сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-81-14

В.Ц.Банчев

О НЕПРЕРЫВНЫХ АЛГОРИТМАХ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1981

Рассмотрим задачу нелинейного программирования

минимизировать $f(x)$ /М/

при ограничениях

$$g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \qquad /1/$$

$$g_j(x) \geq 0, \quad j = m+1, \dots, s, \qquad /2/$$

$$h_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, p, \qquad /3/$$

где $x \in E^n$, $f: E^n \to E^1$. Обозначим

$$R^\circ = \{x \mid g_i(x) > 0, \quad i = 1, \dots, m\},$$

$$R = \{x \mid g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m\},$$

$$Q = \{x \mid g_j(x) \geq 0, \ h_k(x) = 0, \ j = m+1, \dots, s, \ k = 1, \dots, p\}.$$

Пусть, как обычно [1], ограничения /1/ удовлетворяются во всех точках /т.е. на протяжении всего вычислительного процесса $x \in R$/, а ограничения /2/, /3/ - лишь при приближении к решению задачи /М/. Пусть, кроме того, $R^\circ \neq \emptyset$, $Q \neq \emptyset$ и

$$F(x, r) = f(x) + I(x, 1/r) + O(x, r), \quad r > 0, \ - \qquad /4/$$

штрафная функция метода последовательной безусловной минимизации /свойства, определяющие функции I и O, применяемые в методах внутренней и внешней точки соответственно, даны в [1, с.88] /. Тогда непрерывные алгоритмы нелинейного программирования [1,2] сводят решение задачи /М/ к нахождению предельной точки $x^* = \lim_{t \to +\infty} x(t)$ решения задачи Коши для следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = -\phi(x, t), \quad x(t_0) = x^\circ \in R^\circ, \quad t_0 \geq 0, \qquad /5/$$

где $\phi(x,t)$ - непрерывная вектор-функция для $x \in R^{\circ}, t \geq t_0$, которая удовлетворяет условию $(\phi(x,t),\ F'_x(x,t)) > 0$ при $\|F'_x(x,t)\| \neq 0$. В случае градиентного алгоритма имеем

$$\phi(x,t) = F'_x(x,t), \qquad /6/$$

а в случае алгоритма ньютоновского типа

$$\phi(x,t) = [F''_{xx}(x,t)]^{-1} F'_x(x,t). \qquad /7/$$

В настоящей работе предлагается эффективный способ контролирования величины шага при численном интегрировании системы /5/ путем оценки локальной погрешности [5, с.26]. Рассматривается также вопрос о скорости стремления $x(t)$ к x^*. При этом в качестве функций I и O предлагается использовать

$$I(x, 1/t) = -\sum_{i=1}^{m} \ln\{\mathrm{th}[\beta(t)\, g_i(x)]\}, \qquad /8/$$

$$O(x,t) = -q(t) \sum_{j=m+1}^{s} g_j(x)\{1 - \mathrm{th}[\alpha(t)\, g_j(x)]\} + \qquad /9/$$

$$+ q(t) \sum_{k=1}^{p} h_k(x)\, \mathrm{th}[\alpha(t)\, h_k(x)],$$

где $q(t) \geq 0$, $\alpha(t) \geq q(t)$, $\beta(t) > 0$ и $q(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t) \to +\infty$ монотонно при $t \to +\infty$. Заметим, что в отличие от применяемых в настоящее время штрафных функций в методе внешней точки порядок дифференцируемости функции /9/ зависит только от свойств функций f, $\{g_j\}$, $\{h_k\}$ задачи /M/. В то же время, как показали численные эксперименты, при подходящем выборе $q(t)$ и $\alpha(t)$ функция /9/ обладает свойством, аналогичным свойству так называемых точных штрафных функций, сводить решение /с заданной точностью/ задачи /M/ с ограничениями /2/, /3/ к однократной безусловной минимизации.

Ниже результаты формулируются в виде отдельных утверждений без доказательств.

В дальнейшем будем предполагать, что f, $\{g_i\}$, $\{g_j\}$, $\{h_k\}$ - дважды непрерывно дифференцируемые функции и что выполнены достаточные условия второго порядка [1, с. 47] для того, чтобы точка x^* была изолированным локальным минимумом задачи /M/.

1. Функция $F(x,r)$, определенная равенствами /4/, /8/, /9/, является V-функцией и, следовательно, удовлетворяет условиям теоремы 11 в [1, с. 84] о существовании такой последовательности $x(r_k)$ безусловных локальных минимумов функции V, которая сходится к локальному решению x^* задачи /M/ при $r_k \to +\infty$. При этом

матрица вторых частных производных $F''_{xx}(x(r_k), r_k)$ положительно определена при достаточно большом r_k и имеет такие собственные значения $\lambda_i(x(r_k), r_k)$, для которых справедливо $\lambda_i(x(r_k), r_k) \to +\infty$, $i = 1, \ldots, r \leq n$ при $r_k \to +\infty$ /см. также [3, с.204]/. Следовательно, система /5/, /6/ является жесткой [4,5] при больших t.

2. Пусть $x^{\circ} \in S(x^*, \rho) = \{x \mid \|x - x^*\| \leq \rho\}$, $\rho > 0$, $S(x^*, \rho) \subset D \subset R^{\circ}$, где D - область притяжения локального минимума x^* задачи /M/. Для $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < +\infty$ обозначим через $x^k / x^{\circ} \in S(x^*, \rho)/$ приближения к значениям $x(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, $x(t_0) = x^{\circ}$, решения задачи Коши /5/, полученные с помощью какого-нибудь численного метода. Пусть, кроме того, e_k - локальная погрешность этого метода на k-м шаге интегрирования /5/ и $h_k = t_{k+1} - t_k$ / $k = 0$, $1, \ldots$/. Тогда, если функция $v(t)$ удовлетворяет условиям $0 \leq v(t) < 1$ при $t > 0$, $v(t) \to 0$ монотонно при $t \to +\infty$ и выполнены соотношения

$$\|x(t) - x^*\| \leq L(t_0, x^{\circ})\, v(t - t_0)\, \|x^{\circ} - x^*\|, \quad t \geq t_0, \qquad /10/$$

$$0 < L(t_0, x^{\circ}) \leq L, \quad t_0 \geq 0, \quad x^{\circ} \in S(x^*, \rho), \qquad /11/$$

$$\|e_k\| \leq \beta\, v(h_k)\, \|x^{k+1} - x^k\|, \quad 0 \leq \beta < 1/2, \qquad /12/$$

$$h_k > h, \quad (2L + 1)\, v(h) < 1, \qquad /13/$$

получаем

$$\|x^{k+1} - x^*\| < \delta_k \|x^k - x^*\|, \quad k = 0, 1, \ldots, \qquad /14/$$

где $\delta_k = (2L + 1)\, v(h_k) < 1$ и $\lim\limits_{k \to \infty} x^k = x^*$.

3. В дальнейшем $q(t) = at + b$, $\alpha(t) = \exp[q(t)]$, $\beta(t) = \alpha(t)$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Проведенные численные эксперименты с помощью программы GERUN [9], в которой реализован обобщенный метод Рунге-Кутта [6,8], подтвердили приведенные выше результаты. Кроме того, они показали следующее.

Решение $x(t)$ задачи Коши /5/ удовлетворяет /10/ с $v(t) = \exp(-at)$, а матрица Гессе $F''_{xx}(x(t), t)$ имеет такие собственные значения, для которых справедливо

$$\lambda_i(x(t), t) = O(\alpha(t)), \quad i = 1, \ldots, r \leq n.$$

Жесткость системы /5/, /6/ делает очень медленной сходимость последовательности /14/. Использование алгоритма 1 обобщенного метода Рунге-Кутта не привело к улучшению сходимости в силу неавтономности /5/, /6/. Поэтому рекомендуется использовать систему /5/, /7/, у которой скорость сходимости последовательности /14/ существенно более высокая. При этом применение алгоритма 1 обобщенного метода Рунге-Кутта так,как это делается в [10], позволяет увеличить шаг интегрирования в несколько раз при достаточно большом t.

В случае, когда систему /5/, /7/ не удается проинтегрировать, задачу /М/ можно решить методом последовательной безусловной минимизации [1], полагая $a=0$ и, например, $b=5$, 15, 25 /если точность представления чисел-приблизительно 17 значащих цифр/. При этом уже рекомендуется использовать систему /5/, /6/ и алгоритм 1 обобщенного метода Рунге-Кутта [6,7,9]. Оказывается, что безусловный минимум x_b функции $F(x,r)$ с $q(r) = b$ удовлетворяет условию $\|x_b - x^*\| = O(\exp(-b))$. Следует отметить, что для решения задачи /М/ с такой же точностью, как в случае применения системы /5/, /7/, метод последовательной безусловной минимизации требует, вообще говоря, использования больше значащих цифр.

И, наконец, достаточно эффективным критерием остановки процесса численного интегрирования /5/, как и в случае безусловной минимизации, является малость нормы правой части /5/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. "Мир", М., 1972.
2. Венец В.И., Рыбашов М.В. Ж. вычисл.матем. и матем. физ., 1977, т. 17, №3, с. 622-633.
3. Гилл Ф., Мюррэй У. /ред./ Численные методы условной оптимизации. "Мир", М., 1977.
4. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. "Наука", М., 1979.
5. Холл Дж., Уатт Дж. /ред./ Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. "Мир", М., 1979.
6. Банчев В.Ц. Докл. БАН, 1979, т. 32, №5, с. 583-586.
7. Банчев В.Ц. Докл. БАН, 1979, т. 32, №6, с. 725-728.
8. Банчев В.Ц. ОИЯИ, Р5-12174, Дубна, 1979.
9. Банчев В.Ц. ОИЯИ, Р5-12856, Дубна, 1979.
10. Банчев В.Ц. ОИЯИ, Р5-81-13, Дубна, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 января 1981 года.