к случаю $g'_{Sk}(r)$ /42/, так как аргументом функции $\hat{f}^i_{\ell,m,n'-m'i}(t)$ здесь является $t = t_0(r) = \chi_d r^d$.

Чтобы получить функции $\hat{O}'^k_{\ell mn}(s)$ и $\hat{g}^k_{\ell mn}(r)$, произведение которых мажорирует $g^{(k)}(s,r)$, по теореме 1 в [2] мы должны взять верхнюю границу множителей типа $\hat{O}^k_S(s)$ и $\hat{O}^k_T(s)$ и сумму множителей $\hat{g}^k_S(r)$ и $\hat{g}^k_T(r)$, обобщающих $\hat{O}_S(s)$, $\hat{g}_S(r)$ /41/ и $\hat{O}_T(s)$, $\hat{g}_T(r)$ /44/ для любого k. Однако этим способом $\hat{O}'_{\ell mn}(s)$ получатся зависящими от k, чего, по определению 8 в [1], не должно быть. Поэтому, как в случае II_0, мы представим найденные $\hat{O}'^k_{\ell mn}(s)$ в виде $a^k_{\ell mn}\hat{O}'_{\ell mn}(s)$, что по примечанию b к построению 1 в [2] возможно, и заменим $\hat{g}^k_{\ell mn}(r)$ на $a^k_{\ell mn}\hat{g}^k_{\ell mn}(r)$. На этом случай II_1 исчерпан.

Перейдем к случаю II_2 - когда уравнение /4/ имеет два корня y_k с кратностями $d_k\,(k=1,2)$ /индексы ℓ, m будем опускать/. Разобьем /12/ на две функции, каждая с одной особой точкой $y_k\,(y_1<y_2)$:

$$g_1(s,(y-y_1)s^{-m'_1}) = \begin{cases} f_{\ell m}(s,(\phi(y)-x_\ell)s^{-m'_1}) & \text{при } y<y_{12}, \\ 0 & \text{при } y>y_{12}, \end{cases} \qquad /45/$$

$$g_2(s,(y-y_2)s^{-m'_2}) = \begin{cases} 0 & \text{при } y<y_{12}, \\ f_{\ell m}(s,(\phi(y)-x_\ell)s^{-m'_2}) & \text{при } y>y_{12}, \end{cases} \qquad /46/$$

причем $y_{12}=(y_1+y_2)/2$, а m'_1 и m'_2 задаются через /9/. Сумма $g_1(s,(y-y_1)s^{-m'_1})+g_2(s,(y-y_2)s^{-m'_2})$ дает /12/, но это еще не искомые функции $g_k(s,(y-y_k)s^{-m_k})\,(k=1,2)$, потому что /45/ и /46/ имеют разрывы не только при $y=y_k$, но еще и обе - при $y=y_{12}$. Мы сгладим эти дополнительные разрывы. Пусть

$$\Delta f^i(s) = \frac{1}{i!}\left(\frac{d^i}{dy^i}f_{\ell m}(s,(\phi(y)-x_\ell)s^{-m})\right)_{y=y_{12}}, \qquad /47/$$

то есть это разрывы функции /46/ и ее производных при $y=y_{12}$ или /45/ с обратным знаком. Так как здесь фиксировано y, а не $r=(y-y_k)s^{-m'_k}$, несмотря на то, что степени /12/, /45/ и /46/ конечны, $\Delta f^i(s)$ будут быстро убывать при $s\to 0$ и при этом

будут удовлетворять условию ограниченности, которое указано в примечании b к построению 1 в [2]. Следовательно, по построению 2 в [2], существует функция $\bar{g}(s,y)$ типа представителя абсолютной нулевой АФ /или, что все равно, типа модуля $\bar{f}(s,x)$ [2] /, которая при $y=y_{12}$ вместе с ее производными принимает значения /47/. /Здесь даже конструкция более проста, потому что имеем $\bar{\nu}=\bar{\nu}^*=\infty$ /. Разложим $\bar{g}(s,y)$ подобно /45/ и /46/ на

$$\bar{g}_1(s,r_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } y<y_{12} \\ \bar{g}(s,y) & \text{при } y>y_{12} \end{cases} \qquad (r_1=(y-y_1)s^{-m'_1}),$$

$$\bar{g}_2(s,r_2) = \begin{cases} \bar{g}(s,y) & \text{при } y>y_{12} \\ 0 & \text{при } y<y_{12} \end{cases} \qquad (r_2=(y-y_2)s^{-m'_2}). \qquad /48/$$

/Отнести $\bar{g}_1(s,y)$ и $\bar{g}_2(s,y)$ к компонентам $g_1(s,r_1)$ и $g_2(s,r_2)$ можно при любых m'_1 и m'_2, так как представители абсолютной нулевой АФ могут причисляться к любой компоненте /см. теорему 3 в [2] /. Теперь мы можем составить искомые функции:

$$g_1(s,r_1)=\underline{g}_1(s,r_1)+\bar{g}_1(s,r_1);\quad g_2(s,r_2)=\underline{g}_2(s,r_2)+\bar{g}_2(s,r_2), \qquad /49/$$

причем разрывы при $y=(y_1+y_2)/2$ компенсированы. Сумма функций /49/ не будет давать /12/, но это несущественно, так как разница $\bar{g}(s,y)$ находится в рамках модулей /определение 2 в [2] /, то есть в конце мы получим другой представитель той же самой искомой АФ $g(y)=f(\phi(y))$.

Следует показать, что /49/ удовлетворяют всем условиям определения 8 в [1]. Проверим только условие С для g_k /49/, все остальное доказывается легко. Но и это не трудно. Для $g_k(s,(y-y_k)s^{-m'_k})$ /45/ и /46/ это доказывается как в случае II_1, а для $\bar{g}_k(s,(y-y_k)s^{-m'_k})$ достаточно сообразить, что замена аргумента y на $r_k=(y-y_k)s^{-m'_k}\,(k=1,2)$, то есть переход от $\bar{g}(s,y)$ к $\bar{g}_k(s,r_k)$, сохраняет их принадлежность к представителям абсолютной нулевой АФ. Напомним, что $\bar{g}(s,y)$ конструируется на плоскости s,y, там она разлагается на $\bar{g}_1(s,y)$ и $\bar{g}_2(s,y)$, и только потом вводятся новые аргументы $r_k=(y-y_k)s^{-m'_k}\,(k=1,2)$. Этим мы обходим необходимость сшивать g_k с $\bar{g}_k$ вдоль гипербол $r_1s^{m'_1}=y_{12}-y_1$ и $r_2s^{m'_2}=y_{12}-y_2$, к чему построение 2 в [2] не приспособлено. Этим и случай II_2 исчерпывается.

Случай II_3, по идее, сводится к случаю II_2. Уже /12/ распадается не на две, а на $K_\ell>2$ слагаемых $g_k(s,y)$ с дополнительными разрывами в точках $y_{k,k+1}=(y_{k,\ell}+y_{k+1,\ell})/2\quad(k=1,2,\dots,K_\ell-1)$, а их сглаживание производится при помощи $K_\ell - 1$функций $\bar{g}_{k,k+1}(s,y)$ $(k=1,2,\ldots,K_\ell-1)$,представляющих абсолютную нулевую АФ. Каждая из них распадается на две части $\bar{g}^{+}_{k,k+1}(s,y)=0$ при $y<y_{k,k+1}$ и $\bar{g}^{-}_{k,k+1}(s,y)=0$ при $y>y_{k,k+1}$. Тогда /49/ обобщается в виде

$$g_k(s,y)=\underline{g}_k(s,y)+\bar{g}^{-}_{k-1,k}(s,y)+\bar{g}^{+}_{k,k+1}(s,y) \qquad (\bar{g}_{01}(s,y)=\bar{g}_{K_\ell,K_\ell+1}(s,y)=0).$$

После того, как сконструированы регулярная компонента $g_0(s,y)$, соответствующая компоненте $f_0(s,x)$, и сингулярные компоненты $g_{k\ell m}$, соответствующие всем компонентам $f_{\ell m}(s,t_{\ell m})$ исходной АФ $f(x)$, складывая их, составляем представители функции $g(y)$, получаемой из $f(x)$ заменой /2/. Теперь, когда все компоненты $g_0(s,y)$ и $g_{k\ell m}(s,t_{k\ell m})$ найдены, нетрудно проверить условие D - компенсацию разрывов: она следует из дифференцируемости $f(s,x)$ по x и $\phi(y)$ по y.

Некоторые величины, такие как точки разбиения $y_{k,k+1}$ $(>y_k, <y_{k+1})$ и сглаживающие функции $\bar{g}_{k,k+1}(s,y)$, были в некоторой мере произвольными. Поэтому мы можем утверждать, что предложенный способ дал нам возможность вывести все свойства компонент искомой АФ $g(y)$, необходимые по определению 8 в /1/, но может остаться сомнение относительно однозначности результата. Из определения 2 ясно, да и нетрудно проверить непосредственно, что эта неоднозначность несущественна - она остается в рамках модулей, для которых вообще определены представители каждой АФ и ее компоненты.

Видим, что множество особых точек АФ $g(y)$ задано множеством корней $y_{k\ell}$ уравнения /5/ при $\ell=1,2,\ldots,L$. Это множество конечно - число его элементов $L=\sum_\ell K_\ell$. При этом эти корни различны, так как корни при различных ℓ не могут совпадать. Это следует из однозначности $\phi(y)$ /2/. Но некоторые внутренние степени $m'=m/d_{k\ell}$ при заданных k и ℓ и различных $m\in M_\ell$ могут совпадать. Поэтому число сингулярных компонент АФ $g(y)$ не может быть больше, но может быть меньше, чем $\sum_\ell K_\ell M_\ell$.

Каждый аналог функции $\delta(x-x_\ell)$ или ее производной после замены /2/ переходит в аналог некоторой линейной комбинации δ-функций и ее производных, причем если $d_{k\ell}>1$, то соответствующие коэффициенты будут бесконечно большими АЧ. Это результат понижения внутренних степеней /9/, а не изменения внешних степеней $\nu_{\ell m}$, как в случае умножения.

Первичное множество АФ /определение 15 в /1/ / строится на базе фиксированного расположения особых точек и поэтому не является инвариантным по отношению к трансляциям вдоль оси x. Но из доказанной здесь теоремы 1 следует, что расширенное множество АФ, то есть множество всех АФ /определение 16 в /1/ /, на базе которого построена теорема 1, уже инвариантно не только к трансляциям, но и к любой полиномиальной замене независимой переменной $x=\phi(y)$ и к гораздо более общим преобразованиям, включенным в определение 1.

Выражаем свою глубокую благодарность профессору В.К.Иванову за интерес к работе и кандидату математических наук В.Х.Христову за оказанную помощь при выводе некоторых доказательств.

ПРИЛОЖЕНИЕ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ $\chi(\eta)$ И $t(s,r)$ В СЛУЧАЕ $\Phi_{++}\Pi_1$

1. Исходя из определения 1 ясно, что в случае $\Phi_{++}\Pi_1$ $\xi=\chi(\eta)$ /19/ и $\eta=\sigma_\pm(\xi)$ /22/ обладают всеми свойствами $x=\phi(y)$ и $y=\psi_\pm(x)$, если отбросить множитель $1-\epsilon$ в формулировке условия Д /и заменить x, y на ξ, η /. Кроме того, можем утверждать, что функция $\chi(\eta)$ имеет единственный нуль $\eta=0$ четной кратности d и положительный ведущий коэффициент χ_d. Она удовлетворяет неравенствам /3/ при тех же значениях $p_\pm$ /которые не зависят ни от выбора чисел $y_\pm$, ни от $\eta_\pm$, появляющихся здесь вместо $y_\pm$ /. Представим графиками L_s /рис.4/ зависимость

$$t=t(s,r)=s^{-m}\chi(rs^{m'}) \qquad /\Pi 1/$$

/17/ при различных значениях s. При $s\to 0$ L_s примыкают к параболе d-й степени L_0: $t=\chi_d r^d$, где $d=m|m'\geq 1$. Кривые L_s- гомологические /автоморфные/: если L_{s_0} получается при $s=s_0$, то каждую кривую L_s при $s<s_0$

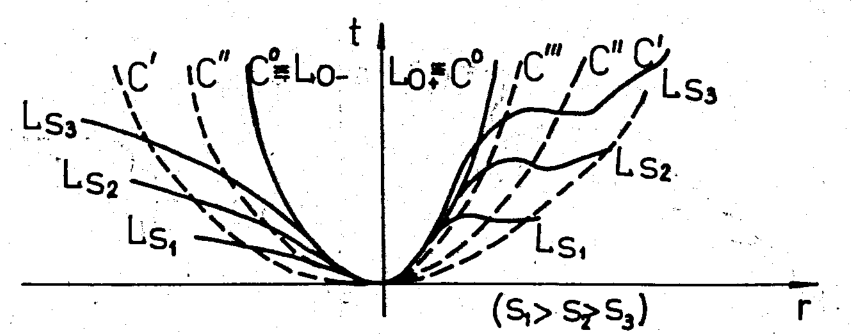

Рис.4

получим, если абсциссу и ординату каждой точки $P_0 \equiv (r_0, t_0)$ на L_{s_0} умножим по модулям $\lambda_r = (s_0/s)^m$ и $\lambda_t = \lambda_r^d = (s_0/s)^m$. Гомологические точки на различных графиках, соответствующие данной точке P_0 и всем значениям s от s_0 до 0, составляют проектирующую дугу – это дуга параболы d-й степени $t/t_0 = (r/r_0)^d$, для которой $r/r_0 \geq 1$ или, что все равно, $t/t_0 \geq 1$. Дуги C выходят из точек P_0 кривой L_{s_0} и уходят в бесконечность.

2. Обозначим $q(s,t) = t_0(r_\pm(s,t)) = \chi_d r_\pm(s,t)^d$ и $q(t) = \inf q(s,t)$ /для простоты знаки $\pm$ опущены/. Покажем, что $\hat{f}(q(t))$ при $t \to \infty$ быстро убывает. Согласно определению 8 в /1/, определению 1 здесь /условие д/ и примечанию 6 к нему $\hat{f}(t)$ и $\hat{f}(\chi_d \sigma_\pm(\xi)^d)$ быстро убывают при $t \to \infty$ и $\xi \to \infty$. С другой стороны, функция $\chi_d \sigma_\pm(\xi)^d$ при $\xi \to 0$ стремится к нулю как ξ /с коэффициентом 1/, а при $\xi \to \infty$ растет неограниченно, но не быстро /может расти медленнее любой степени ξ/. Графики функций $q(s,t) = \chi_d s^{-m} \sigma_\pm(ts^m)^d$ при $s = s_0$ и $s < s_0$ подобны. Они представлены на рис.5а. Когда $s \to 0$, кривые $q = q(s,t)$ примыкают к прямой $q = t$. Проектирующие дуги C в данном случае будут лучами, исходящими из точек $q(s_0,t)$ и уходящими радиально в бесконечность. Кривая $q(t)$ – это нижняя граница области, заштрихованной этими лучами. Эта кривая прикасается к прямой $q = t$ в точке $t = 0$, а угловой коэффициент ее касательной нигде не превышает q/t /рис.5б/. Имеются две возможности: а/ существуют $n > 0$ и $q_0 > 0$, такие, что $q(t) > q_0 t^n$, и б/ такие n и q_0 не существуют. Второй случай распадается на два подслучая: б′/ при достаточно больших t имеем $q(t) = q(s_0,t)$, и б″/ имеется бесконечное множество уходящих в бесконечность интервалов $[t_-, t_+]$, таких, что $q(t_\pm) = q(s_0,t_\pm)$ и $q(t) < q(s_0,t)$ при $t_- < t < t_+$. В случаях а и б′ утверждение очевидно. Остановимся на случае б″. Он осуществляется только в том случае, если при любом $p > 0$ имеем $q(s_0,t_\pm)t_\pm^p \to 0$,

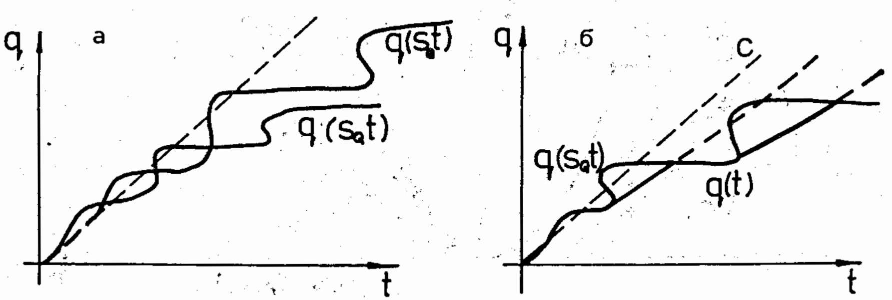

Рис.5

когда $t_\pm \to \infty$. Если t принадлежит данному интервалу (t_-, t_+), то будем иметь $\frac{q(s_0,t_-)}{t_-} = \frac{q(t)}{t} = \frac{q(s_0,t_+)}{t_+}$. И так как при больших t имеем $q(s_0,t_-) > 1$ и $q(s_0,t_+) < t_+^{1/2}$, находим $t_+ = t_- \frac{q(s_0,t_+)}{q(s_0,t_-)} < t_- t_+^{1/2}$, то есть $t_+ < t_-^2$. Тогда получаем $|\hat{f}(q(t))t^p| \leq \hat{f}(q(s_0,t_-))t_+^p < \hat{f}(q(t_-))t_-^{2p}$. Когда t, перемещаясь по интервалам (t_-, t_+), возрастает неограниченно, правая сторона при любом p будет стремиться к нулю, что и требовалось доказать.

3. Функции $\eta = \sigma_\pm(\xi)$, а поэтому и $\xi^{(k)} = \chi^{(k)}(\sigma_\pm(\xi)) = \sigma_\pm^k(\xi)$, неоднозначны. Неоднозначность у $\sigma_\pm^k(\xi)$ даже более сложная, чем у $\sigma_\pm(\xi)$: функции, обратные к $\sigma(\xi)$, однозначны, а к $\sigma_\pm^k(\xi)$ – опять неоднозначны. Иллюстрируем это на простом примере. Выберем

$$\xi = \chi(\eta) = \begin{cases} p\eta & \text{при } |\eta| \leq N\pi, \\ p\eta + \sin\eta & \text{при } |\eta| \geq N\pi, \end{cases} \qquad /П2/$$

где $p > -1, < 1$, а N – целое, больше $1/\pi p$ /рис.6а/. Переход в точках $\eta = \pm N\pi$ сглажен. Ясно, что $\chi(\eta)$ имеет всего один нуль – $\eta = 0$ кратности $d = 1$, а $\sigma(\xi)$ при $|\xi| > N\pi p$ многозначна. /Для простоты мы взяли случай $\Phi_{+-}II_1$. Чтобы осуществить $\Phi_{++}II_1$, достаточно в /П2/ взять $p\eta^2$ вместо $p\eta$/. Находим

$$\xi^{(1)} = \begin{cases} p \\ p_+\cos\eta \end{cases}, \quad \xi^{(2k)} = \begin{cases} 0 \\ (-1)^k \sin\eta \end{cases}, \quad \xi^{(2k+1)} = \begin{cases} 0 & \text{при } |\eta| \leq N\pi, \\ (-1)^k \cos\eta & \text{при } |\eta| \geq N\pi, \end{cases} \qquad /П3/$$

так что уравнение /П2/ и каждое из уравнений /П3/ задают параметрически функции $\xi^{(k)} = \sigma^{(k)}(\xi)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. /В данном случае проще выразить явно ξ через $\xi^{(k)}$, чем $\xi^{(k)}$ через ξ/. Их графики представлены на рис.6б,в и г. Видим, что заданному ξ соответствует всегда конечное множество значений $\xi^{(k)}$. Подобную структуру имеют и $t^{(k)} = t^{(k)}(s,t)$ $(t = \xi s^{-m},\ r = \eta s^{-m'},\ m' = m)$.

4. Пусть $\pi(\eta)$ – полином от η данной степени n. Покажем, что при любом фиксированном положительном ξ_0 функция $\rho_\pm(\xi) = \pi(\sigma_\pm(\xi))$ допускает мажорирование типа

$$|\rho_\pm(\xi)| \leq d_{\pi\pm} \xi^{q_{\pi\pm}}, \text{ если } \xi \geq \xi_0. \qquad /П4/$$

В случае $\pi(\eta) = \eta$, с учетом того, что $\xi = \chi(\eta)$ получается трансляцией из $x = \phi(y)$, утверждение следует из определения 1 в основном тексте /свойство б/ и примечания 7 к нему, причем $q_{\pi\pm} = 1/p_\pm$.

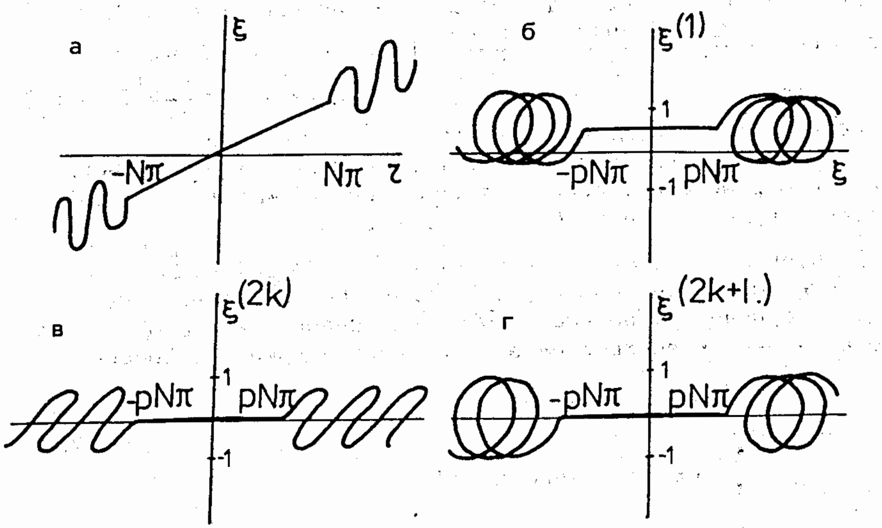

Рис.6

Но если утверждение справедливо для $\pi(\eta)=\eta$, то оно будет справедливым для любой степени η и для любого полинома при $q_{\pi\pm} = n/p_{\pm}$ /коэффициенты зависят от выбора $\pi(\eta)$ /.

5. Покажем, что при любом фиксированном ξ_0 /выберем ξ_0 как в п.4/ мы можем ввести непрерывную функцию

$$\bar{\sigma}^k_{j\pm}(\xi) = \begin{cases} a^k_{j\pm}\xi^{\overline{j-k}/d} & \text{при } 0 \le \xi \le \xi_0 , \\ b^k_{j\pm}\,\xi^{q^k_{j\pm}} & \text{при } \xi \geq \xi_0 , \end{cases} \qquad /П5/$$

так чтобы при всех $\xi>0$ имеем

$$|\sigma^k_{j\pm}(\xi)| \le \bar{\sigma}^k_{j\pm}(\xi).$$

Откажемся сначала от требования непрерывности для $\bar{\sigma}^k_{j\pm}(\xi)$/П5/. Тогда /П5/ при $\xi<\xi_0$ следует из /20/, /21/ и /26/ в основном тексте. А с учетом п.4 определения 1 /условие в и примечания 4 к нему, а также учитывая, что $\chi^{(k)x}_{j-k}(\eta)$ отличается от $\chi^{(k)}(\eta)$ на полином /степени $\overline{j-k}$ /, находим, что если $k \geq 1$, то /П5/ выполнимо и при $\xi > \xi_0$ /причем $q^k_{j\pm} = \max(p_{k\pm}, \overline{(j-k)}/p_{\pm}$ /. Справедливость /П5/ при $k=0$ проверяется аналогично на основе использования условия в вместо условия б определения 1 в основном тексте и примечание 7 к нему. После этого непрерывность до-

стигается легко: если $\bar{\sigma}_{j\pm}(\xi_0-\epsilon)<\bar{\sigma}^k_{j\pm}(\xi_0+\epsilon)$, увеличим $a^k_{j\pm}$, а если $\bar{\sigma}^k_{j\pm}(\xi_0-\epsilon)>\bar{\sigma}^k_{j\pm}(\xi_0+\epsilon)$, то увеличим $b^k_{j\pm}$. Итак, утверждение доказано.

6. Покажем, что функции $p^{kx}_{j\pm}(s,t)$ /29/ при $t \geq t_0=\xi_0 s_0^{-m}$ допускают независимое от s мажорирование:

$$|p^{kx}_{j\pm}(s,t)| \leq d^k_{j\pm}\, t^{\bar{q}^k_{j\pm}} . \qquad /П6/$$

/Здесь $\bar{q}^k_{j\pm} = \max(q^k_{j+d\pm}, \overline{j+d-k}/d)$, а $d^k_{j\pm}=a^k_{j+d\pm}$ при $\overline{j+d-k}/d \geq q^k_j$ или $d^k_{j\pm}= b^k_{j\pm}$ при $\overline{j+d-k}/d \leq q^k_{j+d}$ /.
Учитывая /29/, находим

$$p^{kx}_{j\pm}(s,t) = s^{-\overline{(j+d-k)}m'}\,\sigma^k_{j+d\pm}(ts^{m'}). \qquad /П7/$$

Видим, что при различных s кривые $p^{kx}_{j\pm}(s,t)$ /29/ /как и $t^{+(k)}_j(s,r)$ /29/ и $t=t(s,r)$ /17// гомологические /см. п.1/, причем проектирующие дуги имеют вид $p=ct^{\overline{j+d-k}/d}$.Сравнивая их с /П5/, где согласно /П7/ вместо j мы должны писать $j+d$, видим, что эти дуги являются параболами той же степени, что и степень параболы, задающей функцию $\bar{\sigma}^k_{j+d}(\xi)$ /П5/ при $\xi<\xi_0$. Проведем из каждой точки кривой

$$\bar{p}^k_j(t)=s_0^{-\overline{(j+d-k)}m'}\,\bar{\sigma}^k_{j+d\pm}(ts_0^m) \qquad /П8/$$

соответствующую проектирующую дугу. Эти дуги заштрихуют некоторую область на плоскости t,p, которая, во-первых, покроет все кривые $\bar{p}=p^{kx}_{j\pm}(s,t)$ при $0<s\leq s_0$ и, во-вторых, будет иметь верхнюю границу. Если $q^{kx}_{j\pm}(t) \geq \overline{j+d-k}/d$, то есть если проектирующие дуги лежат ниже кривой $\bar{p}=p^{kx}_{j\pm}(t)$, это будет та же самая кривая /П8/, а если $q^k_j \leq \overline{j+d-k}/d$, то есть если проектирующие дуги хотя бы частично проходят выше $p=\bar{p}^{kx}_{j\pm}(t)$, то это будет парабола $p-p_0=a^k_{j+d}t^{\overline{j-k}/d}$, составляющая /П8/ при $t \leq t_0$, но продленная до $t\to\infty$. Так, в обоих случаях искомая мажорируемость доказана. /Функция $p^{kx}_{j\pm}$ мажорируема и при $t \leq t_0$ -мажорантой можем выбрать /П8/, то есть $a^k_{j+d\pm}\,t^{\overline{j-k+d}/d}$ /.

7. Обозначим

$$W(s,r)=|r|^k \prod_{h=1}^{j} |t^{+k_h x}_{j_h}(s,r)|\,\hat{f}(t_0(r)), \qquad U(r)= \sup_{0<s\leq s_0} W(s,r) . \qquad /П9/$$

Здесь $t^{kx}_j(s,r)$ задаются через /29/, а $\hat{f}(t)$ - некоторая из мажорант $\hat{f}^i_{\ell mn}(t)$. Покажем, что функция $U(r)$ при любом выборе k, j, j_h и k_h стремится к нулю, когда $r\to\pm\infty$.

Рассмотрим сначала функции

$$V_\pm(t) = \sup_{0<s\leq s_0} W(s, r_\pm(s,t)), \qquad /П10/$$

получаемые из $W(s,r)$ тем же способом, что и $U(r)$, но при выражении r через t /$r = r_\pm(s,t)$ /22//. Получаем

$$V_\pm(t) \leq [\sup_s |r_\pm(s,t)|]^k \prod_{h=1}^{j} \sup_s |p_{j_h\pm}^{k_h x}(s,t)| \sup_s \hat f(q_\pm(s,t)).$$

Отсюда с учетом пп.2 и 6 находим

$$V_\pm(t) \leq \bar p_\pm(t)^k \prod_{h=1}^{j} \bar p_{j_h}^{k_h}(t) \hat f(q(t)).$$

Учитывая еще /7/ и /П6/, получаем

$$V_\pm(t) \leq d_{0\pm}^k \, t^{k/p_\pm} \prod_{h=1}^{j} d_{j_h\pm}^{k_h} \, t^{\bar q_{h\pm}} \hat f(q(t)). \qquad /П11/$$

По п.2 $\hat f(q(t))$ быстро убывает, и поэтому $W(s, r_\pm(s,t))$ при любом s будет стремиться к нулю, когда $t \to \infty$. Но оценка /П11/ независима от s, то есть убывание равномерно по s, и поэтому к нулю будет стремиться и $V_\pm(t)$ /П10/.

Так как функция $t=t(s,r)$ возрастает неограниченно при $r \to \pm\infty$, следует, что $W(s,r)$ при любом s тоже будет стремиться к нулю, когда $r \to \pm\infty$. Покажем, что этот переход равномерен по s. Чтобы выяснить ситуацию, представим себе полосу $0 < s \leq s_0$, $-\infty < r < +\infty$, на плоскости s, r, где определена функция $W(s,r)$. Проведем на этой полосе линии, задающие r как функцию от s: $r = r_+(s,t)$, $0 < s \leq s_0$ при различных фиксированных значениях параметра $t \geq 0$ /для простоты мы ограничились знаком +, то есть случаем $r > 0$ /. Тогда, очевидно, $U(r)$ будет представлять собой верхнюю границу функции $W(s,r)$ на отрезке $r=\mathrm{const}$, $0 < s \leq s_0$, а $V(t)$ - верхнюю границу той же функции на кривой $r = r_+(s,t)$, $0 < s \leq s_0$, при фиксированном выборе параметра t. Функции $r = r_+(s,t) = s^{-m'} \sigma_+(t s^m)$, рассматриваемые как функции от s при различных значениях параметра t, гомологические с модулями $\mu_s = t^{1/m}$ и $\mu_r = t^{-1/d}$, так что проектирующие дуги будут гиперболами $r = p\_s^{-m}$. При этом t пробегает все значения от 0 до ∞. Функции $r=r_+(s,t)$ при $t=t_1 < t_2 < t_3$ представлены на рис.7.

Если $p_+ > d$, они стремятся к $+\infty$, когда $s \to 0$, а если $p_+ < d$, то они могут убывать до 0, когда $s \to \infty$ /рис.7а и б/. Они, как и их обратные функции, в общем случае многозначны, но их графики пересекают каждую из проектирующих гипербол только один раз. Покажем, что, когда параметр t фиксирован, а s пробегает все значения в интервале $(0, s_0]$, функция $r=r_{++}(s)$ остается ограниченной - имеет конечный супремум. В самом деле, это супремум может находиться при $s=0$, при $s=s_0$ или в открытом

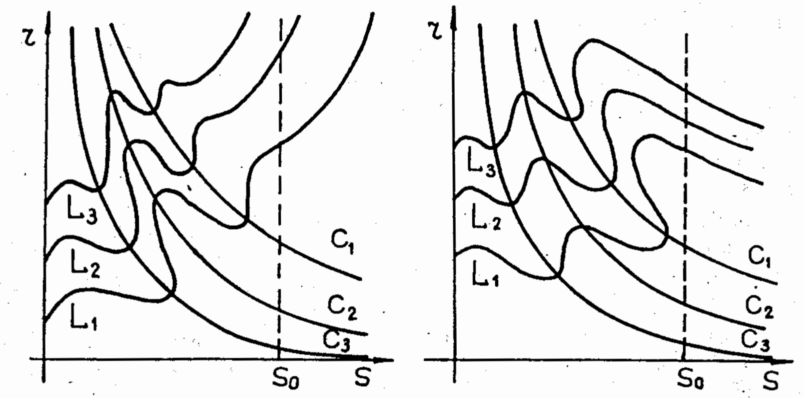

Рис.7

интервале $0<s<s_0$. В первом случае имеем $\lim_{s\to 0} r_{++}(s) = \sqrt[d]{t/\chi_d}$, и утверждение проверено. Во втором случае $\sup r_+(s,t) = s_0^{-m'} \sigma_+(t s_0^m)$, и по определению 1 /свойство А/, утверждение тоже справедливо. В третьем случае $\sup r_{++}(s)$ тоже должен быть конечным, так как функция $r = s^{-m'} \sigma_+(t s^m)$ определена при всех положительных s, и, хотя и многозначная /вместе с ее обратной/, она задается одной /даже бесконечно/ гладкой кривой, уходящей в бесконечность только при $s \to 0$. Решая уравнения $r = s^{-m'} \sigma_+(t s^m)$ и $r = p s^{-m'}$, ее можно представить параметрически двумя однозначными бесконечно гладкими функциями: $s(p) = \sqrt[m]{\chi_+(p)/d}$, $r(p) = p\sqrt[d]{t/\chi_+(p)}$ $(p \geq 0)$. А так как этот супремум не может быть ниже значений r при $s \to 0$ и $s=s_0$, находим, что он возрастает неограниченно, когда $t \to \infty$.

Каждому $\epsilon > 0$ отнесем /конечное/ значение $t > 0$ – то, при котором $V_+(t') \leq \epsilon$, если $t' \geq t$ /или, что все равно, $W(s,r') \leq \epsilon$, если $r' > r_+(s,t)$/. Этому t соответствует /конечное/ значение r - то, при котором $\sup_{0<s\leq s_0} r_+(s,t) = r$. Так как область $r' \geq r$ является подобластью области $r' \geq r_+(s,t)$ /на плоскости r, s /, то явно будем иметь $W(s,r') \leq \epsilon$ при $r' \geq r$. Это значит, что $U(r') \leq \epsilon$ при $r' \geq r$, то есть что $U(r)$ стремится к нулю при $r \to \infty$. Аналогично рассматривается случай, когда $r = r\_(s,t)$. Итак, утверждение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Христов Хр.Я., Дамянов Б.П. Болг.физ.журнал, 1978, 6.
2. Христов Хр.Я., Дамянов Б.П. Болг.физ.журнал, 1979, 1.
3. Христов Хр.Я., Дамянов Б.П. Болг.физ. журнал, 1979, 3.

4. Христов Хр.Я., Дамянов Б.П. Болг.физ.журнал, 1979,4.
5. Христов Хр.Я.,Дамянов Б.П. Болг.физ.журнал, 1980, 6.
6. Христов Хр.Я., Дамянов Б.П. ОИЯИ, Р2-12743, Дубна, 1979.
7. Schwartz L. Theorie des Distributions. Paris, vol.1-2, 1950-1951.
8. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции. Физматгиз, 1958, вып.1 и 2.
9. Laugwitz D. Infinitesimalkalkül. Bibliographisches Institut Mannheim, Wien, Zürich, 1978.
10. Fischer B. The Mathematics Student, 1974, vol.XVII, No.1, p.28-32.
11. Fischer B. Bull.Math., 1975, 19/67/, No.1-2, pp.1-10.
12. Tiwari A.K. The Mathematics Student, 1977, vol.45, No.1, pp.55-59.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 марта 1981 года.