сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-80-886

Р.Д.Лазаров, Е.А.Вырбанова

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

1980

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются некоторые автомодельные решения связанной задачи термоупругости.

Отличительное свойство автомодельности решения состоит в том, что профили исследуемых величин с течением времени остаются подобными самим себе, меняясь только за счет изменения их масштабов. Таким образом, автомодельное решение сохраняет основные качественные черты решения. Поэтому, с одной стороны, оно дает возможность провести качественный анализ решения, а с другой - может использоваться в качестве теста для проверки точности численных методов расчета задач термоупругости на ЭВМ.

При изучении автомодельных решений в одномерных задачах вместо двух переменных, координаты и времени, появляется одна независимая переменная и система уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Это упрощает задачу с математической точки зрения и в ряде случаев позволяет находить точные аналитические решения. Автомодельные решения задач термоупругости рассмотрены в /2,3/.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Безразмерные уравнения связанной термоупругости при наличии массовых сил $F_1(x,t)$ и источников тепла $F_2(x,t)$ имеют вид /1/:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} = F_1(x,t)\,,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = F_2(x,t)\,. \qquad /1.1/$$

Здесь u, θ, k, x, t - соответственно безразмерные перемещения, температура, коэффициент теплопроводности, координата, время; $a_1 = (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0/(\lambda + 2\mu)$, $a_2 = (3\lambda + 2\mu)\alpha/c\rho$, где λ, μ - постоянные Ламе, α - коэффициент линейного теплового расширения, ρ - плотность среды, c - теплоемкость единицы массы,

T_0 – температура естественного состояния. Безразмерные величины связаны с размерными u_1, θ_1, k_1, x_1, t_1 следующими соотношениями:

$$u=\left(\frac{V}{\kappa}\right)u_1,\qquad x=\left(\frac{V}{\kappa}\right)x_1,\qquad t=\left(\frac{V^2}{\kappa}\right)t_1,$$

$$\theta=\theta_1/T_0,\ k(\theta)=k_1(\theta_1)/k_0=\begin{cases}\theta^m, & \text{если } k_1(\theta_1)=\left(\dfrac{k_0}{T_0^m}\right)\theta_1^m,\\ 1, & \text{если } k_1=k_0=\mathrm{const},\end{cases}$$

где $\kappa=\dfrac{k_0}{c\rho}$, $\quad V^2=(\lambda+2\mu)/\rho$.

§2. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ТИПА "БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ"

2.1. Рассмотрим случай, когда коэффициент теплопроводности $k(\theta)$ зависит от температуры по степенному закону $k(\theta)=\theta^m$, $m>0$, $m=\mathrm{const}$. Система уравнений /1.1/ принадлежит к смешанному гиперболо-параболическому типу. Такие уравнения допускают решения, представляющие собой волны постоянного профиля. Математически эти решения зависят от x и t через переменную $s=x-Dt$, где D – постоянная скорость волны. Займемся поиском таких решений.

Функции перемещения $u(x,t)$ и температуры $\theta(x,t)$ будем искать в виде

$$u(x,t)=u(s),\qquad \theta(x,t)=\theta(s),\qquad s=x-Dt,\quad D=\mathrm{const}. \qquad /2.1/$$

Выражая производные по x и t через производные по s, сведем систему уравнений в частных производных /1.1/ к системе "автомодельных уравнений":

$$(D^2-1)\frac{d^2u}{ds^2}+a_1\frac{d\theta}{ds}=F_1,$$

$$D\frac{d\theta}{ds}+\frac{d}{ds}\left(\theta^m\frac{d\theta}{ds}\right)+a_2D\frac{d^2u}{ds^2}=-F_2. \qquad /2.2/$$

В решения с постоянным профилем волны могут входить только массовые силы и источники тепла, которые являются функциями от s. Проинтегрируем систему /2.2/ и подставим $\dfrac{du}{ds}$ из первого уравнения во второе. Получим (при $|D|\neq 1$):

$$\frac{du}{ds}=-\frac{a_1}{D^2-1}\theta+\frac{1}{D^2-1}\int F_1\,ds+\frac{C_1}{D^2-1},$$

$$\theta^m\frac{d\theta}{ds}=\frac{D(a_1a_2+1-D^2)}{D^2-1}\theta-\frac{a_2D}{D^2-1}\int F_1\,ds-\int F_2\,ds+\frac{a_2C_1D}{D^2-1}+C_2. \qquad /2.3/$$

Рассмотрим случай, когда $F_1\equiv 0$, $F_2\equiv 0$. Введем обозначения:

$$A=\frac{D(a_1a_2+1-D^2)}{D^2-1},\qquad B=C_2-\frac{a_2C_1D}{D^2-1}. \qquad /2.4/$$

Интегрируя второе уравнение /2.3/, получим

$$s+C_3=\int\frac{\theta^m d\theta}{A\theta+B}, \qquad /2.5/$$

откуда $\theta=\theta(s)$. Подставим $\theta(s)$ в первое из уравнений /2.3/ и проинтегрируем:

$$u+C_4=\frac{C_1}{D^2-1}s-\frac{a_1}{D^2-1}\int\theta(s)\,ds. \qquad /2.6/$$

Значения констант интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 будут определяться из условий для среды на фронте термоупругой волны.

Рассмотрим частный случай постоянного фона с нулевой температурой. В этом случае существует конечный фронт у тепловой волны [4,5]. Будем считать, что среда перед фронтом волны недеформирована. Пусть автомодельная координата фронта $s=0$. Тогда

$$\theta(0)=0,\qquad \left(\theta^m\frac{d\theta}{ds}\right)_{s=0}=0,$$

$$u(0)=u_0,\qquad \left(\frac{du}{ds}\right)_{s=0}=0. \qquad /2.7/$$

Подстановка этих условий при $s=0$ в уравнения /2.3/ /при $F_1=F_2=0$/ дает $C_1\equiv 0$, $C_2\equiv 0$. Теперь система уравнений /2.3/ принимает вид:

$$\frac{du}{ds}=-\frac{a_1}{D^2-1}\theta,$$

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{D(a_1a_2+1-D^2)}{D^2-1}\theta^{1-m}. \qquad /2.8/$$

Из второго уравнения /2.8/ следует, что скорость волны D должна удовлетворять условию

$$\frac{a_1a_2+1-D^2}{D^2-1}<0,$$

т.е.

$$D\in\{(0;\,1)\cup(\sqrt{1+a_1a_2}\,;\;+\infty\}. \qquad /2.9/$$

Интегрируя второе уравнение /2.8/ с учетом условий /2.7/, получим профиль температуры:

$$\theta(s)=\left[\frac{mD(a_1a_2+1-D^2)}{D^2-1}s\right]^{1/m} . \qquad /2.10/$$

Теперь подставим $\theta(s)$ в первое уравнение /2.8/ и проинтегрируем его при условиях /2.7/. Получим профиль перемещения:

$$u(s)=u_0-\frac{a_1}{D(m+1)(a_1a_2+1-D^2)}\left[\frac{mD(a_1a_2+1-D^2)}{D^2-1}s\right]^{1/m+1} . \qquad /2.11/$$

Из первого уравнения /2.8/ получаем напряжение

$$\sigma_{xx}=\frac{du}{ds}-a_1\theta=\frac{a_1D^2}{1-D^2}\theta(s), \qquad /2.12/$$

откуда следует, что $\sigma_{xx}>0$ при $0<D<1$ /волна роста напряжений/ и $\sigma_{xx}<0$ при $D>\sqrt{1+a_1a_2}$ /волна падения напряжений/.

Найденное аналитическое решение /2.10/, /2.11/, /2.12/ реализуется при задании класса граничных режимов на границе $x=0$ для задачи, описываемой уравнениями /1.1/ и начальными данными /2.7/. Эти граничные условия определяются из /2.10/, /2.11/ подстановкой $s=-Dt$. Такое решение может служить хорошим тестом для разностных методов расчета задач термоупругости.

Исследование бегущих волн играет большую роль в задачах гидродинамики с нелинейной теплопроводностью, см. [6-8].

2.2. В случае линейной задачи ($k_1=k_0=\mathrm{const}$) связанной термоупругости при отсутствии источников тепла и силовой нагрузки, переходя к автомодельной переменной $s=x-Dt$, получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}(D^2-1)\dfrac{du}{ds}+a_1\dfrac{d\theta}{ds}=0,\\[2ex] \dfrac{d^2\theta}{ds^2}+D\dfrac{d\theta}{ds}+a_2D\dfrac{d^2u}{ds^2}=0.\end{cases} \qquad /2.13/$$

Общее решение системы /2.13/ дается формулами

$$\theta(s)=-A^{-1}(B+e^{As+C_3}), \qquad /2.14/$$

$$u(s)=E_2e^{As+C_3}+E_1s+C_1,$$

где постоянные A, B имеют вид /2.4/, а

$$E_1=\frac{C_1+a_1BA^{-1}}{D^2-1},\quad E_2=-\frac{a_1}{(D^2-1)A^2}\quad (|D|\neq 1).$$

При условиях на бесконечности

$$\theta(s_0)\to\theta_0,\ \frac{d\theta}{ds}(s_0)\to 0,\ \ u(s_0)\to u_0,\ \ \frac{du}{ds}(s_0)\to 0,\ s_0\to\infty \qquad /2.15/$$

из /2.14/ получаем частное решение

$$\theta(s)=\theta_0-A^{-1}e^{As},$$
$$u(s)=u_0+E_2e^{As}. \qquad /2.16/$$

Для того, чтобы выполнялись условия /2.15/, необходимо, чтобы $A<0$ и, следовательно, скорость волны D должна удовлетворять условию /2.9/, полученному в п. 2.1 при исследовании задачи с нелинейностью в теплопроводности.

Решение /2.16/ дает стационарную структуру термоупругой волны в среде с постоянным коэффициентом теплопроводности, см. [9].

§3. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ТИПА $\xi=\dfrac{x}{at^n}$. ОБОБЩЕННОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим систему уравнений /1.1/ при $F_1=0$, $F_2=0$ и $k(\theta)=\theta^m$, $m>0$. Будем искать автомодельные решения в виде

$$\theta(x,t)=\ell_1(t)\,\tilde\theta(\xi),\quad u(x,t)=\ell_2(t)\,\tilde u(\xi),\quad \xi=x\phi^{-1}(t), \qquad /3.1/$$

где функции $\tilde\theta(\xi)$, $\tilde u(\xi)$ – новые, безразмерные функции автомодельной переменной ξ, для которых следует составить дифференциальные уравнения. Зависимость функций $\ell_1(t)$, $\ell_2(t)$, $\phi(t)$ от времени пока неизвестна.

Подставим выражения /3.1/ в уравнения /1.1/. В результате после некоторых преобразований получим уравнения:

$$\ddot\ell_2(t)\,\tilde u(\xi)+\phi^{-1}(t)\,\ell_2(t)\left[2\phi^{-1}(t)\,\dot\phi^2(t)-2\dot\phi(t)\frac{\dot\ell_2(t)}{\ell_2(t)}-\ddot\phi(t)\right]\xi\frac{d\tilde u}{d\xi}+$$
$$+\phi^{-2}(t)\,\ell_2(t)\left[\xi^2\dot\phi^2(t)-1\right]\frac{d^2\tilde u}{d\xi^2}+a_1\phi^{-1}(t)\,\ell_1(t)\frac{d\tilde\theta}{d\xi}=0,$$

$$\dot{\ell}_1(t)\,\tilde{\theta}(\xi) - \phi^{-1}(t)\,\dot{\phi}(t)\,\ell_1(t)\,\xi\frac{d\tilde{\theta}}{d\xi} - \phi^{-2}(t)\,\ell_1^{m+1}(t)\,\frac{d}{d\xi}[\tilde{\theta}^m(\xi)\,\frac{d\tilde{\theta}}{d\xi}] +$$

$$+ a_2\phi^{-1}(t)\,[\dot{\ell}_2(t) - \ell_2(t)\,\phi^{-1}(t)\,\dot{\phi}(t)]\,\frac{d\tilde{u}}{d\xi} - a_2\phi^{-2}(t)\,\dot{\phi}(t)\,\ell_2(t)\,\xi\frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2} = 0 \qquad /3.2/$$

/точкой обозначено дифференцирование по времени/.

Для того, чтобы представление /3.1/ имело смысл и можно было написать дифференциальные уравнения для новых неизвестных функций $\tilde{\theta}(\xi)$, $\tilde{u}(\xi)$, необходимо, чтобы переменные t и ξ в уравнениях /3.2/ разделились. Такой прием был предложен в работе [10]. Для этого в первом уравнении /3.2/ следует положить

$$\xi^2\dot{\phi}^2(t) - 1 = v(\xi),$$

откуда

$$\dot{\phi}(t) = A_1 = \text{const}, \qquad \phi(t) = A_1 t + A_0 \qquad \text{при} \quad A_1 \neq 0. \qquad /3.3/$$

Разделим первое уравнение /3.2/ на $\phi^{-2}(t)\ell_2(t)$, а второе - на $\phi^{-2}(t)\,\ell_1^{m+1}(t)$ и учтем условие /3.3/. Положим

$$\frac{\phi(t)}{\ell_1^m(t)} = B_1, \qquad \frac{\ell_2(t)}{\ell_1^{m+1}(t)} = B_2,$$

B_1, B_2 - произвольные параметры разделения переменных. Тогда все остальные члены в полученных уравнениях, зависящие от t, при этом превращаются в константы. Таким образом, автомодельная переменная ξ и функции $\ell_1(t)$, $\ell_2(t)$ в автомодельном решении /3.1/ имеют вид

$$\xi = \frac{x}{A_1 t + A_0}, \qquad \ell_1(t) = [B_1^{-1}(A_1 t + A_0)]^{1/m},$$

$$\ell_2(t) = B_2[B_1^{-1}(A_1 t + A_0)]^{1/m+1}. \qquad /3.4/$$

Если положить $A_1 = 1$, $A_0 = 0$, то они будут зависеть от времени по степенному закону:

$$\xi = \frac{x}{t}, \qquad \ell(t) = (B_1^{-1}t)^{1/m}, \qquad \ell_2(t) = B_2(B_1^{-1}t)^{1/m+1}. \qquad /3.5/$$

Уравнения /3.2/ превращаются теперь в систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $\tilde{u}(\xi)$, $\tilde{\theta}(\xi)$:

$$(A_1\xi^2 - 1)\frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2} - \frac{2A_1^2}{m}\xi\frac{d\tilde{u}}{d\xi} + \frac{A_1^2}{m^2}(m+1)\,\tilde{u}(\xi) + \frac{a_1B_1}{B_2}\,\frac{d\tilde{\theta}}{d\xi} = 0,$$

$$\frac{d}{d\xi}[\tilde{\theta}(\xi)\,\frac{d\tilde{\theta}}{d\xi}] - \frac{A_1B_1(a_1a_2+1-A_1^2\xi^2)}{A_1^2\xi^2-1}\,\xi\frac{d\theta}{d\xi} - \frac{A_1B_1}{m}\tilde{\theta}(\xi) +$$

$$+ \frac{a_2A_1B_2(A_1^2\xi^2+1)}{m(A_1^2\xi^2-1)}\,\frac{d\tilde{u}}{d\xi} - \frac{A_1^3B_2(m+1)\,a_2}{m^2(A_1^2\xi^2-1)}\,\xi\tilde{u}(\xi) = 0. \qquad /3.6/$$

Аналогичным путем преобразуются и начальные, и граничные условия, которые превращаются в краевые условия для функций $\tilde{u}(\xi)$, $\tilde{\theta}(\xi)$.

Пусть при $x = 0$ перемещение и температура изменяются по законам

$$u(0,t) = \ell_1(t), \qquad \theta(0,t) = \ell_2(t), \qquad /3.7/$$

а относительно начального состояния среды предположим, что

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad \theta(x,0) = 0. \qquad /3.8/$$

Тогда краевые условия для системы уравнений /3.6/ будут

$$\tilde{u}(0) = 1, \qquad \tilde{\theta}(0) = 1, \qquad /3.9/$$

$$\tilde{u}(\xi_0) = 0, \qquad \frac{d\tilde{u}}{d\xi}(\xi_0) = 0, \qquad \tilde{\theta}(\xi_0) = 0. \qquad /3.10/$$

Значение автомодельной переменной ξ_0 заранее неизвестно. Положение фронта волны по массе в любой момент времени определяется в соответствии с первой из формул /3.4/ или /3.5/:

$$x_\text{ф} = \xi_0(A_1 t + A_0) \qquad \text{или} \qquad x_\text{ф} = \xi_0 t, \qquad /3.11/$$

а массовая скорость фронта вычисляется по формуле

$$D = \frac{dx_\text{ф}}{dt} = A_1\xi_0 \qquad \text{или} \qquad D = \xi_0. \qquad /3.12/$$

Для системы /3.6/ не удается получить аналитического решения. Здесь можно провести численное интегрирование. Так как эта система второго порядка, необходимо иметь не только значения искомых функций $\tilde{u}$, $\tilde{\theta}$ на фронте, но и значения их первых производных. Если удастся найти разложения функций $\tilde{u}, \tilde{\theta}$ вблизи фронта ξ_0, то мы могли бы решать задачу справа от точки $\xi_1 = \xi_0 - 0$, где значения функций и их производных будут известны.

Вернемся к формуле /3.12/, из которой видно, что скорость волны не зависит от времени. Учитывая этот факт и принимая во внимание решение /2.10/, /2.11/ в случае постоянной скорости фронта, ищем разложения функций в виде:

$$\theta(\xi) = [Ж_1(\xi-\xi_0)]^{1/m} + \dots,$$
$$\tilde{u}(\xi) = Ж_2[Ж_1(\xi-\xi_0)]^{1/m+1} + \dots . \qquad /3.13/$$

Для констант $Ж_1, Ж_2$ находим выражения

$$Ж_1 = \frac{B_1 m \xi_0 (a_1 a_2 + 1 - A_1^2 \xi_0^2)}{A_1^2 \xi_0^2 - 1},$$
$$Ж_2 = -\frac{B_1 m a_1 a_2}{B_2 (m+1)(A_1^2 \xi_0^2 - 1)} Ж_1^{-1} = -\frac{a_1 a_2}{B_2 (m+1) \xi_0 (a_1 a_2 + 1 - A_1^2 \xi_0^2)}. \qquad /3.14/$$

Заметим, что когда $A_1 = 1$ и $B_1 = B_2 = 1$, то значения констант $Ж_1, Ж_2$ совпадают со значениями соответствующих констант в формулах /2.10/, /2.11/, что и следовало ожидать.

Вычисляя значения функций $\tilde{\theta}$, $\tilde{u}$, $\frac{d\tilde{\theta}}{d\xi}$, $\frac{d\tilde{u}}{d\xi}$ при $\xi_1 = \xi_0 - 0$, получим

$$\tilde{\theta}(\xi_1) = [Ж_1(\xi_1 - \xi_0)]^{1/m} + \dots, \quad \frac{d\tilde{\theta}}{d\xi}(\xi_1) = \frac{Ж_1}{m}[Ж_1(\xi_1 - \xi_0)]^{1/m-1} + \dots,$$

$$\tilde{u}(\xi_1) = Ж_2[Ж_1(\xi_1 - \xi_0)]^{1/m+1} + \dots, \qquad /3.15/$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi}(\xi_1) = \left(\frac{1}{m} + 1\right) Ж_1 Ж_2 [Ж_1(\xi_1 - \xi_0)]^{1/m} + \dots,$$

где $Ж_1, Ж_2$ имеют вид /3.14/.

Таким образом, построение автомодельного решения задачи /1.1/, /3.7/, /3.8/ сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений /3.6/ в области $0 < \xi < \xi_1 = \xi_0 - 0$ при условиях /3.9/, /3.15/. Левое условие /3.9/ ''пристреливается''; ''параметр пристрелки'' - положение фронта волны ξ_0, которое пока осталось неопределенной величиной.

Как следует из /3.15/, в зависимости от знака $Ж_2$ /всегда $Ж_1 < 0$/ возможны волны с ростом смещения $\tilde{u}$ или с его падением по отношению к значению на фоне $\tilde{u}_0 = 0$. Исследования показывают, что при скорости фронта

$$\xi_0 > \sqrt{1 + a_1 a_2} \qquad /3.16/$$

имеем волну с ростом смещения, а при скорости

$$0 < \xi_0 < 1 \qquad /3.17/$$

происходит падение смещения.

Авторы благодарны академику А.А.Самарскому и профессору С.П.Курдюмову за плодотворные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М., ''Мир'', 1975.
2. Кильчинская Г.А. Автомодельные решения взаимосвязанной задачи термоупругости для полупространства. В кн.: Тепл. напр. в элементах конструкций. 1971, 11, с. 23-26. /Киев, Инст.механики АН УССР/.
3. Кильчинская Г.А. Распространение связанных термоупругих возмущений в полупространстве при зависящих от температуры параметрах. В кн.: Тепл.напр. в элем.конструкций, 1974, 14, с. 66-70 /Киев, инст.механики АН УССР/.
4. Зельдович Я.Б., Компанеец А.С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. В сб., посвященном семидесятилетию академика А.Ф.Иоффе. М., Изд-во АН СССР, 1950, с. 61-70.
5. Беренблатт Г.И., Вишик М.И. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа. ПММ, 1956, 20, 3, с. 411-417.
6. Самарский А.А., Курдюмов С.П., Волосевич П.П. Бегущие волны в среде с нелинейной теплопроводностью. ЖВМ МФ, 1965, 5, № 2.
7. Курдюмов С.П. Бегущие температурно-гидродинамические волны, движущиеся по фону с постоянным давлением. Препринт ИПМ АН СССР №45, М., 1971, депонирован в ВИНИТИ, №337-74. деп.
8. Курдюмов С.П. Изучение взаимодействия гидродинамических и нелинейных тепловых процессов с помощью бегущих волн. Препринты ИПМ АН СССР, №55, №56, М., 1971; депонир. в ВИНИТИ, №339-74, №338-74.
9. Becker B. Stosswelle and Detonation. Zeitschr. für Phys., 1922, 8, p. 321.
10. Еленин Г.Г., Курдюмов С.П. Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды. Препринт ИПМ АН СССР № 106, М., 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 декабря 1980 года.