объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-81-130

Е.П.Жидков, К.П.Кирчев

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА ДЕ ФРИЗА НА ВСЕЙ ОСИ

Направлено в журнал "Сердика"

1981

Хорошо известно, что задача Коши для модифицированного уравнения Кортевега де Фриза

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \quad u(x,0) = g(x), \quad t \geq 0, \quad -\infty < x < \infty, \qquad /1/$$

была решена в классе быстроубывающих гладких функций методом обратной задачи рассеяния /см. например,[1] /.

В настоящей работе с использованием метода "регуляризаций" /в[3] этот метод применен при решении задачи Коши для уравнения Кортевега де Фриза/ показано существование, единственность и непрерывная зависимость от начальных данных решения задачи /1/, когда начальные данные принадлежат пространствам Соболева.

§1. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} - \epsilon^2 u_{xxt} = 0,$$

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in R, \quad t \geq 0, \quad 0 < \epsilon \leq 1. \qquad /2/$$

Сначала мы решим задачу /2/ для фиксированного $0 < \epsilon \leq 1$, а потом, устремляя ϵ к нулю, перейдем к задаче /1/.

Введем некоторые обозначения:

1. $W^s = W^s(R)$ - пространства Соболева со стандартной нормой

$$||f||_s^2 = \sum_{k=0}^{s} \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(k)}(x)|^2 dx.$$

2. $\tilde{W}_T^s = C(0,T; W^s)$ состоит из функций $u: R\times[0,T] \to R$, которые принадлежат W^s при фиксированном $t \in [0,T]$, и отображение $u: [0,T] \to W^s$ является непрерывным и ограниченным. Норма в $\tilde{W}_T^s$ задается формулой $|||u|||_s = \sup_{0\leq t\leq T} ||u(\bullet, t)||_s$.
3. $\tilde{W}_T^{s,k} = C^k(0,T; W^s)$ содержит такие u, что $\partial_t^j u \in \tilde{W}_T^s$ при $0 \leq j \leq k$, и имеет норму $|||u|||_{s,k} = \sup_{0\leq t\leq T} \sup_{0\leq j\leq k} ||\partial_t^j u(\cdot, t)||$.

В следующей лемме сформулированы хорошо известные свойства пространств Соболева[6], которые нам понадобятся в дальнейшем.

<u>Лемма 1</u>

Пусть $s \geq 1$ и $k \geq 0$. Тогда

/а/ $f \in W^s \Rightarrow f, f', \ldots, f^{(s-1)}$ являются ограниченными равномерно-непрерывными функциями, стремящимися к нулю при $x \to \pm\infty$.

/b/ $f, g \in W^s \Rightarrow f \cdot g \in W^s$.

/c/ $u \in \tilde{W}_T^{s,k} \Rightarrow \partial_x^j \partial_t^\ell u$ являются ограниченными непрерывными функциями на $R \times [0,T]$ /равномерно-непрерывными при $T<\infty$/, стремящимися к нулю при $x \to \pm\infty$ /равномерно при $T<\infty$/, $0 \le j \le s-1$, $0 \le \ell \le k$.

/d/ $u, v \in \tilde{W}_T^{s,k} \Rightarrow uv \in \tilde{W}_T^{s,k}$.

Для фиксированного $\epsilon > 0$ в /2/ сделаем замену

$$v(x,t) = \epsilon u(\epsilon (x-t), \epsilon^3 t). \qquad /3/$$

Тогда /2/ трансформируется в задачу

$$v_t + v_x + v^2 v_x - v_{xxt} = 0, \qquad /4/$$
$$v(x,0) = h(x) = \epsilon g(\epsilon x), \quad x \in R, \quad t \ge 0.$$

Если $h(x) \in W^s$, $s \ge 2$, то, рассматривая интегральное уравнение

$$v(x,t) = h(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\{v(\xi,\tau) + \frac{1}{3} v^3(\xi,\tau)\} d\xi d\tau, \qquad /5/$$
$$h(x) = v(x,0), \quad K(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} x \cdot \exp[-|x|],$$

и соответствующим образом модифицируя рассуждения, приведенные в /2/ относительно уравнения $v_t + v_x + v v_x - v_{xxt} = 0$, получаем, что существует единственное решение v задачи /4/, которое принадлежит $\tilde{W}_\infty^1$. Кроме того, применяя индукции и лемму 1, нетрудно вывести, что для каждого $0<T<\infty$ $v \in \tilde{W}_T^s$. Дифференцируя /5/ по времени, имеем $v_t = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)(v + \frac{1}{3} v^3)\, dy$. Используя преобразование Фурье, можно показать, что сверка с K отображает непрерывно W^s на W^{s+1} и тем самым $\tilde{W}_T^s$ на $\tilde{W}_T^{s+1}$. Индуктивно, если допустим, что $\partial_t^j v \in \tilde{W}_T^{s+1}$, $1 \le j \le k$, то в силу леммы 1 $\partial_t^k (v + \frac{1}{3} v^3) \in \tilde{W}_T^s$ и, следовательно, из представления $\partial_t^{k+1} v = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\, \partial_t^k (v + \frac{1}{3} v^3)\, dy$ вытекает, что $\partial_t^{k+1} v \in \tilde{W}_T^{s+1}$. Вернемся к регуляризованной задаче /2/, обращая преобразование /3/ для фиксированного $\epsilon > 0$. Таким образом, мы получили следующее утверждение.

<u>Лемма 2</u>

Пусть $g \in W^s$, $s \ge 2$. Тогда существует единственное решение u регуляризованной задачи /2/, которое принадлежит $\tilde{W}_T^s$ для любого конечного T. Кроме того, $\partial_t^\ell u \in \tilde{W}_T^{s-\ell}$, $0 \le \ell \le s$.

<u>Следствие</u>

Пусть $g \in C^\infty$ и вместе со всеми производными принадлежит L_2. Тогда задача /2/ имеет единственное решение $u \in C^\infty$, которое вместе со всеми производными принадлежит $\tilde{W}_T$ для любого конечного T.

§2. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ

Везде в этом параграфе мы будем предполагать, что $u(x,0) = g(x) \in C^\infty$ и вместе со всеми своими производными принадлежит L_2. Множество таких функций мы будем обозначать через W^∞. В силу следствия леммы 2 решение $u(x,t)$ задачи /2/ и все его пространственные и временные производные принадлежат $\tilde{W}_T$ $0<T<\infty$.

<u>Лемма 3</u>

Пусть $g \in W^\infty$. Тогда для всех $t>0$, независимо от $0<\epsilon \le 1$, имеет место оценка

$$\|u\|_1 \le \alpha(\|g\|_1), \qquad /6/$$

где $\alpha: R^+ \to R^+$ является непрерывной, монотонно возрастающей функцией и $\alpha(0)=0$.

<u>Доказательство</u>

Умножим /2/ на u и проинтегрируем по R, а потом по $[0,t]$. После интегрирования по частям, учитывая тот факт, что u и все ее производные стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} [u^2(x,t) + \epsilon^2 u_x^2(x,t)]\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x)^2 + \epsilon^2 g'(x)]\, dx \le \|g\|_1^2. \qquad /7/$$

Умножая /2/ на u_{xt}, интегрируя по R и по частям, получим

$$\frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} u^3 u_{xxt}\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx} u_{xxt}\, dx. \qquad /8/$$

Далее умножим /2/ на $u^3 + 3u_{xx}$, проинтегрируем по R и по $[0,t]$, в силу /8/ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} [u_x^2 - \frac{1}{6} u^4]\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} [g'(x)^2 - \frac{1}{6} g(x)^4]\, dx. \qquad /9/$$

При использовании элементарного неравенства

$$\sup_{x \in R} |f(x)| \le (\|f\| \, \|f'\|)^{1/2} \le \|f\|_1, \quad f \in W^1, \qquad /10/$$

из /7/ и /9/ вытекает

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 = \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} u^4\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} [g'(x)^2 - \frac{1}{6} g(x)^4]\, dx$$

$$\le \frac{1}{6} \|u\|_1 \|g\|_1^3 + \|g\|_1^2 + \frac{1}{6} \|g\|_1^4,$$

$$\|u\|_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \{u^2 + u_x^2\}\, dx \le \frac{1}{6} \|u\|_1 \|g\|_1^3 + 2\|g\|_1^2 + \frac{1}{6} \|g\|_1^4.$$

Решая это квадратное неравенство относительно $\|u\|_1$, получаем оценку /6/.

Следствие

$$\sup_{x\in R,\, t\geq 0} |u(x,t)| \leq \|u\|_1 \leq \alpha(\|g\|_1). \qquad /11/$$

Лемма 4

Пусть $g\in W^\infty$, $0<T<\infty$. Тогда существует $\epsilon_0=\epsilon_0(T,\|g\|_3)$, такое, что при $0<\epsilon\leq\epsilon_0$, $t\in[0,T]$ имеет место оценка

$$\|u\|_2\leq \alpha_1(\|g\|_3), \qquad /12/$$

где $\alpha_1: R^+\to R^+$ является непрерывной, монотонно возрастающей функцией и $\alpha_1(0)=0$.

Доказательство

Умножая /2/ на выражение $G(u)=u^5+10uu_x^2+6u_{xxxx}+10u^2u_{xx}$, интегрируя по R, после соответствующих интегрирований по частям получим

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\left[3u_{xx}^2-5u^2u_x^2+\frac{1}{6}u^6\right]dx = \epsilon^2\int_{-\infty}^{\infty} G(u)u_{xxt}\,dx.$$

Преобразуем это равенство к виду $\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}[(3-5\epsilon^2u^2)u_{xx}^2$

$$-5u^2u_x^2+\frac{1}{6}u^6+\epsilon^2\left(3u_{xxx}^2+\frac{5}{2}u_x^4\right)]dx=$$

$$=-5\epsilon^2\int_{-\infty}^{\infty}(2uu_tu_{xx}^2+u^4u_xu_{xt}+4uu_xu_{xx}u_{xt})dx.$$

Теперь проинтегрируем по $[0,t]$, получится формула

$$V(t)=V(0)-5\epsilon^2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(2uu_tu_{xx}^2+u^4u_xu_{xt}+4uu_xu_{xx}u_{xt})dx\,d\tau. \qquad /12/$$

Следствие из леммы 3 утверждает, что $u(x,t)$ является ограниченной функцией для всех x и t и, следовательно, существует достаточно малое $\epsilon_1>0$, такое, что при $0<\epsilon\leq\epsilon_1$ имеем $1\leq 3-5\epsilon^2u^2\leq 5$. Тогда в силу /12/ в области $0<\epsilon\leq\epsilon_1$ имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}^2dx\leq\int_{-\infty}^{\infty}\left[(3-5\epsilon^2u^2)u_{xx}^2+\frac{1}{6}u^6+\epsilon^2\left(3u_{xxx}^2+\frac{5}{2}u_x^4\right)\right]dx$$

$$\leq V(0)+5\int_{-\infty}^{\infty}u^2u_x^2dx+5\epsilon^2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}|2uu_tu_{xx}^2+u^4u_xu_{xt}+4uu_xu_{xx}u_{xt}|dx\,d\tau. \qquad /13/$$

Оценим сверху первые два члена в правой части /13/:

$$V(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[(3-5\epsilon^2g^2)g''^2-5g^2g'^2+\frac{1}{6}g^6+\epsilon^2\left(3g'''^2+\frac{5}{2}g'^4\right)\right]dx$$

$$\leq 5\|g\|_2^2+5\|g\|_1^4+\frac{1}{6}\|g\|_1^6+\epsilon_1^2\left(3\|g\|_3^2+\frac{5}{2}\|g\|_2^4\right),$$

$$5\int_{-\infty}^{\infty}u^2u_x^2dx\leq 5\|u\|_1^2\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2dx\leq 5\|u\|_1^4.$$

Подставляя эти оценки в /13/ и используя оценку /6/ из леммы 3, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_{xx}^2dx\leq C+5\epsilon^2\int_0^t(2\|u\|_\infty\|u_t\|_\infty\|u_{xx}\|^2 \qquad /14/$$

$$+\|u\|_\infty^4\|u_x\|\|u_{xt}\|+4\|u\|_\infty\|u_x\|_\infty\|u_{xx}\|\|u_{xt}\|)d\tau,$$

где $\|f\|_\infty=\sup_{x\in R}|f(x)|$.

Обозначим $A=A(t)=\|u\|_2$, и так как $\|u\|_1$ и $\|u\|_\infty$ ограничены /лемма 3/, то мы можем, не уменьшая общности, переписать /14/ в виде

$$A(t)^2\leq C+\epsilon^2C\int_0^t(\|u_t\|_\infty A(\tau)^2+\|u_{xt}\|+\|u_x\|_\infty\|u_{xt}\|A(\tau))d\tau. \qquad /15/$$

В /15/ C обозначает константу, зависящую /монотонно возрастает и $C(0)=0$/ только от $\|g\|_3$.

Продифференцируем по времени уравнение /2/ и положим $v=u_t$. Получим

$$v_t+(vu^2)_x+v_{xxx}-\epsilon^2v_{xxt}=0.$$

Умножая это уравнение на v и интегрируя по R и по частям, получим

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}(v^2+\epsilon^2v_x^2)dx=-2\int_{-\infty}^{\infty}uu_xv^2dx.$$

Отсюда после интегрирования по $[0,t]$ вытекает

$$B^2=B(t)^2=\int_{-\infty}^{\infty}(u_t^2+\epsilon^2u_{xt}^2)dx=B(0)^2-2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}uu_xu_t^2dx\,d\tau, \qquad /16/$$

$$B(t)^2\leq B(0)^2+2\int_0^t\|u\|_\infty\|u_x\|_\infty B(\tau)^2d\tau.$$

Используя оценки $\|u_{xt}\|\leq\epsilon^{-1}B(t)$,

$$\|u_x\|_\infty\leq(\|u_x\|\|u_{xx}\|)^{1/2}\leq CA(t)^{1/2},$$

$$\|u_t\|_\infty^2\leq\|u_t\|\|u_{xt}\|=\epsilon^{-1}[\|u_t\|(\epsilon\|u_{xt}\|)]\leq\epsilon^{-1}[\|u_t\|^2+\epsilon^2\|u_{xt}\|^2]=$$
$$=\epsilon^{-1}B(t)^2,$$

из /15/ и /16/ получаем следующую систему интегральных неравенств:

$$A(t)^2 \le C + \epsilon^2 C \int_0^t [\epsilon^{-1/2} BA^2 + \epsilon^{-1} B + \epsilon^{-1} BA^{3/2}]\, d\tau,$$

$$B(t)^2 \le B(0)^2 + C \int_0^t A^{1/2} B^2\, d\tau. \qquad /17/$$

В силу неравенства Коши-Буняковского имеем оценку

$$B(t)^2 = -\int_{-\infty}^{\infty} u_t (u^2 u_x + u_{xxx})\,dx \le B(t) \|u\|_3 (\|u\|_1^2 + 1),$$

$$B(t) \le \|u\|_3 (\|u\|_1^2 + 1), \qquad B(0) \le \|g\|_3 (\|g\|_1^2 + 1).$$

Подставляя оценку для B(0) в /17/, получим

$$A(t)^2 \le C + \epsilon^2 C \int_0^t [\epsilon^{-1/2} BA^2 + \epsilon^{-1} B + \epsilon^{-1} BA^{3/2}]\, d\tau,$$

$$B(t)^2 \le C + C \int_0^t A^{1/2} B^2\, d\tau.$$

Здесь C обозначает константу, зависящую /монотонно, $C(0)=0$ / только от $\|g\|_3$. Положим $A^2 + C = D(t)^2$. Тогда из последних неравенств вытекает

$$D(t)^2 \le 2C + 2\epsilon (C+1) \int_0^t B D^2\, d\tau,$$

$$B(t)^2 \le C + C \int_0^t D^{1/2} B^2\, d\tau. \qquad /18/$$

Запишем /18/ в более удобной форме:

$$D^2 \le \left(\frac{a}{1-\epsilon}\right)^4 + \epsilon \frac{4c}{b} \int_0^t B D^2\, d\tau,$$

$$B^2 \le \left(\frac{b}{1-\epsilon}\right)^2 + \frac{2c}{a} \int_0^t D^{1/2} B^2\, d\tau. \qquad /19/$$

Константы a, b, c не зависят от $0<\epsilon\le\epsilon_1<1$. /Сначала мы выбираем a и b достаточно большими, а потом выбираем c достаточно большим/. Очевидно, не уменьшая общности, можно считать, что a, b и c монотонно возрастают в зависимости от $\|g\|_3$, $a(0)=b(0)=0$, $D(0)=(\|g\|_2^2+C)^{1/2} < a^2$ и $B(0)<b$. В силу последних двух неравенств нетрудно вывести, что для любого $0 \le t < \infty$

$$D(t) < \overline{D(t)}, \qquad B(t) < \overline{B(t)}, \qquad /20/$$

где $\bar{D}(t)$ и $\bar{B}(t)$ являются решениями системы

$$\bar{D}(t)^2 = \left(\frac{a}{1-\epsilon}\right)^4 + \epsilon \frac{4c}{b} \int_0^t \bar{B} \bar{D}^2\, d\tau,$$

$$\bar{B}(t)^2 = \left(\frac{b}{1-\epsilon}\right)^2 + \frac{2c}{a} \int_0^t \bar{D}^{1/2} \bar{B}^2\, d\tau. \qquad /21/$$

Решая /21/, получим, что

$$\bar{D}(t) = \left(\frac{a}{1-\epsilon \exp[ct]}\right), \qquad \bar{B}(t) = \frac{b \exp[ct]}{1-\epsilon \exp[ct]}. \qquad /22/$$

Выбираем $\epsilon_2>0$, такое, чтобы $1-\epsilon \exp[cT] \ge \frac{1}{2}$, $\epsilon \le \epsilon_2$, и пусть $\min(\epsilon_1, \epsilon_2) = \epsilon_0 = \epsilon_0(T, \|g\|_3)$ /константа c зависит только от $\|g\|_3$/. Тогда при $0<\epsilon\le\epsilon_0$ из /20/ и /22/ видно, что D и B ограничены на $[0,T]$ гранью, зависящей только от T и $\|g\|_3$. Отсюда, используя равенство $a(0)=0$, получаем оценку /12/. Лемма доказана.

Лемма 5

Пусть $g \in W^\infty$, $0<T<\infty$. Выберем $\epsilon_0>0$ в соответствии с леммой 4. Тогда при $0<\epsilon\le\epsilon_0$ решение $u(x,t)$ ограничено в $\tilde{W}^m_T$, $m\ge 3$, гранью, зависящей только от $T, \epsilon_0, \|g\|_m$ и $\epsilon\|g\|_{m+1}$.

Доказательство

Доказательство проведем по индукции. Допустим, что u ограничено в $\tilde{W}^{m-1}_T$, $m>2$, гранью, зависящей только от T, ϵ_0 и $\|g\|_m$. В случае, когда $m=2$, это условие выполняется /лемма 4/. Мы покажем, что из этого предположения следует, что u ограничено в $\tilde{W}^m_T$ гранью, зависящей от T, ϵ_0, $\|g\|_m$ и $\epsilon\|g\|_{m+1}$.

Умножая уравнение /2/ на $u_{(2m)} = \partial_x^{2m} u$ и интегрируя по R, получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} [u_{(m)}^2 + \epsilon^2 u_{(m+1)}^2]\, dx = -\frac{2}{3} \int_{-\infty}^{\infty} (u^3)_{(m+1)} u_{(m)}\, dx. \qquad /23/$$

В силу индуктивного предположения

$$\|u_{(r)}\| \le C, \quad r \le m-1; \quad \|u_{(r)}\|_\infty \le C, \quad r \le m-2. \qquad /24/$$

Применяя формулу Лейбница, запишем

$$\|u^2_{(r)}\|_\infty \le \sum_{j=0}^{r} a_j \|u_{(j)}\|_\infty \|u_{(r-j)}\|_\infty \le C, \quad r \le m-2. \qquad /25/$$

Теперь применим формулу Лейбница к $(u^3)_{(m+1)} = 3(u^2 u_{(1)})_{(m)}$,

$$-\frac{2}{3} \int_{-\infty}^{\infty} (u^3)_{(m+1)} u_{(m)}\, dx = c_0 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 u_{(m+1)} u_{(m)}\, dx$$

$$+ c_1 \int_{-\infty}^{\infty} (u^2)_{(1)} u^2_{(m)}\, dx + c_{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} (u^2)_{(m-1)} u_{(2)} u_{(m)}\, dx$$

$$+ c_m \int_{-\infty}^{\infty} (u^2)_{(m)} u_{(1)} u_{(m)}\, dx + \sum_{r=2}^{m-2} c_r \int_{-\infty}^{\infty} (u^2)_{(r)} u_{(m+1-r)} u_{(m)}\, dx.$$

Используя еще раз формулу Лейбница /25/, нетрудно получить оценки:

$$c_0 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 u_{(m+1)} u_{(m)}\, dx + c_1 \int_{-\infty}^{\infty} (u^2)_{(1)} u^2_{(m)}\, dx \le C \|u_{(m)}\|^2, \qquad /26/$$

$$c_{m-1}\int_{-\infty}^{\infty}(u^2)_{(m-1)}u_{(2)}\,u_{(m)}\,dx + c_m\int_{-\infty}^{\infty}(u^2)_{(m)}\,u_{(1)}\,u_{(m)}\,dx \le C(\|u_{(m)}\|^2+\|u_{(m)}\|), \qquad /27/$$

$$\sum_{r=2}^{m-2} c_r\int_{-\infty}^{\infty}(u^2)_{(r)}\,u_{(m+1-r)}\,u_{(m)}\,dx \le \sum_{r=2}^{m-2} c_r\|(u^2)_{(r)}\|_\infty\|u_{(m+1-r)}\| \qquad /28/$$

$$\times\|u_{(m)}\|\le C(\|u_{(m)}\|^2+\|u_{(m)}\|).$$

Оценивая правую часть /23/, используя при этом /26/, /27/ и /28/, получим

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}[u^2_{(m)}+\epsilon^2u^2_{(m+1)}]\,dx \le C\{\int_{-\infty}^{\infty}u^2_{(m)}\,dx+(\int_{-\infty}^{\infty}u^2_{(m)}\,dx)^{1/2}\}.$$

Отсюда

$$\frac{dE_m}{dt}\le C E_m^{1/2}(E_m^{1/2}+1), \qquad /29/$$

где

$$E_m(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[\,u^2_{(m)}+\epsilon^2u^2_{(m+1)}]\,dx.$$

Интегрируя /29/, имеем

$$\|u_{(m)}\|\le E_m^{1/2}(t)\le E_m^{1/2}(0)\exp[Ct]+\exp[Ct]-1,\quad 0<\epsilon\le\epsilon_0,\ t\in[0,T].$$

Тогда из того, что $E_m^{1/2}(0)\le\|g\|_m+\epsilon\|g\|_{m+1}$ и константа C зависит только от $\|g\|_m$, вытекает, что $\|u_{(m)}\|$ ограничено на $[0,T]$. Следовательно, u ограничено в $\tilde W_T^m$. Лемма доказана.

Запишем /2/ в виде $(1-\epsilon^2\partial_x^2)u_t=-u^2u_x-u_{xxx}$. Обращая оператор $1-\epsilon^2\partial_x^2$, получим $u_t=-K_\epsilon*(u^2u_x+u_{xxx})$, где $\hat K_\epsilon(k)=(1+\epsilon^2k^2)^{-1}$ /$\hat f$ – преобразование Фурье функции $f(x)$ /. Отсюда, используя лемму 5 и индукцию, нетрудно получить следующее утверждение.

Следствие

Решение $u(x,t)$ ограничено в $\tilde W_T^{k,\ell}$ независимо от $0<\epsilon\le\epsilon_0$ для всех k,ℓ и T.

§3. СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ ПРИ $\epsilon\downarrow 0$

Пусть $g(x)\in W^s$, $s\ge3$. С помощью свертки с соответственно подобранной гладкой функцией, регуляризуем g. Получаем гладкую функцию g_ϵ/3/. Далее решаем задачу /2/ с $u_\epsilon(x,0)=g_\epsilon(x)$ и показываем, что при $\epsilon\downarrow0$ решения $u_\epsilon(x,t)$ строго сходятся в соответствующих функциональных пространствах к решению $u(x,t)$ задачи /1/ и $u(x,0)=g(x)$.

Определим регуляризацию g_ϵ на g /в дальнейшем $\hat f$ обозначает преобразование Фурье функции f/ $\hat g_\epsilon(k)=\phi(\epsilon^{1/6}k)\hat g(k)$, где ϕ – четная C^∞-функция, $0\le\phi\le1$, $\phi(0)=1$, причем функция $\psi(k)=1-\phi(k)$ имеет в нуле нуль бесконечного порядка и, кроме того, ϕ стремится экспоненциально к нулю при $k\to\pm\infty$. Например, мы можем положить $\phi(k)=\exp[-r(k)]$, $r(k)=k^2\exp[-1/k^2]$. Из свойства функции ϕ следует, что $g_\epsilon(x)\in W^\infty$. Тогда в силу утверждения леммы 2 задача

$$u_t+u^2u_x+u_{xxx}-\epsilon^2u_{xxt}=0,$$
$$u(x,0)=g_\epsilon,\quad t\ge0,\quad x\in R,\quad 0<\epsilon\le1, \qquad /30/$$

имеет единственное решение $u_\epsilon(x,t)=u(x,t,\epsilon)$, которое вместе со всеми своими производными принадлежит $\tilde W_T$ для всех $T>0$.

Используя равенства Парсеваля, нетрудно вывести /см /3/ / следующие утверждения.

Лемма 6

Пусть $g(x)\in W^s$, $s\ge3$. Тогда имеют место следующие оценки:

/a/ $\epsilon^{(1/6)j}\|g_\epsilon\|_{s+j}\le C\|g\|_s\Rightarrow\|g_\epsilon\|_{s+j}=O(\epsilon^{-(1/6)j})$, $j=1,2,\dots$,

/b/ $\|g-g_\epsilon\|_{s-j}=o(\epsilon^{(1/6)j})$, $j=1,2,\dots,s$,

/c/ $\|g-g_\epsilon\|_s=o(1)$.

Оценки /b/ и /c/ выполняются равномерно на сходящейся последовательности в W^s. Оценка /a/ выполняется равномерно на ограниченном подмножестве W^s. Оценка /b/ тоже будет выполняться равномерно на ограниченном подмножестве W^s, если заменить в /b/ o на O. Из лемм 5 и 6 вытекает

Следствие 1

Пусть $g(x)\in W^s$, $s\ge3$. Тогда u_ϵ ограничено в $\tilde W_T^s$, $0<T<\infty$, независимо для достаточно маленьких ϵ. Кроме того, $\epsilon^{m/6}u_\epsilon$ ограничено в W_T^{s+m}, $m\ge1$, независимо для достаточно малых ϵ.

Следствие 2

$\partial_t u_\epsilon$ ограничено в $\tilde W_T^{s-3}$, $\epsilon^{m/6}\partial_x^{s+m-3}\partial_t u_\epsilon$, $m=1,2,3,4$ и $\epsilon^{7/6}\partial_x^{s+2}\partial_t u_\epsilon$ ограничены в $\tilde W_T$, $0<T<\infty$, независимо для достаточно малых ϵ.

Доказательство

Используя индукцию и формулу Лейбница, можно показать, что

$$f,g\in W^k \Rightarrow \|fg\|_k \le 2^k \|f\|_k \|g\|_k, \ k\ge 1. \qquad /31/$$

Обращая оператор $(1-\epsilon^2\partial_x^2)$ в /30/, получим $\partial_t u_\epsilon = -K_\epsilon * (u_\epsilon^2\partial_x u_\epsilon + \partial_x^3 u_\epsilon)$. Отсюда, применяя равенство Парсеваля и используя формулу /31/, получим

$$\|\partial_t u_\epsilon\|_{s-3} \le 2^{2(s-3)} \|u_\epsilon\|_s^3 + \|u_\epsilon\|_s,$$

$$\epsilon^{m/6}\|\partial_t u_\epsilon\|_{s+m-3} \le \epsilon^{m/6}(2^{2(s+m-3)}\|u_\epsilon\|^2_{s+m-3}\|u_\epsilon\|_{s+m-2} + \|u_\epsilon\|_{s+m}),$$

$$\epsilon^{7/6}\|\partial_t u_\epsilon\|_{s+2} \le \epsilon^{7/6}(2^{2(s+2)}\|u_\epsilon\|^2_{s+2}\|u_\epsilon\|_{s+3} + \|u_\epsilon\|_{s+2}).$$

В силу следствия 1 из этих неравенств вытекают утверждения следствия 2.

Лемма 7

Пусть $g(x)\in W^s$, $s\ge 3$. Тогда $\{u_\epsilon\}$ является о.п. /обобщенной последовательностью/ Коши в $\tilde W^s_T$ при $\epsilon\downarrow 0$.

Доказательство

Положим $u=u_\epsilon$ и $v=u_\delta$, где $\delta\le\epsilon$. Достаточно показать, что, выбирая достаточно малое ϵ, можно сделать $\|u-v\|_s$ сколь угодно малым равномерно по $t\in[0,T]$. Очевидно, $w=u-v$ удовлетворяет уравнение

$$w_t + [\tfrac{1}{3}w^3 + u^2 w - uw^2]_x + w_{xxx} - \delta^2 w_{xxt} = (\epsilon^2-\delta^2)u_{xxt},$$

$$w(x,0) = g_\epsilon(x) - g_\delta(x) = h(x). \qquad /32/$$

Умножая уравнение /32/ на $w_{(2j)} = \partial_x^{2j} w$, $j\le s$, интегрируя по R, а потом по $[0,t]$ и используя интегрирование по частям, получим

$$V_j(t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}[w^2_{(j)} + \delta^2 w^2_{(j+1)}]\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}[h^2_{(j)} + \delta^2 h^2_{(j+1)}]\,dx$$

$$-2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}[(\tfrac{1}{3}w^3 + u^2 w - uw^2)_{(j+1)} - (\epsilon^2-\delta^2)u_{t,(j+2)}]\,w_{(j)}\,dx\,d\tau. \qquad /33/$$

Сначала мы докажем лемму в случае $s=3$. При $j=0$ /33/ принимает вид

$$V_0(t)^2 = V_0(0)^2 - \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\{w^2[2uu_x - u_x w - uw_x] + 2(\epsilon^2-\delta^2)u_{xxt}w\}\,dx\,d\tau.$$

Для достаточно малых ϵ в силу следствий 1 и 2 $|2uu_x - u_x w - uw_x|$ и $\epsilon^{1/3}\|u_{xxt}\|$ ограничены на $[0,T]$ гранью, зависящей только от T и $\|g\|_3$. Следовательно,

$$V_0(t)^2 \le V_0(0)^2 + 2C\int_0^t [V_0(\tau)^2 + \epsilon^{5/3}V_0(\tau)]\,d\tau.$$

Интегрируя это неравенство, получаем $\|w\| \le V_0(t) \le V_0(0)\exp[CT] + \epsilon^{5/3}(\exp[CT]-1)$, $t\in[0,T]$, и так как $V_0(0)\le\|g_\delta - g\|_1 + \|g_\epsilon - g\|_1 \le C\epsilon^{1/3}$ /лемма 6/b//, то получаем

$$\|w\| \le C\epsilon^{1/3}. \qquad /34/$$

Из оценки /34/ вытекает, что $\{u_\epsilon\}$ является о.п. Коши в $\tilde W_T$. Интегрируя по частям в /33/ в случае $j=1$ и используя ограниченность для достаточно малых ϵ $|ww_x + 3uu_x - 3wu_x - uw_x|$, $|2u_x^2 + 2uu_{xx} - wu_{xx}|$ и $\epsilon^{1/2}\|u_{xxxt}\|$ (в силу следствия 1 и 2) и оценку /34/, получим интегральное неравенство для $V_1(\tau)$. После интегрирования этого неравенства получим

$$\|w_x\| \le V_1(t) \le V_1(0)\exp[CT] + \epsilon^{1/3}(\exp[CT]-1). \qquad /35/$$

Опять используя лемму 6, имеем $V_1(0)\le C\epsilon^{1/3}$, что вместе с /34/ и /35/ дает оценку

$$\|w\|_1 \le C\epsilon^{1/3}. \qquad /36/$$

Далее, при $j=2$

$$V_2(t)^2 = V_2(0)^2 - 2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}[(\tfrac{1}{3}w^3 + u^2 w - uw^2)_{xxx} - (\epsilon^2-\delta^2)u_{xxxxt}\,w_{xx}]\,dx\,d\tau. \qquad /37/$$

Из следствия 2 вытекает, что для достаточно малых ϵ имеем $\int_{-\infty}^{\infty}(\epsilon^2-\delta^2)u_{xxxxt}\,w_{xx}\,dx \le C\epsilon^{4/3}\|w_{xx}\|$. Дифференцируя и объединяя одинаковые члены в первой части подынтегральной функции в /37/, получаем $\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\{w_{xx}^2[(u-w)^2]_x - w_{xx}[6u_x u_{xx} w + 6u_x^2 w_x + 2uu_{xxx}w + 6uu_{xx}w_x - u_{xxx}w^2 - 6u_{xx}ww_x - 6u_x w_x^2]\}\,dx\,d\tau$. Оценивая этот интеграл при помощи оценок: $|[(u-w)^2]_x| \le C$, $|u|\le C$, $|u_x|\le C$, $|u_{xx}|\le C$, $\|u_{xxx}\|\le C$, $\|w_x\|\le C\epsilon^{1/3}$ и $|w|\le C\epsilon^{1/3}$, получаем аналогично тому, как это делалось раньше, $\|w_{xx}\| \le V_2(t) \le V_2(0)\exp[CT] + \epsilon^{1/3}(\exp[CT]-1)$, и так как $V_2(0)\le C\epsilon^{1/6}$ /лемма 6/, придем к неравенству

$$\|w_{xx}\| \le C\epsilon^{1/6}. \qquad /38/$$

Отметим, что в случае $s>3$ $V_2(0)\le C\epsilon^{1/3}$ и, следовательно, $\|w_{xx}\|\le C\epsilon^{1/3}$. Далее, при $j=3$

$$V_3(t)^2 = V_3(0)^2 - 2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}[(\tfrac{1}{3}w^3 + u^2 w - uw^2)_{xxxx}w_{xxx} - (\epsilon^2-\delta^2)u_{xxxxxt}w_{xxx}]\,dx\,d\tau. \qquad /39/$$

Из следствий 1 и 2, /34/, /36/ и /38/ вытекают оценки:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\epsilon^2-\delta^2)u_{xxxxxt}\,w_{xx}\,dx \le C\epsilon^{5/6}\|w_{xxx}\|,$$

$$|[(u-w)^2]_x| \le C, \ |u| \le C, \ |u_x| \le C, \ |u_{xx}| \le C, \ \|u_{xxx}\| \le C,$$

$$\|u_{xxxx}\| \le C\epsilon^{-1/6}, \ |w| \le C\epsilon^{1/3}, \ |w_x| \le C\epsilon^{1/6}, \ \|w_{xx}\| \le C\epsilon^{1/6},$$

$w_{xx}^2 \le \|w_{xx}\| \, \|w_{xxx}\|$. Оценивая при помощи этих оценок интеграл в /39/, получаем, как раньше,

$$\|w_{xxx}\| \le V_3(t) \le V_3(0)\exp[CT] + \epsilon^{1/6}(\exp[CT]-1).$$

С другой стороны, опять применяя лемму 6 и неравенство треугольника, имеем

$$V_3(0) \le \|h\|_3 + \delta\|h\|_4 \le \|g-g_\epsilon\|_3 + \|g-g_\delta\|_3 + \delta\|g_\delta\|_4 + \epsilon\|g_\epsilon\|_4$$

$$\le \|g-g_\epsilon\|_3 + \|g-g_\delta\|_3 + C\epsilon^{5/6}.$$

Отсюда видно, что $V_3(0)\to 0$ при $\epsilon\downarrow 0$, а следовательно, и $\|w_{xxx}\|\to 0$ при $\epsilon\downarrow 0$. Это вместе с /38/, /36/ и /34/ показывает, что $\{u_\epsilon\}$ является о.п. Коши в $\tilde{W}_T^s$ в случае $s=3$.

Утверждение леммы в случае $s>3$ будем доказывать по индукции. Мы доказали, что $\|w\|_2 \le C\epsilon^{1/3}$. Допустим, что в случае $j<s-1$, $\|w\|_{j-1} \le C\epsilon^{1/3}$ при $\epsilon\downarrow 0$. Из этого предположения следует, что при $0\le k\le j-2$ $|w_{(k)}| \le C\epsilon^{1/3}$ на $R\times[0,T]$. В силу следствия 1 $\|u\|_s \le C$ и $\|v\|_s \le C$ и, следовательно, при $0\le k\le s-1$ $|u_{(k)}|\le C$ и $|\tilde{w}_{(k)}| \le C$ на $R\times[0,T]$, кроме того, $\epsilon^{1/2}\|u_t\|_s \le C$ /следствие 2/.

Используя формулу Лейбница и интегрируя по частям, интеграл из /33/ можно привести к виду

$$\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\{ w_{(j)}^2 \left(\frac{2j+1}{2}\right)[(u-w)^2]_x + (\cdot)\,w_{(j)} \}\,dx\,d\tau .$$

Аналогично тому, что делалось раньше, это выражение можно оценить, используя индуктивное предположение. Окончательно получится оценка $\|w_{(j)}\| \le V_j(t) \le V_j(0)\exp[CT] + \epsilon^{1/3}(\exp[CT]-1)$, а отсюда, так как $V_j(0)\le C\epsilon^{1/3}$, имеем $\|w\|_j \le C\epsilon^{1/3} \Rightarrow \|w\|_{s-2}\le C\epsilon^{1/3}$. Делая аналогичные вычисления при $j=s-1$, находим, что $\|w\|_{s-1}\le C\epsilon^{1/6}$, а при $j=s$, используя ограниченность $\epsilon^{1/6}\|u\|_{s+1}$, $\epsilon^{1/3}\|u\|_{s+2}$ и $\epsilon^{7/6}\|u_{t,(s+2)}\|$, получим

$$\|w_{(s)}\| \le (\|g-g_\epsilon\|_s + \|g-g_\delta\|_s + C\epsilon^{1/3})\exp[CT] + \epsilon^{1/6}(\exp[CT]-1)$$

и, следовательно, $\|w_{(s)}\|\to 0$ при ϵ 0. Лемма доказана.

Следствие

$\{u_t(x,t,\epsilon)\}$ является о.п. Коши в $\tilde{W}_T^{s-3}$ при $\epsilon\downarrow 0$.

Доказательство

$$w_t = -[\frac{1}{3}w^3 + u^2 w - u w^2]_x - w_{xxx} + \delta^2 w_{xxt} + (\epsilon^2-\delta^2)u_{xxt} .$$

Первые два члена стремятся к нулю в $\tilde{W}_T^{s-3}$ при $\epsilon\downarrow 0$ в силу доказанной леммы, а сходимость последних двух членов к нулю в $\tilde{W}_T^{s-3}$ при $\epsilon\downarrow 0$ вытекает из следствия 2.

Теорема 1

Пусть $g\in W^s$, где $s\ge 3$. Тогда существует единственное решение $U(x,t)$ уравнения /1/, принадлежащее $\tilde{W}_T^s$, $0<T<\infty$, и $u(x,0)=g(x)$.

Доказательство

Единственность вытекает сразу из следующих стандартных вычислений. Допустим, что существуют два решения, u и v, и пусть $w=u-v$. Тогда

$$w_t + \frac{1}{3}[w(u^2+uv+v^2)]_x + w_{xxx} = 0, \quad w(x,0)=0. \qquad /40/$$

Умножая /40/ на w и интегрируя по R, получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} w^2\,dx = \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty}(u^2+uv+v^2)\,ww_x\,dx \le C\int_{-\infty}^{\infty} w^2(x,t)\,dx.$$

Отсюда $\int_{-\infty}^{\infty} w^2(x,t)\,dx=0$ для всех $t\ge 0$ и из непрерывности w вытекает, что $w\equiv 0$.

Существование решения нетрудно доказать в свете предыдущих рассмотрений. Пусть g_ϵ обозначает регуляризацию функции g, а $u_\epsilon(x,t)$ – соответствующее решение регуляризованной задачи /30/. В силу утверждения леммы 7 и ее следствия при $\epsilon\downarrow 0$ и $u_\epsilon\to u$ в $\tilde{W}_T^s$, $\partial_t u_\epsilon\to v$ в $\tilde{W}_T^{s-3}$. Отсюда вытекает, что $\partial_x(u_\epsilon^3)\to\partial_x(u^3)$ в $\tilde{W}_T^{s-1}$ и $\partial_{xxx}u_\epsilon\to\partial_{xxx}u$ в $\tilde{W}_T^{s-3}$. Из следствия 2 леммы 6 вытекает, что $\epsilon^2\partial_x^2\partial_t u_\epsilon\to 0$ в $\tilde{W}_T \Rightarrow \epsilon^2\partial_x^2\partial_t u_\epsilon\to 0$ в смысле распределений. Так как $u_\epsilon\to u$ в $\tilde{W}_T^s$, то $u_\epsilon\to u$ в смысле распределений и, следовательно, $\partial_t u_\epsilon\to\partial_t u$ и в смысле распределений и $v=u_t$. Таким образом, делая предельный переход в /30/, получаем, что в смысле распределений $u_t + u^2u_x + u_{xxx}=0$, $u(x,0)=g(x)$. Отсюда, так как $u\in\tilde{W}_T^s$ и $u_t\in\tilde{W}_T^{s-3}$, ясно, что $u(x,t)$ является L_2-решением задачи /1/, если $s=3$, и классический решением в случае $s>3$ /термин L_2-решения означает, что все члены в уравнении /1/ являются L_2-функциями от x и уравнение /1/ удовлетворяется для каждого t почти всюду по x /.

Пусть $u_N(x,t)$ обозначает решение /1/ на $R\times[0,N]$, где $N=1, 2, \ldots$. Определим на $R\times[0,\infty)$ функцию $u(x,t)=u_N(x,t)$ при $t\le N$. В силу единственности функция $u(x,t)$ корректно определена и представляет глобальное решение /1/, которое принадлежит $\tilde{W}_T^s$ для любого конечного T. Теорема доказана.

Известно[4], что для модифицированного уравнения Кортевега де Фриза существует бесконечная последовательность законов сохранения, которую можно записать в форме

$$I_k(u) = \int_{-\infty}^{\infty} P_k\,dx, \quad P_k = u_{(k)}^2 - c_k u^2 u_{(k-1)}^2 + Q_k(u_1,\ldots,u_{(k-2)}),$$

где $k=0,1,\ \ldots$; Q_k имеет ранг $k+1$. Согласно определению Миуры и др.[5] полиномиальный ранг для уравнения /1/ определяется следующим образом: ранг слагаемого $u_{(0)}^{a_0}u_{(1)}^{a_1}\ldots u_{(p)}^{a_p} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p}(1+i)a_i$ и ранг полинома является максимумом рангов своих слагаемых.

<u>Теорема 2</u>

Пусть $g\in W^s$, $s\geq 3$, и пусть $u(x,t)$ является соответствующим решением /1/ на $R\times[0,\infty)$. Тогда $I_k(u)$, $k=1,2,\ \ldots,\ s$, существуют и не зависят от времени.

<u>Доказательство</u>

Пусть $u_\epsilon(x,t)$ является решением регуляризованной задачи /30/. Для краткости вместо u_ϵ будем писать u.

$$\frac{dI_k}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{grad}\,P_k)\,u_t\,dx.$$

Сюда подставим $u_t = -u^2u_x - u_{xxx} + \epsilon^2 u_{xxt}$,

$$\frac{dI_k}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{grad}\,P_k)(-u^2u_x - u_{xxx})\,dx + \epsilon^2\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{grad}\,P_k)\,u_{xxt}\,dx. \qquad /41/$$

Однако по определению I_k произведение $(\mathrm{grad}\,P_k)(-u^2u_x - u_{xxx})$ является полным дифференциалом, и так как $u\in W^\infty$, для каждого t фиксированного

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{grad}\,P_k)(-u^2u_x - u_{xxx})\,dx = 0.$$

Тогда из /41/ вытекает, что

$$\frac{dI_k}{dt} = \epsilon^2\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\sum_{j=0}^{k-2}\frac{\partial Q_k}{\partial u_{(j)}}u_{t,(j+2)} + 2u_{(k)}u_{t,(k+2)}$$

$$-2c_k u\,u_{xxt}\,u_{(k-1)}^2 - 2c_k u^2 u_{t,(k+1)}u_{(k-1)}\Big\}dx. \qquad /42/$$

Интегрируя /42/ по частям, а потом по $[0,t]$, нетрудно получить равенство

$$J_k(u) = J_k(g_\epsilon) + \epsilon^2\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\sum_{j=0}^{k-2}\frac{\partial Q_k}{\partial u_{(j)}}u_{t,(j+2)} \qquad /43/$$

$$+2c_k[2uu_xu_{(k-1)}u_{t,(k)} - uu_{xxt}u_{(k-1)}^2 - 2uu_tu_{(k)}^2]\Big\}dx\,d\tau,$$

где

$$J_k(u) = \int_{-\infty}^{\infty}[(1-2\epsilon^2c_ku^2)u_{(k)}^2 + \epsilon^2u_{(k+1)}^2 - c_ku^2u_{(k-1)}^2 + Q_k]\,dx. \qquad /44/$$

В силу леммы 6 $J_k(g_\epsilon)\to I_k(g)$ при $\epsilon\downarrow 0$, $k=1,\ \ldots,\ s$. Кроме того, из следствия /1/ леммы 6 вытекает, что $J_k(u_\epsilon)\to I_k(u)$ при $\epsilon\downarrow 0$, $k=1,2,\ \ldots,\ s$, где u – решение уравнения 1, существующее в силу теоремы 1. Используя следствия 1 и 2 леммы 6, имеем, что интеграл в правой части формулы /43/ стремится к нулю при $\epsilon\downarrow 0$ Таким образом, переходя к пределу в /43/ при $\epsilon\downarrow 0$, получаем, что $I_k(u) = I_k(g)$, $k=1,2,\ \ldots,s$ для каждого t.

<u>Следствие</u>

Пусть $g\in W^s$, $s>3$, и пусть $u(x,t)$ является соответствующим решением /1/ на $R\times[0,\infty)$. Тогда $\|u\|_k$, $k=1,\ \ldots,\ s$, равномерно ограничены по $t\in[0,\infty)$.

<u>Доказательство</u>

$I_0(u) = \|u\|^2$ не зависит от времени. При $k=1$

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2\,dx = C_1 + \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty}u^4\,dx \leq C(1+\|u_x\|).$$

Из этого квадратного неравенства вытекает, что $\|u_x\|$ ограничены равномерно по t.

Допустим по индукции, что $\|u\|_{k-1}$ ограничена равномерно по t. Из этого предположения в силу леммы 1 следует, что $|u|,\ldots,|u_{(k-2)}|$ ограничены на $R\times[0,\infty)$, кроме того, из теоремы 2 вытекает, что $I_k(u)\equiv C$, $k=1,\ \ldots,\ s$, для всех $t\geq 0$. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_{(k)}^2\,dx = C + c_k\int_{-\infty}^{\infty}u^2u_{(k-1)}^2\,dx - \int_{-\infty}^{\infty}Q_k(u,\ldots,u_{(k-2)})\,dx. \qquad /45/$$

Оценивая /45/, в силу индуктивного предположения, получим, что $\|u_{(k)}\|$ ограничена равномерно по t.

Объединяя теорему 1 и следствие теоремы 2 и дифференцируя $\ell-1$ раз $(s-3\ell\geq 0)$ по t уравнение $u_t = u^2u_x + u_{xxx}$, получаем основной результат настоящей работы.

<u>Теорема 3</u>

Пусть $g\in W^s$, $s\geq 3$. Тогда существует единственное глобальное решение $u(x,t)$ задачи Коши /1/, которое принадлежит пространству $\tilde W_\infty^s$. Кроме того, если $s-3\ell\geq 0$, то $\partial_t^\ell u$ принадлежит $\tilde W_\infty^{s-3\ell}$.

§4. НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Пусть $g(x)\in W^s$, $s\geq 3$. Тогда, в силу теоремы 3 $U(g) = u(x,t)$ отображает W^s в пространство

$$X_{s,\infty} = \{u\in\tilde W_\infty^s :\ \partial_t^\ell u\in\tilde W_\infty^{s-3\ell},\quad s-3\ell\geq 0\}.$$

Простой пример показывает, что U не является непрерывным. Действительно, уравнение /1/ имеет решение вида уединенной волны $u_c(x,t) = \Phi_c(x-c^2 t) = c\sqrt{6}\,\mathrm{sech}[c(x-c^2 t)]$. Простые оценки показывают, что $\Phi_c \to \Phi_d$ в W^s при $c \to d$ в R.
А с другой стороны, нетрудно найти $\lim\limits_{t\to\infty} \| u_c - u_d \|^2 = \|\Phi_c\|^2 + \|\Phi_d\|^2$.
Следовательно, u_c не стремится к u_d в L_2 /а значит, и в W^s/ равномерно по $t \in [0, \infty)$.

Однако, если рассматривать конечный интервал времени, имеет место следующая

Теорема 4

Пусть $0 < T < \infty$ и пусть $u(x,t) = Ug : W^s \to X_{S,T}$, $g \in W^s$, $s \geq 3$, u - сужение на $[0,T]$ единственного глобального решения u уравнения /1/. Тогда U является непрерывным.

Доказательство

Отметим, что для этого достаточно доказать, что $U : W^s \to \tilde{W}^s_T$ является непрерывным. Из метода индукции и уравнения /1/ будет следовать, что $U : W^s \to X_{s,T}$ тоже является непрерывным.

Пусть $g_n \to g$ в $W^s, s \geq 3$. Необходимо показать, что $u^n = U(g_n) \to u = U(g)$ в $\tilde{W}^s_T$, или, другими словами, $\|u^n - u\|_s \to 0$ равномерно по $t \in [0,T]$. Имеем

$$\|u^n - u\|_s \leq \|u^n - u^n_\epsilon\|_s + \|u^n_\epsilon - u_\epsilon\|_s + \|u_\epsilon - u\|_s \,. \qquad /46/$$

Здесь u_ϵ и u^n_ϵ - решения регуляризованной задачи /2/ с гладкими g_ϵ и $g_{n\epsilon}$. Припоминая доказательство леммы 7, имеем оценку при $\delta \leq \epsilon$:

$$\|u_\delta - u_\epsilon\|_s \leq C\epsilon^{1/6} + C(\|g - g_\epsilon\|_s + \|g - g_\delta\|_s).$$

Устремляя $\delta \to 0$, в этом неравенстве получаем, что для $t \in [0,T]$

$$\|u - u_\epsilon\|_s \leq C(\epsilon^{1/6} + \|g - g_\epsilon\|_s), \quad \|u^n - u^n_\epsilon\|_s \leq C(\epsilon^{1/6} + \|g_n - g_{n\epsilon}\|_s). \qquad /47/$$

В доказательстве леммы 7 константы C зависели только от T и $\|g\|_s$, а так как $\|g_n\|_s \leq M$ ($g_n \to g$ W^s), в /47/ можно считать константу C не зависящей от n. В силу леммы 6 $\|g - g_\epsilon\|_s$ и $\|g_n - g_{n\epsilon}\|_s$, $n = 1,2, \ldots$, стремятся равномерно к нулю при $\epsilon \downarrow 0$. Тогда оценки /47/ показывают, что $\|u^n - u^n_\epsilon\| \to 0$, $\|u - u_\epsilon\| \to 0$ при $\epsilon \downarrow 0$ равномерно по $t \in [0,T]$ и по $n = 1,2, \ldots$ и, следовательно, из /46/ видно, что для того, чтобы получить утверждение теоремы, достаточно доказать, что $\|u^n_\epsilon - u_\epsilon\|_s \to 0$ при $n \to \infty$ для фиксированного ϵ равномерно по $t \in [0,T]$.

Доказательство этого факта подобно доказательству леммы 7. Применяя трансформацию /3/, сведем регуляризованную задачу /30/ к задаче

$$v_t + v_x + v^2 v_x - v_{xxt} = 0, \quad v(x,0) = h(x) = \epsilon g_\epsilon(x). \qquad /48/$$

Пусть v^n и v являются решениями /48/ соответственно для $h_n(x) = \epsilon g_{n\epsilon}(x)$ и $h(x) = \epsilon g_\epsilon(x)$. Тогда, если мы докажем, что $v^n \to v$ в $\tilde{W}^s_R$ для произвольного конечного R, то, обращая /3/ / ϵ - фиксированное/, получим, что $u^n_\epsilon \to u_\epsilon$ в $\tilde{W}^s_T$.

В силу леммы 6 $g_{n\epsilon} \to g_\epsilon$ в $\dot{W}^k$ для всех $k \geq 0$ /при $k > s$ сходимость зависит от ϵ /. Следовательно, $h_n, h \in W^\infty$ и $h_n \to h$ в W^k для всех $k \geq 0$. По доказанному $v^n, v \in \tilde{W}^{\infty,\infty}_R$ для всех $0 < R < \infty$. Умножим уравнение $v^n_t + v^n_x + (v^n)^2 v^n_x - v^n_{xxt} = 0$ на $v^n_{(2j)}$ и проинтегрируем по частям, получим

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} [(v^n_{(j)})^2 + (v^n_{(j+1)})^2]\,dx = -\frac{2}{3} \int_{-\infty}^{\infty} [(v^n)^3]_{(j+1)} (v^n)_{(j)}\,dx.$$

Отсюда, используя индукцию и правило Лейбница, аналогично тому, что делалось раньше, можно показать, что $\|v^n\|_k \leq C_n$, $t \in [0,R]$, где C_n зависят только от $\|h_n\|_k$ и R. Учитывая, что $h_n \to h$ в W^k для всех $k \geq 0$, получим

$$\|v^n\|_k \leq C, \quad t \in [0,R]. \qquad /49/$$

$w^n = v^n - v$ удовлетворяет следующее уравнение:

$$w^n_t + w^n_x + (w^n)^2 w^n_x + (vv^n w^n)_x - w^n_{xxt} = 0,$$
$$w^n(x,0) = h_n(x) - h(x) = f_n(x). \qquad /50/$$

Далее для краткости вместо w^n будем писать w. Умножая /50/ на $w_{(2j)}$, интегрируя по R и по $[0,t]$, после соответствующего интегрирования по частям получим

$$W_j(t) = W_j(0) + (-1)^{j+1} \cdot 2 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [w^2 w_x + (v^2 w)_x + (v w^2)_x]\, w_{(2j)}\, dx\, d\tau,$$

где

$$W_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [w^2_{(j)} + w^2_{(j+1)}]\,dx.$$

Интегрируя по частям и применяя формулу Лейбница, запишем:

$$\frac{dW_j}{dt} \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{k=0}^{j} \sum_{s=0}^{k} | w_{(j+1-k)} w_{(k-s)} w_{(s)} w_{(j)} |$$
$$+ \sum_{k=0}^{j+1} \sum_{s=0}^{k} (| w_{(j+1-k)} v_{(k-s)} v_{(s)} w_{(j)} | + | w_{(j+1-k)} w_{(k-s)} v_{(s)} w_{(j)} |)\Big]\,dx\,d\tau. \qquad /51/$$

Отметим, что в силу /49/ $\|w\|_k \leq C$, $t \in [0,R]$, причем C не зависит от n. /51/ в случае $j=0$ запишется в виде $dW_0/dt \leq C \sup| w v_x + 2 v v_x | \int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx \leq C W_0$. Отсюда $W_0(t) \leq W_0(0)\exp[Ct] \Rightarrow \|w^n\|_1 \leq \|f_n\|_1 \times \exp[CR]$ и, следовательно, $\|w^n\|_1 \to 0$ ($\|f_n\|_1 \to 0$) равномерно по $t \in [0,R]$.

Допуская индуктивно, что $\|w^n\|_j \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по $t \in [0,R]$, из /51/ получим, что

$$W_j(t)^{1/2} \leq W_j(0)^{1/2} \exp[CR] + a_n(\exp[CR]-1),$$

где $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда можем заключить, что $\|w^n\|_{j+1} \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по $t \in [0,R]$. Тогда по индукции следует, что $\|v^n - v\|_k = \|w^n\|_k \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно на ограниченном временном интервале для всех $k \geq 0$. Теорема доказана.

Отметим, что попутно мы доказали следующее утверждение:

Теорема 5

Рассмотрим задачу

$$u_t + u_x + u^2 u_x - u_{xxt} = 0, \qquad /52/$$
$$u(x,0) = g(x), \quad x \in R, \ t \geq 0.$$

Пусть $g(x) \in W^m$, $m \geq 2$. Тогда существует единственное решение $u(x,t)$ задачи /52/, которое принадлежит W_T^m для всех конечных T, а $\partial_t^\ell u \in \tilde{W}_T^{m+1}$ для всех $\ell > 0$. Решение u /соответственно $\partial_t^\ell u$) зависит непрерывно в $\tilde{W}_T^m$ /соответственно $\tilde{W}_T^{m+1}$ / от начальных данных g в W^m.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ablowitz M.J. et al. Studies Appl. Math., 1974, v. LIII, p. 249.
2. Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J. Phil.Trans. R. Soc. Lond. A, v. 272, p. 47.
3. Bona J.L., Smith R. Phil.Trans. R. Soc.Lond. A, v. 278, p. 555.
4. Kruskal M.D. et al. J.Math. Phys., 1970, 11, p. 952.
5. Miura R.M., Gardner C.S., Kruskal M.D. J. Math.Phys., 1968, 9, p. 1204.
6. Stein E.M. Singular integrals and differentiability properties of functions, Pronceton Mathematical Series No. 30, Princton, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 февраля 1981 года.