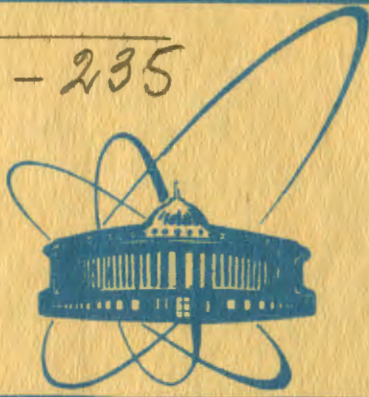


Б-235



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
Дубна

2209 / 2-81

11/5-81

P5-81-13

В.Ц.Банчев

О ВЫБОРЕ ШАГА ИНТЕГРИРОВАНИЯ
ПРИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ
НЕПРЕРЫВНОГО АНАЛОГА МЕТОДА НЬЮТОНА

1981

Как известно, непрерывный аналог метода Ньютона сводит задачу решения нелинейной системы уравнений

$$F(x) = 0 \quad /1/$$

к решению задачи Коши для следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \psi(x) \equiv -F'(x)^{-1} F(x), \quad x(0) = x^0, \quad t \geq 0, \quad /2/$$

где $x \in \mathbb{R}^N$, $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, а $F'(x)$ - производная Фреше оператора F , которая в этом случае задается матрицей Якоби оператора F . Цель настоящей заметки - показать, что при некоторых условиях использование обобщенных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений ^{1,2/} позволяет практически без дополнительных затрат машинного времени и памяти существенно увеличить шаг интегрирования системы ^{2/} по сравнению с обычными методами в достаточно малой окрестности решения ^{1/}, т.е. при достаточно большом t .

Пусть x^* - единственное решение системы ^{1/} в некотором шаре $S(x^*, r) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x - x^*\| \leq r\}$ и пусть в $S(x^*, r)$

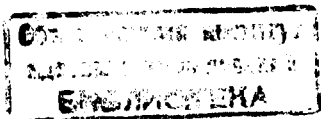
$$\|\psi(x) - V(x - x^*)\| \leq q \|x - x^*\|, \quad /3/$$

где $q \geq 0$ - достаточно малое число, а V - постоянная $N \times N$ -матрица с отрицательным верхним генеральным показателем γ /т.е. вещественные части собственных значений λ_i матрицы удовлетворяют условию $\text{Re} \lambda_i \leq \gamma < 0$, $i = 1, \dots, N$ /. Тогда, если $\psi(x)$ удовлетворяет условию Липшица в $S(x^*, r)$, задача Коши ^{2/} имеет единственное решение $x(t, x^0)$, такое, что

$$\|x(t, x^0) - x^*\| \leq L \|x^0 - x^*\| \exp(-\nu t), \quad 0 < \nu \leq -\gamma, \quad L > 0, \quad /4/$$

для $t \geq 0$ и $x^0 \in S(x^*, \rho)$ при некотором $\rho > 0$ ^{3/}. В частности, если оператор $\psi(x)$ непрерывно дифференцируем по Фреше и $\psi'(x^*)$ имеет отрицательный верхний генеральный показатель, условие ^{3/} выполняется с $V = \psi'(x^*)$, $q \rightarrow 0$ при $\|x - x^*\| \rightarrow 0$, а ^{4/} справедливо с ν , сколь угодно близким к $-\gamma$, при достаточно малом ρ ^{3/}. Если, кроме того,

$$\|F'(x)^{-1}\| \leq M \quad \text{в } S(x^*, r) \quad \text{и } F''(x^*) \text{ ограничена,} \quad /5/$$



то $\psi'(x^*) = -E/E$ - единичная матрица/ и $\nu = -\gamma = 1$ при достаточно малом ρ /4.5/.

Для $0 = t_0 < t_1 < \dots < +\infty$ обозначим через $x^k/x^0 \in S(x^*, \rho)$ /приближения к значениям $x(t_k), k = 0, 1, \dots, x(t_0) = x^0$, решения задачи Коши /2/, полученные с помощью какого-нибудь численного метода. Пусть e_k - локальная погрешность /9, с. 28/ этого метода на k -м шаге интегрирования /2/ /в работах /1, 2, 6, 7/ под локальной ошибкой усечения мы подразумевали локальную погрешность/ и $h_k = t_{k+1} - t_k (k = 0, 1, \dots)$. Тогда, если

$$\|e_k\| \leq \beta \exp(-\nu h_k) \|x^{k+1} - x^k\|, \quad 0 \leq \beta < 1/2, \quad /6/$$

$$h_k > \ln(2L+1) / \nu, \quad /7/$$

используя /4/, получаем

$$\|x^{k+1} - x^k\| < \delta_k \|x^k - x^k\|, \quad k = 0, 1, \dots, \quad /8/$$

где $\delta_k = (2L+1) \exp(-\nu h_k) < 1$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$.

Остановимся теперь на применении обобщенных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений /1, 2, 6/ для решения задачи Коши /2/. Напомним, что, используя преобразование

$$z(t) = T(t)x(t) - \int_0^t T(s)a(s)ds$$

с матрицей $T(t)$, удовлетворяющей уравнению $T' = -TA(t), T(0) = E$, эти методы сводят решение задачи /2/ к интегрированию системы

$$\frac{dz}{dt} = \phi(t, x(z)) = T(t) [\psi(x(z)) - A(t)x(z) - a(t)], \quad /9/$$

$$z(0) = x^0,$$

обычными численными методами /например, методами Рунге-Кутты или Адамса/. При этом произвольные пока $N \times N$ -матрица $A(t)$ и N -мерный вектор $a(t)$ интегрируемы в смысле Римана в любом конечном интервале $0 \leq t \leq t_1 < +\infty$. Заметим, что в /9/

$$x = T^{-1}(t) [z + \int_0^t T(s)a(s)ds],$$

где $(T^{-1})' = A(t)T^{-1}, T^{-1}(0) = E$, является решением /2/. Как и выше, через $z^k/k = 0, 1, \dots$ /обозначим приближения к значениям $z(t_k)$, полученные при численном интегрировании /9/, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < +\infty$. Пусть z^k соответствуют приближения x^k к значениям $x(t_k)$. Выберем $A(t) = \psi'(x^*)$ и $a(t) = \psi(x^k) - \psi'(x^*)x^k$ при $t \in [t_k, t_{k+1}] /k = 0, 1, \dots$ /. Тогда $T(t) = \exp[-\psi'(x^*)t]$ и, в частности, если выполнено условие /5/, $T(t) = \exp(Et)$. В даль-

нейшем будем предполагать, что оператор $\psi(x)$ дважды непрерывно дифференцируем по Фреше в $S(x^*, \rho)$ и, кроме того, на k -ом шаге локальная погрешность r_k выбранного нами метода для интегрирования /9/ удовлетворяет неравенству

$$\|r_k\| \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi(s, x(s)) ds,$$

где $x(t)$ - решение уравнения /2/ с $x(t_k) = x^k$. Если выполнено условие /8/ с $\delta_k < 1$, для локальной погрешности соответствующего обобщенного метода интегрирования /2/ на том же шаге имеем оценку

$$\|e_k\| \leq \epsilon_k \|x^{k+1} - x^k\|, \quad /10/$$

$$\epsilon_k \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|x^{k+1} - x^k\| \rightarrow 0.$$

Таким образом, если справедливо /5/, использование обобщенных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет увеличить шаг интегрирования и тем самым существенно улучшить сходимость последовательности $\{x^k\}$, полученной с помощью непрерывного аналога метода Ньютона и удовлетворяющей условиям /6/-/8/, в достаточно малой окрестности решения системы /1/. Это приводит к уменьшению необходимых затрат машинного времени практически без использования дополнительной памяти, так как $\psi'(x^*) = -E$.

Заметим, что все полученные здесь результаты остаются справедливыми и в случае непрерывного аналога регуляризованного метода Ньютона /8/

$$\frac{dx}{dt} = \psi(t, x) = -[F'(x) + a(t, x)]^{-1} F(x), \quad x(0) = x^0, \quad /11/$$

если матрица $a(t, x)$ такая, что оператор $\psi(t, x)$ удовлетворяет указанным выше условиям для $\psi(x)$ равномерно по t /3/.

Проведенные численные эксперименты с помощью программы GERUN /77/, в которой реализован обобщенный явный метод Рунге-Кутты, подтвердили приведенные выше результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Банчев В.Ц. Докл. БАН, 1979, т. 32, №5, с. 583-586.
2. Банчев В.Ц. ОИЯИ, Р5-12174, Дубна, 1979.
3. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. "Наука", М., 1970.

4. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Докл. АН СССР, 1976, т. 231, №5, с. 1052-1055.
5. Альбер Я.И. Непрерывные процессы ньютоновского типа. Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, №11, с. 1931-1945.
6. Банчев В.Ц. Докл. БАН, 1979, т. 32, №6, с. 725-728.
7. Банчев В.Ц. ОИЯИ, Р5-12856, Дубна, 1979.
8. Александров Л. Регуляризованные траектории приближения ньютоновского типа для решения нелинейных уравнений. Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, №7, с. 1281-1292.
9. Холл Дж., Уатт Дж. /ред./ Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М., "Мир", 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 января 1981 года.