объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-80-838

Н.Ф.Трускова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛИСФЕРОИДАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Направлено в ЯФ

1980

ВВЕДЕНИЕ

Полисфероидальные функции введены в работе [1]. Они возникают при решении уравнения Гельмгольца в системах координат N - мерных ($N \geq 4$) эллипсоидов или гиперболоидов вращения и являются ограниченными при всех действительных z решениями уравнения

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2(\mu-\nu+(\nu+\mu+1)\cos 2z)}{\sin 2z}\frac{\partial}{\partial z} - 2q\cos 2z + \lambda\right] ps_{a}^{(\nu,\mu)}(z,q) = 0, \qquad /1/$$

где величины ν, μ, q, λ предполагаются действительными, а z может принимать как действительные, так и чисто мнимые значения. При этом $q = \frac{c^2}{4} \geq 0$; $\mu, \nu > -1$.

При частных значениях параметров полисфероидальные функции используются при решении многих физических задач: задачи двух центров квантовой механики [2], задачи трех тел с кулоновским взаимодействием [2-4], задачи рассеяния и дифракции скалярных и электромагнитных волн на вытянутых или сжатых эллипсоидах вращения [5-7], задачи на собственные колебания применяемых в лазерах открытых резонаторов [2,8-10] и ряда других [5,11-15].

Полисфероидальные периодические функции $ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q)$ являются ограниченными при всех действительных z и периодическими с периодом π решениями уравнения /1/. Аналитическое продолжение функций $ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q)$ в область чисто мнимых z обозначается через $Ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q)$ и называется модифицированной полисфероидальной периодической функцией

$$Ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q) = ps_n^{(\nu,\mu)}(iz,q).$$

Условие периодичности функций $ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q)$ приводит к ограничению класса собственных значений λ, а именно, к значениям $\lambda = \lambda_n^{(\nu,\mu)}(q)$, соответствующим целочисленным n (n = 0,1,2, ...). При этом функция $ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q)$ имеет n нулей на промежутке $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$ и является целой функцией переменной z.

При $\nu = \pm 1/2$ *или* $\mu = \pm 1/2$ функции $ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q)$, $Ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q)$ выражаются через вытянутые или сплюснутые сфероидальные функции [2,5,16-19], при $\nu = \pm 1/2$, $\mu = \pm 1/2$ - через функции Матье [17,20], при $\mu = 0$, $\nu = 0,1,2,...$ - через гиперсфероидальные /или обобщенные сфероидальные/ функции [2,15,21-24]. Другие частные случаи, а также основные свойства функций $ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q)$, $Ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q)$ приведены в работе [1].

В данной работе получены асимптотические формулы для полисфероидальных периодических функций $ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q)$, $Ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q)$ и их собственных значений $\lambda_n^{(\nu,\mu)}(q)$ при $c=2\sqrt{q}\to 0$ с точностью до членов $O(c^{10})$ и при $c=2\sqrt{q}\to\infty$ /в случае $\sqrt{c}\cdot\cos z=\mathrm{const}$/ с точностью до членов $O(1/c^4)$. Эти формулы представляют собой объединение и нетривиальное обобщение асимптотических формул для вытянутых и сплюснутых сфероидальных и гиперсфероидальных функций на случай произвольных значений $\nu,\mu>-1$.

Все асимптотические формулы, полученные в работе, справедливы для действительных $q=c^2/4\geq 0$. Специального вывода соответствующих асимптотик при $q<0$ не требуется, поскольку функции $\lambda_n^{(\nu,\mu)}(q)$, $ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q)$, $Ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q)$ удовлетворяют соотношениям /1/

$$\lambda_n^{(\nu,\mu)}(-q)=\lambda_n^{(\mu,\nu)}(q), \qquad /2а/$$

$$ps_n^{(\nu,\mu)}(z,-q)=(-1)^n\, ps_n^{(\mu,\nu)}\left(-z+\frac{\pi}{2},\, q\right), \qquad /2б/$$

$$Ps_n^{(\nu,\mu)}(z,-q)=ps_n^{(\nu,\mu)}(iz,\,-q)\,. \qquad /2в/$$

1. АСИМПТОТИКА ПРИ $c\to 0$

Для вывода асимптотических формул при $c\to 0$ используем разложения для функций $ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q)$, $Ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q)$, полученные в работе /1/:

$$ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q)=\sum_{r=0}^{\infty}A_r\,P_r^{(\nu,\mu)}(-\cos 2z), \qquad /3а/$$

$$Ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q)=\frac{ps^{(\nu,\mu)}(0,q)\,\Gamma(\nu+\mu+2)}{A_0(c\cdot\mathrm{ch}\,z)^{\nu+\mu+1}}\times$$
$$\times\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_r\,\frac{\Gamma(r+\mu+1)}{r!\,\Gamma(\mu+1)}J_{\nu+\mu+1+2r}(c\cdot\mathrm{ch}\,z)\,, \qquad /3б/$$

где $P_r^{(\nu,\mu)}(x)$ – полиномы Якоби /25/, $J_\nu(cz)$ – функции Бесселя первого рода /26/. Коэффициенты A_r удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$\left(\lambda_n^{(\nu,\mu)}(q)-\frac{2q(\nu-\mu)}{(\nu+\mu+2)}\right)A_0-\frac{4q(\nu+1)(\mu+1)}{(\nu+\mu+2)(\nu+\mu+3)}A_1=0,$$

$$\alpha_r A_{r+1}+\beta_r A_r+\gamma_r A_{r-1}=0,\quad r=1,2,\ldots\,.$$

$$\alpha_r = -\frac{4q(\nu+r+1)(\mu+r+1)}{(\nu+\mu+2r+2)(\nu+\mu+2r+3)},$$

$$\beta_r = \lambda_n^{(\nu,\mu)}(q) - 4r(r+\nu+\mu+1) - \frac{2q(\nu^2-\mu^2)}{(\nu+\mu+2r)(\nu+\mu+2r+2)};$$

$$\gamma_1 = \frac{-4q}{(\nu+\mu+2)},\ \gamma_r = -\frac{4q\cdot r\cdot(r+\nu+\mu)}{(\nu+\mu+2r)(\nu+\mu+2r-1)},\quad r=2,3\ldots \qquad /4/$$

Если функции $ps_n^{(\nu,\mu)}(z,q)$ нормированы условием

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2\nu+1} z \sin^{2\mu+1} z (ps_n^{(\nu,\mu)}(z))^2\, dz = \frac{\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(\mu+n+1)}{2\cdot(n!)(\nu+\mu+2n+1)\Gamma(\nu+\mu+n+1)},$$

то A_0 вычисляется из соотношения /5/

$$\frac{\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(\mu+n+1)}{n!(\nu+\mu+2n+1)\Gamma(\nu+\mu+n+1)} = \sum_{r=0}^{\infty} A_r^2 \frac{\Gamma(\nu+r+1)\Gamma(\mu+r+1)}{r!(\nu+\mu+2r+1)\Gamma(\nu+\mu+r+1)}. \qquad /6/$$

Введем

$$M_n = -\frac{A_n}{A_{n-1}}\alpha_{n-1},\quad b_n = \gamma_n \alpha_{n-1},\quad a_n = \beta_n. \qquad /7/$$

Используя соотношения /4/, получаем

$$M_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{a_{n+1} - M_{n+2}}, \qquad /8а/$$

$$M_{n+1} = a_n - \frac{b_n}{M_n}. \qquad /8б/$$

Вычитая /8б/ из /8а/, приходим к уравнению, из которого можно найти собственные значения $\lambda_n^{(\nu,\mu)}(q)$:

$$\cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1} - \cfrac{b_{n+2}}{a_{n+2} - \cfrac{b_{n+3}}{a_{n+3} - \ldots}}} - a_n + \cfrac{b_n}{a_{n-1} - \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-2} - \ldots \cfrac{b_1}{a_0}}} = 0. \qquad /9/$$

Представим $\lambda_n^{(\nu,\mu)}(q)$ при $q = \frac{c^2}{4} \to 0$ в виде

$$\lambda_{n\ c\to 0}^{(\nu,\mu)}\left(\frac{c^2}{4}\right) = d_0^n + d_2^n c^2 + d_4^n c^4 + d_6^n c^6 + d_8^n c^8 + O(c^{10}), \qquad /10/$$

где d_e^n - не зависящие от c числа.

Подставляя выражение /10/ в /9/ и приравнивая члены с одинаковыми степенями c, получаем:

$$d_0^n = 4n(n+\nu+\mu+1), \quad n = 0,1,2,\dots ;$$

$$d_2^\circ = \frac{(\nu-\mu)}{2(\nu+\mu+2)}; \; d_4^\circ = -D_1; \; d_6^\circ = D_1 B_1; \; d_8^\circ = -D_1 (B_1^2 - \tilde{C}_0);$$

$$d_2^n = \frac{(\nu^2-\mu^2)}{2(\nu+\mu+2n)(\nu+\mu+2n+2)}, \quad n = 1,2,\dots ;$$

$$d_4^n = D_n - D_{n+1}; \quad d_6^n = -D_n B_n + D_{n+1} B_{n+1};$$

$$d_8^n = D_n (B_n^2 - C_n) - D_{n+1}(B_{n+1}^2 - \tilde{C}_n), \quad n = 1,2,\dots ; \qquad /11/$$

$$D_0 = 0; \; D_n = \frac{n(n+\nu+\mu)(n+\nu)(n+\mu)}{4(\nu+\mu+2n)^3((\nu+\mu+2n)^2-1)}, \quad n = 1,2,\dots ;$$

$$B_1 = \frac{2(\nu-\mu)}{(\nu+\mu+2)(\nu+\mu+4)}; \quad C_1 = \frac{(D_1-D_2)}{4(\nu+\mu+2)};$$

$$B_n = -\frac{(\nu^2-\mu^2)}{2(\nu+\mu+2n)^2((\nu+\mu+2n)^2-4)}, \quad n = 2,3,\dots ;$$

$$C_n = \frac{(D_n - D_{n+1})}{4(\nu+\mu+2n)} - \frac{(\nu+\mu+2n-2)D_{n-1}}{8(\nu+\mu+2n)(\nu+\mu+2n-1)}, \quad n = 2,3\dots ;$$

$$\tilde{C}_n = \frac{(D_{n+1}-D_n)}{4(\nu+\mu+2n+2)} - \frac{(\nu+\mu+2n+4)D_{n+2}}{8(\nu+\mu+2n+3)(\nu+\mu+2n+2)}, \quad n = 0,1,2,\dots .$$

Из этих формул следует:

в случае $\nu = -1/2$, $\mu = m = 0,1,2,\dots$, $\ell = m+2n$ выражение для $\lambda_n^{(\nu,\mu)}(\frac{c^2}{4}) + \mu(\mu+1) - \frac{c^2}{2}$ при $c \to 0$ с точностью до членов $O(c^{10})$ совпадает с асимптотическим выражением для константы разделения $\lambda_{m\ell}(c)$ при $c \to 0$ четных вытянутых сфероидальных функций /27/;

в случае $\nu = +1/2$, $\mu = m = 0,1,2,\dots$, $\ell = m+2n+1$ выражение для $\lambda_n^{(\nu,\mu)}(\frac{c^2}{4}) + (\mu+1)(\mu+2) - \frac{c^2}{2}$ при $c \to 0$ с точностью до членов $O(c^{10})$ совпадает с асимптотическим выражением для константы разделения $\lambda_{m\ell}(c)$ при $c\to 0$ нечетных вытянутых сфероидальных функций /27/;

в случае $\mu=-1/2$, $\nu=m=0,1,2,\dots$, $\ell=m+2n$ выражение для $\lambda_n^{(\nu,\mu)}(\frac{c^2}{4})+\nu(\nu+1)+\frac{c^2}{2}$ при $c\to 0$ с точностью до членов $O(c^{10})$ совпадает с асимптотическим выражением для константы разделения $\lambda_{m\ell}(c)$ при $c\to 0$ четных сплюснутых сфероидальных функций /27/;

в случае $\mu=+1/2$, $\nu=m=0,1,2,\dots$, $\ell=m+2n+1$ выражение для $\lambda_n^{(\nu,\mu)}(\frac{c^2}{4})+(\nu+1)(\nu+2)+\frac{c^2}{2}$ при $c\to 0$ с точностью до членов $O(c^{10})$ совпадает с асимптотическим выражением для константы разделения $\lambda_{m\ell}(c)$ при $c\to 0$ нечетных сплюснутых сфероидальных функций /27/;

в случае $\mu=0$, $\nu=N=0,1,2,\dots$ выражение для $\lambda^{(\nu,\mu)}(\frac{c^2}{4})-(\nu+\frac{1}{2})(\nu+\frac{3}{2})-\frac{c^2}{2}$ при $c\to 0$ совпадает с асимптотическим выражением для константы разделения $\chi_{N,n}(c)$ при $c\to 0$ гиперсфероидальных /или обобщенных сфероидальных/ функций, представленном в работе /24/ с точностью до членов $O(c^4)$.

Коэффициенты A_r при $c\to 0$ можно вычислить, полагая

$$A_r=\sum_{i=1} c^{2i}A_r^i,\quad r\neq n;\ A_n=1. \qquad /12/$$

Подставим /12/ в разложение /3а/ и используем при этом соотношения /4/ и /10/-/11/. Получаем при $i=1,2$:

$$A^1_{n-1}=-\frac{\alpha_{n-1}}{c^2(d_0^n-d_0^{n-1})};\quad A^1_{n+1}=-\frac{\gamma_{n+1}}{c^2(d_0^n-d_0^{n+1})};\quad A^1_{n\mp k}=0,\ k=2,3,\dots;$$

$$A^2_{n-1}=-\frac{(d_2^n-d_2^{n-1})A^1_{n-1}}{(d_0^n-d_0^{n-1})};\quad A^2_{n+1}=-\frac{(d_2^n-d_2^{n+1})A^1_{n+1}}{(d_0^n-d_0^{n+1})}; \qquad /13/$$

$$A^2_{n-2}=-\frac{\alpha_{n-2}A^1_{n-1}}{c^2(d_0^n-d_0^{n-2})};\quad A^2_{n+2}=-\frac{\gamma_{n+2}A^1_{n+1}}{c^2(d_0^n-d_0^{n+2})};$$

$$A^2_{n\pm k}=0;\ k=3,4,\dots .$$

Все остальные A_r^{i+1} можно найти из уравнений:

$$\frac{\gamma_{n-1}}{c^2}A^i_{n-2}+A^{i+1}_{n-1}(d_0^n-d_0^{n-1})+A^i_{n-1}(d_2^n-d_2^{n-1})+\sum_{j=2}^{i}d_{2j}^n A^{i-j+1}_{n-1}=0, \qquad /14а/$$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{c^2} A^i_{n+2} + A^{i+1}_{n+1}(d^n_0 - d^{n+1}_0) + A^i_{n+1}(d^n_2 - d^{n+1}_2) + \sum_{j=2}^{i} d^n_{2j} A^{i-j+1}_{n+1} = 0,$$

$$\frac{\alpha_{n\pm k}}{c^2} A^i_{n\pm k+1} + \frac{\gamma_{n\pm k}}{c^2} A^i_{n\pm k-1} + (d^n_0 - d^{n\pm k}_0) A^{i+1}_{n\pm k} + \qquad /14в/$$

$$+ (d^n_2 - d^{n\pm k}_2) + \sum_{j=2}^{i} d^n_{2j} A^{i-j+1}_{n\pm k} = 0, \quad i,k = 2,3,\dots .$$

При этом d^n_{2i+2} удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\alpha_n}{c^2} A^i_{n+1} + \frac{\gamma_n}{c^2} A^i_{n-1} + d^n_{2i+2} = 0, \quad i = 1,2,\dots .$$

2. АСИМПТОТИКА ПРИ $c \to \infty$ ($\sqrt{c}\cos z = \mathrm{const}$)

Перейдем в уравнении /1/ к переменной $x = \sqrt{c}\cos z$. Получаем

$$\Big[(1-\frac{x^2}{c})\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\frac{(2\nu+1)}{x} - \frac{(2\nu+2\mu+3)x}{c})\frac{\partial}{\partial x} - x^2 + \frac{c}{2} + \frac{\lambda^{(\nu,\mu)}_n(q)}{c}\Big]\Psi^{(\nu,\mu)}_n(c,x) = 0 \qquad /15/$$

Здесь $\Psi^{(\nu,\mu)}_n(c,x) = ps^{(\nu,\mu)}_n(z, \frac{c^2}{4})$; $q = \frac{c^2}{4}$.

При $c \to \infty$ уравнение /15/ переходит в уравнение:

$$\Big[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{(2\nu+1)}{x}\frac{\partial}{\partial x} - x^2 + \frac{c}{2} + \frac{\lambda^{(\nu,\mu)}_n(q)}{c}\Big] V^{(\nu,\mu)}_n(x) = 0 , \qquad /16/$$

где

$$V^{(\nu,\mu)}_n(x) = \Psi^{(\nu,\mu)}_n(c,x) \Big|_{c\to\infty} . \qquad /17/$$

Если

$$\frac{\lambda^{(\nu,\mu)}_n(q)}{c} + \frac{c}{2} = 4n + 2\nu + 2, \qquad /18/$$

то ограниченными в области $-\sqrt{c} \le x \le +\sqrt{c}$ решениями уравнения /16/ являются функции

$$V^{(\nu,\mu)}_n(x) = e^{-x^2/2} L^{(\nu)}_n(x^2), \qquad /19/$$

где $L^{(\nu)}_n(x^2)$ - полиномы Лаггера [24].

Положим

$$\Psi^{(\nu,\mu)}_n(c,x) = \mathrm{const}\cdot e^{-x^2/2}\sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell L^{(\nu)}_\ell(x^2) . \qquad /20/$$

Подставляя разложение /20/ в уравнение /15/ и пользуясь рекуррентными соотношениями для полиномов Лаггера[25], получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов B_ℓ :

$$B_{-2} = B_{-1} = 0 ;$$

$$\frac{a_\ell}{c} B_{\ell-2} + \frac{\beta_\ell}{c} B_{\ell-1} + \left(\frac{\lambda_n^{(\nu,\mu)}(q)}{4c} + \frac{c}{8} - \frac{D_0^\ell}{4} - \frac{C_0^\ell}{4c} \right) B_\ell +$$

$$+ \frac{\gamma_\ell}{c} B_{\ell+1} + \frac{\delta_\ell}{c} B_{\ell+2} = 0 ; \qquad /21/$$

$$a_\ell = -\frac{\ell(\ell-1)}{4}, \ \beta_\ell = -\frac{\ell\mu}{2}, \ \gamma_\ell = \frac{\mu(\ell+\nu+1)}{2}, \ \delta_\ell = -\frac{(\ell+2+\nu)(\ell+\nu+1)}{4},$$

$$\ell = 0, 1, 2, \dots ;$$

$$C_0^\ell = -(-\mu^2 + \nu + 2\ell^2 + 2\ell\nu + 2\ell + 2) - (\mu+\nu)(\mu+\nu+2) ;$$

$$D_0^\ell = 2(2\ell + \nu + 1) .$$

Представим $\lambda_n^{(\nu,\mu)}(\frac{c^2}{4})$ при $c \to \infty$ в виде

$$\lambda_n^{(\nu,\mu)}\left(\frac{c^2}{4}\right) = \tilde{D}_2^n c^2 + \tilde{D}_0^n c + \tilde{C}_0^n + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i^n}{c^i} , \qquad /22/$$

а B_ℓ при $c \to \infty$ - в виде

$$B_\ell = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_\ell^i}{c^i}, \quad \ell \neq n, \quad B_n = 1 . \qquad /23/$$

Подставим разложения /22/ и /23/ в /21/ и приравняем члены при одинаковых степенях c. Получаем

$$\tilde{D}_2^n = -\frac{1}{2}; \quad \tilde{D}_0^n = 2(2n + \nu + 1) ;$$

$$\tilde{C}_0^n = -(-\mu^2 + \nu + 2n^2 + 2n\nu + 2n + 2) - (\mu+\nu)(\mu+\nu+2) ;$$

$$C_1^n = -\frac{N}{2^6}(N^2 + 12 - 4\nu^2 - 32\mu^2) ;$$

$$C_2^n = \mu^2\left(\frac{3}{8}N^2 + \frac{1-\nu^2}{2}\right) + \frac{1}{2^{10}}(-5(N^4 + 26N^2 + 21) - 6N^2 +$$

$$+ 24\nu^2 N^2 - 39 + 160\nu^2 - 16\nu^4) ;$$

$$C_3^n = -\frac{N\mu^4}{2^3} - \frac{N\mu^2}{2^7}(-37N^2+84\nu^2-188) - \frac{N}{2^{14}}(33N^4 + $$
$$+1640N^2-184\nu^2N^2+6480-3488\nu^2+208\nu^4); \qquad /24/$$

где

$$N = 4n + 2\nu + 2 .$$

В случае $\mu = 0, \nu = N = 0,1,2,...$ коэффициенты $\tilde{D}_0^n$, $\tilde{C}_0^n$, $\tilde{C}_1^n$ совпадают с соответствующими коэффициентами разложения при $c \to \infty$ константы разделения гиперсфероидальных /или обобщенных сфероидальных/ функций, представленными в работе [24].

В случае $\nu = -1/2$, $\mu = m = 0,1,2,...$ коэффициенты /24/ совпадают с соответствующими коэффициентами разложения при $c \to \infty$ константы разделения $\lambda_{m,m+2n}(c) = \lambda_n^{(-1/2,m)}(\frac{c^2}{2}) + \mu(\mu+1) - \frac{c^2}{2}$ четных вытянутых сфероидальных функций [27].

В случае $\nu = +1/2$, $\mu = m = 0,1,2,...$ коэффициенты /24/ совпадают с соответствующими коэффициентами разложения при $c \to \infty$ константы разделения $\lambda_{m,m+2n+1}(c) = \lambda_n^{(1/2,m)}(\frac{c^2}{4}) + (\mu+1)(\mu+2) - \frac{c^2}{2}$ нечетных вытянутых сфероидальных функций [27].

В случае $\mu = -1/2$, $\nu = m = 0,1,2,....$ коэффициенты /24/ совпадают с соответствующими коэффициентами разложения при $c \to \infty$ константы разделения $\lambda_{m,m+2n}(c) = \lambda_n^{(m,-1/2)}(\frac{c^2}{4}) + m(m+1) + \frac{c^2}{2}$ четных сплюснутых сфероидальных функций [27].

В случае $\mu = +1/2$, $\nu = m = 0,1,2,...$ коэффициенты /24/ совпадают с соответствующими коэффициентами разложения при $c \to \infty$ константы разделения $\lambda_{m,m+2n+1}(c) = \lambda^{(m,1/2)}(\frac{c^2}{4}) + (\nu+1)(\nu+2) + \frac{c^2}{2}$ нечетных сплюснутых сфероидальных функций [27].

Заметим, что в отличие от соответствующих коэффициентов разложения при $c \to 0$ коэффициенты разложения констант разделения вытянутых и сплюснутых сфероидальных функций при $c \to \infty$ существенно различаются между собой. В данном рассмотрении эти различные между собой формулы являются частными случаями формулы/22/.

Коэффициенты $B_\ell^i = B_\ell^i(N)$ в разложениях /23/ при этом равны:

$$B^1_{n-1} = -\frac{\mu(N+2\nu-2)}{8}; \quad B^1_{n+1} = -\frac{\mu(N+2-2\nu)}{8}; \quad B^1_{n\mp k} = 0, \ k=3,4,...;$$

$$B^1_{n-2} = \frac{(N+2\nu-2)(N+2\nu-6)}{8\cdot 16}; \quad B^1_{n+2} = -\frac{(N-2\nu+2)(N-2\nu+6)}{16\cdot 8};$$

$$B^2_{n-1} = -\frac{\mu(N+2\nu-2)(N^2+52N-4\nu^2-92)}{64\cdot 16};$$

$$B^2_{n-2} = \frac{(N-2+2\nu)(N+2\nu-6)(4\mu^2+N-4)}{16\cdot 32};$$

$$B^2_{n-3} = -\frac{\mu(N+2\nu-10)(N+2\nu-2)(N+2\nu-6)}{64\cdot 16};$$

$$B^2_{n-4} = \frac{(N+2\nu-2)(N+2\nu-6)(N+2\nu-10)(N+2\nu-14)}{16\cdot 16\cdot 16\cdot 8}; \qquad /25/$$

$$B^2_{n\pm k} = 0, \quad k = 5,6,\ldots;$$

$$B^2_{n+1}(N) = B^2_{n-1}(-N), \qquad B^2_{n+2}(N) = B^2_{n-2}(-N);$$

$$B^2_{n+3}(N) = B^2_{n-3}(-N), \qquad B^2_{n+4}(N) = B^2_{n-4}(-N).$$

Величины B^i_ℓ, C^n_{i+1} при $i=3,4,\ldots$ можно получить из уравнений

$$\frac{C^n_i}{4} + \alpha_n B^i_{n-2} + \beta_n B^i_{n-1} + \gamma_n B^i_{n+1} + \delta_n B^i_{n+2} = 0, \quad i = 2,3,\ldots;$$

$$\alpha_{n-1} B^i_{n-3} + \beta_{n-1} B^i_{n-2} + \delta_{n-1} B^i_{n+1} + \frac{(D^n_0 - D^{n-1}_0)}{4} B^{i+1}_{n-1} +$$

$$+ \frac{(C^n_0 - C^{n-1}_0)}{4} B^i_{n-1} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{i-1} C^n_k B^{i-k}_{n-1} = 0, \quad i = 2,3,\ldots;$$

$$\alpha_{n-2} B^i_{n-4} + \beta_{n-2} B^i_{n-3} + \gamma_{n-2} B^i_{n-1} + \frac{(D^n_0 - D^{n-2}_0)}{4} B^{i+1}_{n-2} +$$

$$+ \frac{(C^n_0 - C^{n-2}_0)}{4} B^i_{n-2} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{i-1} C^n_k B^{i-k}_{n-2} = 0, \quad i = 2,3,\ldots;$$

$$\alpha_{n\pm k} B^{i}_{n\pm k-2} + \beta_{n\pm k} B^{i}_{n\pm k-1} + \gamma_{n\pm k} B^{i}_{n\pm k+1} + \delta_{n\pm k} B^{i}_{n\pm k+2} +$$

$$+ \frac{(D_0^n - D_0^{n\pm k})}{4} B^{i+1}_{n\pm k} + \frac{(C_0^n - C_0^{n\pm k})}{4} B^{i}_{n\pm k} + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{i-1} C_j^n A^{i-j}_{n\pm k} = 0,$$

$$i = 2,3,\dots,\quad k = 3,4,\dots;$$

$$\alpha_{n+1} B^{i}_{n-1} + \gamma_{n+1} B^{i}_{n+2} + \delta_{n+1} B^{i}_{n+3} + \frac{(D_0^n - D_0^{n+1})}{4} B^{i+1}_{n+1} +$$

$$+ \frac{(C_0^n - C_0^{n+1})}{4} B^{i}_{n+1} + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{i-1} C_j^n B^{i-j}_{n+1} = 0, \quad i = 2,3,\dots;$$

$$\beta_{n+2} B^{i}_{n+1} + \gamma_{n+2} B^{i}_{n+3} + \delta_{n+2} B^{i}_{n+4} + \frac{(D_0^n - D_0^{n+2})}{4} B^{i+1}_{n+2} +$$

$$+ \frac{(C_0^n - C_0^{n+2})}{4} B^{i}_{n+2} + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{i-1} C_j^n B^{i-j}_{n+2} = 0, \quad i = 2,3,\dots;$$

$$B^{i}_{n+k}(N) = (-1)^i B^{i}_{n-k}(-N).$$

Автор выражает благодарность Я.А.Смородинскому и А.Т.Филиппову за ценные обсуждения и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трускова Н.Ф. ОИЯИ, Р5-80-828, Дубна, 1980.
2. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. "Наука", М., 1976.
3. Крониг Р. Полосатые спектры и строение молекул. ОНТИ, Харьков-Киев, 1935.
4. Борн М., Хуан Кунь. Динамическая теория кристаллических решеток. ИЛ, М., 1954.
5. Meixner J., Schäfke F.W. Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Springer, 1954.
6. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. "Наука и техника", Минск, 1968.
7. Bowman J.J., Senior T.B., Uslenghi P.L.E. Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes. North Holland Pub.Comp., Amsterdam, 1969.
8. Вайнштейн Л.А. В кн.: Электроника больших мощностей, №4. "Наука", М., 1965, с.106.

9. Славянов С.Ю. Записки научных семинаров ЛОМИ, 42, 239. "Наука", Л., 1974.
10. Heurtley J.C. In: Proc.Symp. on Quasioptics, Politechnic Press, New York, 1964.
11. Стретт М.Д.О. Функции Лямэ, Матье и родственные им в физике и технике. ОНТИ, Харьков-Киев, 1935.
12. Морс Ф.М., Фешбах Т. Методы теоретической физики. ИЛ, М., 1958.
13. Filippov A.T. Phys.Lett., 1974, 51B, p.379; JINR, E2-7563, Dubna, 1973; E2-7929, Dubna, 1974.
14. Filippov A.T., Puzinin I.V., Mavlo D.P. J.Comp.Phys., 1976, 22, p.150.
15. Кузнецов Н.В. Записки научных семинаров ЛОМИ, 17,66. "Наука", Л., 1970.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, тт.1-3. "Наука", М., 1967.
17. Flammer C. Spheroidal Wave Functions. Stan.Univ.Press, 1957.
18. Rhodes D.R. J.Res.Nat.But.Stand., 1970, 74, p.187.
19. Stratton J.A. et al. Spheroidal Wave Functions. Mass.Inst. Techn.Press, 1956.
20. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матье. ИЛ, М., 1953.
21. Вайнштейн Л.А. В кн.: Электроника больших мощностей. "Наука", М., 1965, с.93,130.
22. Slepian D., Pollak H.O. Bell System Tech.J., 1961, 40, p.43.
23. Slepian D., Pollak H.O. Bell System Tech.J., 1941, 40, p.65.
24. Slepian D. Bell System Tech. J., 1964, 43, p.3009.
25. Сеге Д. Ортогональные многочлены. Физматгиз, М., 1962.
26. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. ИЛ., М., 1947.
27. Абрамовиц М., Стиган Л. Справочник по специальным функциям. "Наука", М., 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 декабря 1980 года.