сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-81-13

В.Ц.Банчев

О ВЫБОРЕ ШАГА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПРИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ НЕПРЕРЫВНОГО АНАЛОГА МЕТОДА НЬЮТОНА

1981

Как известно, непрерывный аналог метода Ньютона сводит задачу решения нелинейной системы уравнений

$$F(x)=0 \qquad /1/$$

к решению задачи Коши для следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt}=\psi(x)\equiv -F'(x)^{-1}F(x), \quad x(0)=x^{\circ}, \quad t\geq 0, \qquad /2/$$

где $x\in R^{N}$, $F: R^{N}\to R^{N}$, а $F'(x)$ - производная Фреше оператора F, которая в этом случае задается матрицей Якоби оператора F. Цель настоящей заметки - показать, что при некоторых условиях использование обобщенных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений /1,2/ позволяет практически без дополнительных затрат машинного времени и памяти существенно увеличить шаг интегрирования системы /2/ по сравнению с обычными методами в достаточно малой окрестности решения /1/, т.е. при достаточно большом t.

Пусть x^* - единственное решение системы /1/ в некотором шаре $S(x^*, r)=\{x\in R^N \mid \|x-x^*\|\leq r\}$ и пусть в $S(x^*,r)$

$$\|\psi(x)-B(x-x^*)\|\leq q\|x-x^*\|, \qquad /3/$$

где $q\geq 0$ - достаточно малое число, а B - постоянная $N\times N$ - матрица с отрицательным верхним генеральным показателем γ /т.е. вещественные части собственных значений λ_i матрицы B удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\lambda_i\leq\gamma<0$, $i=1,\ldots,N$/. Тогда, если $\psi(x)$ удовлетворяет условию Липшица в $S(x^*,r)$, задача Коши /2/ имеет единственное решение $x(t,x^{\circ})$, такое, что

$$\|x(t,x^{\circ})-x^*\|\leq L\|x^{\circ}-x^*\|\exp(-\nu t),\ 0<\nu\leq-\gamma,\ L>0, \qquad /4/$$

для $t\geq 0$ и $x^{\circ}\in S(x^*,\rho)$ при некотором $\rho>0$ /3/. В частности, если оператор $\psi(x)$ непрерывно дифференцируем по Фреше и $\psi'(x^*)$ имеет отрицательный верхний генеральный показатель, условие /3/ выполняется с $B=\psi'(x^*)$, $q\to 0$ при $\|x-x^*\|\to 0$, а /4/ справедливо с ν, сколь угодно близким к $-\gamma$, при достаточно малом ρ /3/. Если, кроме того,

$$\|F'(x)^{-1}\|\leq M \text{ в } S(x^*,r) \text{ и } F''(x^*) \text{ ограничена}, \qquad /5/$$

то $\psi'(x^*) = -E$ /E - единичная матрица/ и $\nu = -\gamma = 1$ при достаточно малом ρ [4,5].

Для $0 = t_0 < t_1 < \ldots < +\infty$ обозначим через $x^k / x^\circ \in S(x^*, \rho)$ / приближения к значениям $x(t_k), k = 0,1,\ldots, x(t_0) = x^\circ$, решения задачи Коши /2/, полученные с помощью какого-нибудь численного метода. Пусть e_k - локальная погрешность [9, с.26] этого метода на k-м шаге интегрирования /2/ /в работах [1,2,6,7] под локальной ошибкой усечения мы подразумевали локальную погрешность/ и $h_k = t_{k+1} - t_k$ $(k = 0,1,\ldots)$. Тогда, если

$$\| e_k \| \le \beta \exp(-\nu h_k) \| x^{k+1} - x^k \|, \qquad 0 \le \beta < 1/2, \tag{6}$$

$$h_k > \ln(2L + 1)/\nu, \tag{7}$$

используя /4/, получаем

$$\| x^{k+1} - x^* \| < \delta_k \| x^k - x^* \|, \quad k = 0,1,\ldots, \tag{8}$$

где $\delta_k = (2L+1)\exp(-\nu h_k) < 1$ и $\lim_{k\to\infty} x^k = x^*$.

Остановимся теперь на применении обобщенных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений [1,2,6] для решения задачи Коши /2/. Напомним, что, используя преобразование

$$z(t) = T(t)x(t) - \int_0^t T(s)a(s)\,ds$$

с матрицей $T(t)$, удовлетворяющей уравнению $T' = -TA(t)$, $T(0) = E$, эти методы сводят решение задачи /2/ к интегрированию системы

$$\frac{dz}{dt} = \phi(t, x(z)) = T(t)[\psi(x(z)) - A(t)x(z) - a(t)],$$
$$z(0) = x^\circ, \tag{9}$$

обычными численными методами /например, методами Рунге-Кутта или Адамса/. При этом произвольные пока $N \times N$ -матрица $A(t)$ и N -мерный вектор $a(t)$ интегрируемы в смысле Римана в любом конечном интервале $0 \le t \le t_f < +\infty$. Заметим, что в /9/

$$x = T^{-1}(t)[z + \int_0^t T(s)a(s)\,ds],$$

где $(T^{-1})' = A(t)T^{-1}$, $T^{-1}(0) = E$, является решением /2/. Как и выше, через z^k / $k = 0, 1, \ldots$ / обозначим приближения к значениям $z(t_k)$, полученные при численном интегрировании /9/, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < +\infty$. Пусть z^k соответствуют приближения x^k к значениям $x(t_k)$. Выберем $A(t) = \psi'(x^*)$ и $a(t) = \psi(x^k) - \psi'(x^*)x^k$ при $t \in [t_k, t_{k+1}]$/ $k = 0, 1, \ldots$ /. Тогда $T(t) = \exp[-\psi'(x^*)t]$ и, в частности, если выполнено условие /5/, $T(t) = \exp(Et)$. В дальнейшем будем предполагать, что оператор $\psi(x)$ дважды непрерывно дифференцируем по Фреше в $S(x^*, \rho)$ и, кроме того, на k-ом шаге локальная погрешность r_k выбранного нами метода для интегрирования /9/ удовлетворяет неравенству

$$\| r_k \| \le \| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(s, x(s))\,ds \|,$$

где $x(t)$ - решение уравнения /2/ с $x(t_k) = x^k$. Если выполнено условие /8/ с $\delta_k < 1$, для локальной погрешности соответствующего обобщенного метода интегрирования /2/ на том же шаге имеем оценку

$$\| e_k \| \le \epsilon_k \| x^{k+1} - x^k \|, \tag{10}$$

$$\epsilon_k \to 0 \quad \text{при} \quad \| x^{k+1} - x^k \| \to 0.$$

Таким образом, если справедливо /5/, использование обобщенных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет увеличить шаг интегрирования и тем самым существенно улучшить сходимость последовательности $\{x^k\}$, полученной с помощью непрерывного аналога метода Ньютона и удовлетворяющей условиям /6/-/8/, в достаточно малой окрестности решения системы /1/. Это приводит к уменьшению необходимых затрат машинного времени практически без использования дополнительной памяти, так как $\psi'(x^*) = -E$.

Заметим, что все полученные здесь результаты остаются справедливыми и в случае непрерывного аналога регуляризованного метода Ньютона [8]

$$\frac{dx}{dt} = \psi(t, x) \equiv -[F'(x) + \alpha(t, x)]^{-1} F(x), \quad x(0) = x^\circ, \tag{11}$$

если матрица $\alpha(t, x)$ такая, что оператор $\psi(t, x)$ удовлетворяет указанным выше условиям для $\psi(x)$ равномерно по t [3].

Проведенные численные эксперименты с помощью программы GERUN [7], в которой реализован обобщенный явный метод Рунге-Кутта, потвердили приведенные выше результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Банчев В.Ц. Докл. БАН, 1979, т. 32, №5, с. 583-586.
2. Банчев В.Ц. ОИЯИ, Р5-12174, Дубна, 1979.
3. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. "Наука", М., 1970.

4. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Докл. АН СССР, 1976, т. 231, №5, с. 1052-1055.
5. Альбер Я.И. Непрерывные процессы ньютоновского типа. Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, №11, с. 1931-1945.
6. Банчев В.Ц. Докл. БАН, 1979, т. 32, №6, с. 725-728.
7. Банчев В.Ц. ОИЯИ, Р5-12856, Дубна, 1979.
8. Александров Л. Регуляризованные траектории приближения ньютоновского типа для решения нелинейных уравнений. Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, №7, с. 1281-1292.
9. Холл Дж., Уатт Дж. /ред./ Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М., "Мир", 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 января 1981 года.