сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-80-736

Б.Н.Хоромский

МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ОПЕРАТОРОМ, ИНВАРИАНТНЫМ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОВОРОТА СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

1980

Численные расчеты разностных уравнений на последовательности сеток позволяют получить приближенные решения высокой точности с использованием простейших разностных аппроксимаций, в которых исходный оператор рассматривается в одной и той же системе координат. Наряду с известными преимуществами экстраполяции на последовательности сеток [1] можно отметить, что при дроблении шага сетки либо быстро растет расчетный массив, либо требуется заново строить разностную сетку и проводить интерполяцию с одной сетки на другую.

В настоящей работе предложен другой способ экстраполяции, где фиксируется разностная сетка, а расчеты ведутся для последовательности различных систем координат. При этом вычисления проводятся для одного и того же массива точек, что и позволяет устранить указанный выше недостаток. В основе этого подхода лежит свойство инвариантности исходного оператора относительно поворота системы координат. Так, в книге [2] отмечено, что для квадратной разностной сетки w_h с шагом h оператор Лапласа можно аппроксимировать на обычном шаблоне "крест", только повернутом на угол $\pi/4$. При этом шаг дискретизации будет $r_1 = \sqrt{2}h$. Легко видеть, что новые аппроксимации получаются также при поворотах на угол $\phi_k = \pm \operatorname{arctg} k$, $k = 2,3,\dots$, с шагом дискретизации $r_k = \sqrt{k^2+1}\, h$.

Пусть u^* и u_h есть точное и приближенное решения исходной задачи и установлено разложение погрешности приближенного решения по степеням шага дискретизации

$$u_h = u^* + c_1(x)h^{\alpha_1} + c_2(x)h^{\alpha_2} + \dots ; \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \dots ; \quad x \in w_h , \qquad /0.1/$$

где функции $c_i(x)$ не зависят от h, но меняются при повороте системы координат на угол ϕ. При экстраполяции типа Ричардсона исключаются несколько первых слагаемых $c_i(x)h^{\alpha_i}$, $i = 1,\dots,p$, в разложении /0.1/ путем комбинирования $p+1$ выражения /0.1/ при попарно различных значениях h. Здесь существенно, что коэффициенты $c_i(x)$ не зависят от h. В рассматриваемом подходе одновременно с параметром h меняются и коэффициенты $c_i(x)$ в зависимости от угла поворота системы координат ϕ. Установление этой зависимости также дает возможность исключать первые слагаемые в /0.1/, используя решения u_h для различных систем координат.

Отметим, что разностные сетки, полученные при повороте на угол $\phi_k = \pm \operatorname{arctg} k$, $k=1,2,\ldots$, распадаются на k^2+1 независимых сеточных шаблонов, что позволяет проводить расчеты отдельно для каждого из них и таким образом экономить память ЭВМ. Действительно, в этом случае всякий раз решается система с N/k^2+1 неизвестными, где N - размерность первоначального массива w_h. Аналогичные возможности для поворота системы координат имеются и в случае более двух переменных.

В настоящей работе получены формулы экстраполяции для уравнения Пуассона при повороте на угол $\phi_1 = \pi/4$ в случае двух, трех и четырех пространственных переменных и для бигармонического уравнения на плоскости. Для двумерного уравнения Пуассона получены также формулы экстраполяции с углами $\phi_2 = \pm \operatorname{arctg} 2$ и формулы комбинированного типа, в которых одновременно используется изменение шага сетки и поворот системы координат. Показано, что предложенный метод требует меньше вычислительной работы по сравнению с методом Ричардсона, если разностные уравнения решаются итерационно.

§1. ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА ДЛЯ $n = 2$

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$\Delta u = f(x, y)\,; \quad u_\Gamma = \phi(\xi), \quad \xi \in \Gamma \qquad /1.1/$$

в прямоугольнике $\Pi = \{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$. Пусть для достаточно гладкого решения $u(x, y)$ выполнены условия согласования [3]

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + \frac{d^4 u}{dy^4} = 0 \qquad /1.2/$$

в углах прямоугольника, обеспечивающие согласно [4,5] разложение

$$P_h u - u_h = -P_h\Big(\sum_{i=1}^{2} c_i(x,y)h^{2i}\Big) + \eta, \quad |\eta| \le c h^6 \ln h, \qquad /1.3/$$

где P_h - проектор на квадратную сетку w_h с шагом h, а u_h - решение разностной задачи

$$\Delta_h u_h = P_h f(x,y), \quad u_{h,\Gamma} = \phi(\xi) \qquad /1.4/$$

с простейшей пятиточечной разностной схемой.

Используя поворот системы координат на угол $\pi/4$, построим на сетке w_h другую разностную аппроксимацию оператора Лапласа Δ_τ по формуле

$$\Delta_\tau u(x,y) = \tau^{-2}\big(u(x-h,\, y-h) + u(x+h,\, y+h) + u(x-h,\, y+h) + u(x+h,\, y-h) - 4u(x,y)\big), \qquad /1.5/$$

где $\tau = \sqrt{2}h$. В силу инвариантности оператора Δ относительно поворота оператор Δ_τ аппроксимирует его с точностью $O(\tau^2)$. Решение u_τ уравнения

$$\Delta_\tau u_\tau = P_\tau f\,; \quad u_{\tau,\Gamma} = \phi(\xi), \quad P_\tau = P_h \qquad /1.6/$$

существует, единственно и подчиняется априорной оценке

$$|u_\tau| \le c \max |f(x,y),\, \phi|\,. \qquad /1.7/$$

Обозначим решения уравнений /1.4/ и /1.6/ на сетке с шагом $h/2$ через $u_{h/2}$ и $u_{\tau/2}$ соответственно.

<u>Теорема 1</u>. Пусть $f(x,y)=0$ при $(x,y) \in \Gamma$ и выполнено условие /1.2/. Тогда для $u(x,y) \in C^6(\bar{\Pi})$ на сетке w_h имеет место соотношение

$$\frac{2u_h + u_\tau}{3} + \frac{h^2}{12} f(x,y) = u(x,y) + O(h^4)\,, \qquad /1.8/$$

а для $u(x,y) \in C^8(\bar{\Pi})$ выполнено

$$\frac{1}{45}\big(2(16u_{h/2} - u_h) + 16u_{\tau/2} - u_\tau\big) + \frac{h^2}{60} f(x,y) = u(x,y) + \mu_h\,, \qquad /1.9/$$

$$|\mu_h| \le c h^6 \ln h.$$

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим разложение /1.3/ для $u \in C^8(\bar{\Pi})$. Согласно [5] условие /1.2/ гарантирует, что $|c_1(x,y)| < M$, $|c_2(x,y)| < M$, где M не зависит от h. При этом

$$\Delta c_1 = -\frac{2}{4!}\Big(\frac{d^4 u}{dx^4} + \frac{d^4 u}{dy^4}\Big)\,; \quad c_{1,\Gamma} = 0\,. \qquad /1.10/$$

Обозначим направление осей в системе координат после поворота на угол $\phi = \pi/4$ через ℓ и n, так что

$$\Delta u = \Big(\frac{d^2}{d\ell^2} + \frac{d^2}{dn^2}\Big) u\,.$$

Тогда условия /1.2/ и $f(x,y) \in C^4(\bar{\Pi})$ в силу теоремы 1 из [4] гарантируют разложение

$$P_\tau u - u_\tau = -P_\tau \left(\sum_{i=1}^{2} d_i(x,y)\tau^{2i} \right) + \eta_\tau, \quad |\eta_\tau| \le c\tau^6 \ln\tau, \qquad /1.11/$$

где

$$\Delta d_1 = -\frac{2}{4!}\left(\frac{d^4 u}{d\ell^4} + \frac{d^4 u}{dn^4}\right); \quad d_{1,\Gamma} = 0. \qquad /1.12/$$

Найдем связь между коэффициентами c_1 и d_1: переходя в уравнении /1.12/ к переменным x и y, имеем

$$\Delta d_1 = -\frac{2}{4!}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d}{dx} + \frac{d}{dy}\right)^4 u + \frac{1}{4}\left(\frac{d}{dx} - \frac{d}{dy}\right)^4 u\right] =$$

$$= -\frac{1}{12}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d^4}{dx^4} + \frac{d^4}{dy^4}\right)u + 3\frac{d^4}{dx^2 dy^2}u\right],$$

откуда с учетом /1.10/ получаем соотношение

$$\Delta(c_1 + d_1) = -\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{2}\Delta^2 u = -\frac{1}{8}\Delta f \qquad /1.13/$$

во всех внутренних точках области II. Так как $f(\xi) = 0$, $\xi \in \Gamma$, то из /1.13/ следует равенство

$$c_1 + d_1 + \frac{1}{8}f = 0. \qquad /1.14/$$

Учитывая, что $\tau^2 = 2h^2$, из /1.14/ получаем /1.8/. Далее рассмотрим две пары решений: u_h, $u_{h/2}$; u_τ, $u_{\tau/2}$. Используя разложения /1.3/, /1.11/, получим равенства

$$\frac{16}{15}(u_{h/2} - u_h) = u + \frac{1}{5}c_1 h^2 + \eta_1, \quad |\eta_1| \le ch^6 \ln h;$$

$$/1.15/$$

$$\frac{16}{15}(u_{\tau/2} - u_\tau) = u + \frac{1}{5}d_1 \tau^2 + \eta_2, \quad |\eta_2| \le c\tau^6 \ln\tau,$$

из которых с учетом /1.14/ получаем /1.9/. Легко видеть, что соотношение /1.8/ справедливо и при $u \in C^6(\bar{\Pi})$. Теорема доказана.

Отметим, что формула /1.8/ соответствует разностной схеме четвертого порядка на шаблоне типа "ящик" /2/, а соотношение /1.9/ соответствует 17-точечной схеме порядка $O(h^6)$. Множитель $\ln h$ в /1.9/ исчезает, если выполнено еще одно условие согласования.

Рассмотрим поворот системы координат на угол $\phi_2 = \operatorname{arctg} 2$. Соответствующая разностная аппроксимация оператора Лапласа

определяется формулой

$$\Delta_{\tau_2} u(x,y) = \tau_2^{-2}\,(u(x-h, y-2h) + u(x-2h, y+h) +$$

$$/1.16/$$

$$+ u(x+h, y+2h) + u(x+2h, y-h) - 4u(x,y)),$$

где $\tau_2 = \sqrt{5}h$ и аппроксимирует оператор Δ с точностью $O(h^2)$.

В приграничных узлах оператор /1.16/ определяем с помощью фиктивных точек $x = ih$, $y = b + h$; $x = ih$, $y = -h$; $x = -h$, $y = jh$; $x = a + h$, $y = ih$, а условие $u_\Gamma = \phi(\xi)$ аппроксимируем с точностью до $O(\tau_2^4)$. Например, на сторонах, параллельных оси Ox,

$$q_{\tau_2} u = \frac{1}{2}\left(u\left(x - \frac{h}{2}, y - h\right) + u\left(x + \frac{h}{2}, y + h\right)\right) =$$

$$/1.17/$$

$$= \phi(\xi) - \frac{5h^2}{4}Du(\xi); \quad \xi = (x,y) \in \Gamma,$$

где

$$D = \frac{1}{5}\,\frac{d^2}{dx^2} + \frac{4}{5}\,\frac{d^2}{dy^2},$$

а на двух других сторонах

$$D = \frac{4}{5}\,\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{5}\,\frac{d^2}{dy^2}.$$

Поскольку известно $\Delta u_\Gamma = f_\Gamma$, то величина Du выражается через $f_\Gamma(\xi)$ и вторые производные $\phi(\xi)$. Обозначим направление новых осей координат через ℓ и n. Тогда для единственного решения u_{τ_2} уравнения

$$\Delta_{\tau_2} u_{\tau_2} = P_h f, \quad q_{\tau_2} u = \Phi(\xi), \qquad /1.18/$$

где q_{τ_2} и Φ определены в /1.17/, выполнена априорная оценка /1.7/ и справедливо разложение типа /1.11/ с $\tau = \tau_2$.

Уравнение /1.12/ с учетом соотношений

$$\frac{d}{dn} = \cos\phi_2\frac{d}{dx} + \sin\phi_2\frac{d}{dy}; \quad \frac{d}{d\ell} = -\sin\phi_2\frac{d}{dx} + \cos\phi_2\frac{d}{dy}$$

приводится к виду

$$\Delta d_1 = -\frac{2}{4!}\,\frac{1}{25}\left[17\left(\frac{d^4}{dx^4} + \frac{d^4}{dy^4}\right) + 48\frac{d^4}{dx^2 dy^2} + 24\frac{d^2}{dxdy}\left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{d^2}{dx^2}\right)\right]u,$$

$$d_{1,\Gamma} = \pm\frac{1}{5}\,\frac{d^2}{dx\,dy}u(\xi), \quad \xi\in\Gamma, \qquad /1.19/$$

где при $y=\mathrm{const}$ выбираем знак плюс, а при $x=\mathrm{const}$ – знак минус. Чтобы выражение в правой части стало симметричным по x и y, а краевое условие стало однородным, рассмотрим еще одно решение $u_{r_{-2}}$ с углом поворота $\phi_{-2}=-\mathrm{arctg}\,2$. В этом случае, используя комбинацию $v=\frac{1}{2}(d_1+d_{-1})$, получим соотношение

$$\Delta\left(c_1+\frac{25}{7}v\right) = -\frac{2}{4!}\left(1+\frac{17}{7}\right)\Delta^2 u = -\frac{2}{7}\Delta f, \qquad /1.20/$$

$$v(\xi)=0,\quad \xi\in\Gamma,$$

которое, учитывая условие $f_\Gamma=0$, приводит к нужной формуле

$$c_1+\frac{25}{7}\,\frac{d_1+d_{-1}}{2}+\frac{2}{7}f=0, \qquad x\in\bar{\Pi},$$

из которой следует формула экстраполяции

$$\frac{7}{12}\left(u_h+\frac{5}{14}(u_{r_2}+u_{r_{-2}})\right)+\frac{h^2}{6}f(x,y)=u(x,y)+O(h^4). \qquad /1.21/$$

Отметим, что разностная схема /1.18/ расщепляется на пять независимых систем уравнений, каждая из которых определена на массиве размерности $N/5$, где N – размерность массива w_h. Расчеты по формуле /1.21/ следует вести следующим образом. Если $w_h=\bigcup_{i=1}^{5} w_{i,r_2}$, то, получив решение на сетке w_{1,r_2}, берем его как начальное приближение при расчете на сетках w_{i,r_2}, $i\ge 2$. Далее решение u_{r_2} используем как начальное приближение при определении $u_{r_{-2}}$ и, наконец, величину $\frac{1}{2}(u_{r_2}+u_{r_{-2}})$ используем для расчета u_h.

§2. ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА ДЛЯ $n = 3,4$

Пусть в прямоугольном параллелепипеде $\Pi=\{0\le x_i\le a_i,\ i=1,2,3\}$ задана кубическая разностная сетка w_h с шагом h, на которой определено уравнение для 7-точечной разностной схемы

$$\Delta_h u_h = P_h f;\quad u_{h,\Gamma}=\phi(\xi),\quad \xi\in\Gamma, \qquad /2.1/$$

соответствующее уравнению Пуассона

$$\Delta u = f(x_1,x_2,x_3);\quad u_\Gamma=\phi(\xi),\quad \xi\in\Gamma. \qquad /2.2/$$

Пусть решение $u(x)$, $x=(x_1,x_2,x_3)$, таково, что $u\in C^6(\bar{\Pi})$. На сетке w_h рассмотрим еще три разностных оператора Δ_{μ_i}, $i=1,2,3$, которые строятся аналогично оператору Δ_r из /1.5/ при повороте системы координат относительно одной из трех осей, параллельных Ox_i, $i=1,2,3$:

$$\Delta_{\mu_i}u(x)=h^{-2}\left(u(x+\Delta_i)-2u(x)+u(x-\Delta_i)\right)+\Delta_r u(x);\ i=1,2,3. \qquad /2.3/$$

где оператор Δ_r действует по формуле /1.5/ в плоскости, ортогональной оси Ox_i, а вектор $\Delta_i=h\ell_i$, где ℓ_i – единичный вектор, параллельный Ox_i. Уравнения

$$\Delta_{\mu_i}u_{\mu_i}=P_h f,\quad u_{\mu_i,\Gamma}=\phi(\xi),\quad i=1,2,3, \qquad /2.4/$$

однозначно разрешимы, и для решения u_{μ_i} в силу мажорантной теоремы /2/ справедлива априорная оценка типа /1.7/.

Теорема 2. Пусть $u(x)\in C^6(\bar{\Pi})$, $f_\Gamma=0$ и решения $v_i(x)$, $i=1,2,3$, уравнения

$$\Delta v_i = -\frac{1}{12}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{d^4}{dx_k^4}+6\frac{d^4}{dx_m^2\,dx_n^2}\right)u,\quad m\ne n\ne i;\quad v_{i,\Gamma}=0, \qquad /2.5/$$

имеют ограниченные четвертые производные, т.е. $v_i\in C^4(\bar{\Pi})$. Тогда для решений $u_{\mu i}$ уравнения /2.4/ справедливо соотношение

$$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}u_{\mu_i}(x)+\frac{h^2}{12}f(x)=u(x)+O(h^4),\quad x\in w_h. \qquad /2.6/$$

Доказательство. Для функций u_{μ_i} из /2.4/ справедливы разложения

$$P_h u-u_{\mu_i}=-P_h\,d_{1,i}(x)\,h^2+O(h^4);\quad i=1,2,3, \qquad /2.7/$$

где, учитывая, что $r^2=2h^2$,

$$\Delta d_{1,i}=-\frac{2}{4!}\left(\frac{d^4}{dx_i^4}+\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx_k}+\frac{d}{dx_n}\right)^4+\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx_k}-\frac{d}{dx_n}\right)^4\right)u; \qquad /2.8/$$

$$d_{1,i}(\xi)=0,\quad \xi\in\Gamma;\quad k\ne n\ne i.$$

Это следует из теоремы 1, /4/ если учесть, что $d_{1,i} \in C^4(\overline{\Pi})$ в силу условия /2.5/. Обозначим $A_i = \frac{d}{dx_i}$, $i = 1,2,3$, тогда $\Delta u = (\sum_{i=1}^{3} A_i^2)u = f$. Из /2.8/ следует, что

$$\Lambda(\sum_{i=1}^{3} d_{1,i}) = -\frac{1}{12}\cdot 3(\sum_{i=1}^{3} A_i^2)^2 u = -\frac{1}{4}\Delta f,$$

откуда, используя условие $f_\Gamma = 0$, получаем

$$\sum_{i=1}^{3} d_{1,i} + \frac{1}{4} f = 0, \qquad x \in \overline{\Pi}. \qquad /2.9/$$

Суммируя равенства /2.7/ по i и учитывая /2.9/, получим /2.6/. Теорема доказана.

Отметим, что в формуле /2.6/ решение u_h уравнения /2.1/ не используются, а требуются лишь сеточные функции u_{μ_i} из /2.4/. Так как каждое уравнение /2.4/ распадается на две независимых подсистемы, то достаточно проводить все расчеты на массиве, вдвое меньшем, чем w_h.

Рассмотрим четырехмерный случай $n=4$. Оператор Лапласа тремя разными способами представим в виде суммы двумерных

$$\Delta = \Delta(x_1, x_2) + \Delta(x_3, x_4) = \Delta(x_1, x_3) + \Delta(x_2, x_4) = \Delta(x_1, x_4) + \Delta(x_2, x_3),$$

где аргументы указывают, для каких переменных определен соответствующий оператор на плоскости. Для решения уравнения Пуассона в области $\Pi = \{0 \le x_i \le a_i;\ i = 1,2,3,4\}$

$$\Delta u = f(x);\quad u_\Gamma = \phi(\xi), \qquad x = (x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad /2.10/$$

построим разностную сетку w_h с одинаковым во всех направлениях шагом h, покрывающую Π. Для каждого из трех представлений оператора Δ построим на w_h разностный оператор Λ_{τ_i}, $i=1,2,3$, являющийся суммой двух операторов типа Λ_τ из /1.5/, действующих в соответствующих двумерных подпространствах. Например,

$$\Lambda_{\tau_1} u = \Lambda_\tau (x_1, x_2) u + \Lambda_\tau (x_3, x_4) u.$$

<u>Теорема 3.</u> Пусть $u \in C^6(\overline{\Pi})$, $f_\Gamma = 0$ и решения $v_i(x)$, $i=1,2,3$, уравнения

$$\Delta v_i = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\frac{d^4}{dx_k^4} + 3D_i\right)u;\ v_{i,\Gamma} = 0,\ i = 1,2,3, \qquad /2.11/$$

где

$$D_1 = \frac{d^4}{dx_1^2 dx_2^2} + \frac{d^4}{dx_3^2 dx_4^2};\ D_2 = \frac{d^4}{dx_1^2 dx_3^2} + \frac{d^4}{dx_2^2 dx_4^2};\ D_3 = \frac{d^4}{dx_1^2 dx_4^2} + \frac{d^4}{dx_2^2 dx_3^2},$$

имеют ограниченные четвертые производные, т.е. $v_i \in C^4(\overline{\Pi})$. Тогда для решений u_{τ_i} уравнений

$$\Lambda_{\tau_i} u_{\tau_i} = P_h f,\quad u_{\tau_i,\Gamma} = \phi(\xi),\quad i = 1,2,3, \qquad /2.12/$$

справедливо представление

$$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} u_{\tau_i}(x) + \frac{h^2}{4} f(x) = u(x) + O(h^4);\quad x \in w_h. \qquad /2.13/$$

<u>Доказательство</u>. Аналогично предыдущему для u_{τ_i} справедливо представление

$$P_h u - u_{\tau_i} = -P_h d_i(x)\tau^2 + O(\tau^4),\quad \tau^2 = 2h^2,$$

где функция $d_i(x)$ удовлетворяет уравнению /2.11/. Суммируя /2.11/ по i, получим

$$\Lambda(\sum_{i=1}^{3} d_i) = -\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{2}\Delta^2 u = -\frac{1}{8}\Delta f,$$

откуда в силу $f_\Gamma = 0$ получаем

$$\sum_{i=1}^{3} d_i(x) + \frac{1}{8} f(x) = 0, \quad x \in \overline{\Pi},$$

откуда и следует /2.13/. Теорема доказана.

§3. БИГАРМОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u = f(x,y),\quad u_\Gamma = 0,\quad \Delta u_\Gamma = 0 \qquad /3.1/$$

в прямоугольнике $\Pi = \{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$, покрытом квадратной сеткой $w_h = \{(x_i, y_j);\ x_i = ih,\ i = 0,1,\ldots,N;\ y_j = jh,\ j = 0,1,\ldots,M\}$ с шагом h. Уравнение /3.1/ аппроксимируем соотношением

$$\Delta_h^2 u_h = u_{h\bar{x}x\bar{x}x} + 2u_{h\bar{x}x\bar{y}y} + u_{h\bar{y}y\bar{y}y} = P_h f;$$
$$u_{h,\Gamma} = 0,\qquad \Lambda_h u_{h,\Gamma} = 0, \qquad /3.2/$$

с помощью введения фиктивных точек $(x_i, b+h)$, $(x_i, -h)$, $(-h, y_j)$, $(a+h, y_j)$, $1 \le i \le N-1$, $1 \le j \le M-1$.

После поворота системы координат на $\phi = \pi/4$ рассмотрим на сетке w_h решение u_τ уравнения

$$\Delta_r^2 u_r = P_h f, \quad u_{r,\Gamma} = 0, \quad \Delta_r u_{r,\Gamma} = 0, \qquad /3.3/$$

где Δ_r определен в /1.5/.

Теорема 4. Пусть $u(x,y) \in C^8(\bar{\Pi})$, $f(x,y)_\Gamma = 0$ и решение $v(x,y)$ уравнения

$$\Delta^2 v = -\frac{1}{6}(\Delta^3 - 2\Delta \frac{d^4}{dx^2 dy^2}) u;$$

$$v_\Gamma = 0, \quad \Delta v_\Gamma = -\frac{1}{12}(\Delta^2 - 2\frac{d^4}{dx^2 dy^2}) u, \qquad /3.4/$$

имеет ограниченную шестую производную, $v \in C^6(\bar{\Pi})$. Тогда для решений u_h и u_r уравнений /3.2/, /3.3/ справедливо представление

$$\frac{2u_h + u_r}{3} + \frac{h^2}{6}\Lambda_h u_h = u(x,y) + O(h^4), \quad (x,y) \in w_h. \qquad /3.5/$$

Доказательство. Прежде всего установим разложения

$$P_h u - u_h = -P_h c_1(x,y) h^2 + O(h^4), \qquad /3.6/$$

$$P_h u - u_r = -P_h d_1(x,y) r^2 + O(r^4), \quad r^2 = 2h^2, \qquad /3.7/$$

где функции c_1 и d_1 не зависят от h и r. Разложим погрешность аппроксимации схемы /3.2/ по степеням h:

$$P_h \Delta^2 u - \Lambda_h^2 P_h u = P_h \Lambda(\Delta u) - \Lambda_h (P_h \Delta u + \frac{2}{4!}(\frac{d^4}{dx^4} + \frac{d^4}{dy^4}) u \cdot h^2 +$$

$$+ a_2(x,y) h^4 + \eta_h) = P_h \Lambda(\Delta u) - \Lambda_h P_h \Delta u -$$

$$- \frac{2}{4!}\Lambda_h (\frac{d^4}{dx^4} + \frac{d^4}{dy^4}) u \cdot h^2 + \Lambda_h a_2(x,y) h^4 + \Lambda_h \eta_h =$$

$$= -\frac{1}{12}(\frac{d^4}{dx^4}\Delta + \frac{d^4}{dy^4}\Lambda) u \cdot h^2 - \frac{1}{12}\Lambda(\frac{d^4}{dx^4} + \frac{d^4}{dy^4}) u \cdot h^2 + \mu_h,$$

где $|\mu_h| \le ch^4$, так как $|\eta_h| \le ch^6$.

В итоге получаем

$$P_h \Delta^2 u - \Delta_h^2 P_h u = -\frac{h^2}{6}(\Delta^3 - 2\Delta \frac{d^4}{dx^2 dy^2}) u + O(h^4).$$

С учетом равенства

$$P_h \Delta u - \Delta_h P_h u = -\frac{2}{4!}(\frac{d^4}{dx^4} + \frac{d^4}{dy^4}) u \cdot h^2 + O(h^4)$$

искомое разложение принимает вид /3.6/, где $c_1(x,y)$ удовлетворяет уравнению /3.4/. Это разложение следует из теоремы 1,[4] поскольку задача /3.2/ удовлетворяет условиям мажорантной теоремы[2]. Здесь мажорантную функцию можно выбрать в виде

$$U(x,y) = k(R^4 - x^2 - y^2 - x^2 y^2),$$

где круг радиуса R содержит прямоугольник Π. При этом $U(x,y) \ge 0$, $k > 0$ и

$$\Delta^2 U = -4k, \quad \Delta U = -2(1 + x^2 + y^2) k \le -2k,$$

что и обеспечивает нужную априорную оценку решений уравнения /3.2/.

Аналогично тому, как выводилось соотношение /1.11/, и используя предыдущие рассуждения, получим /3.7/, где

$$\Delta^2 d_1 = -\frac{1}{6}\Delta(\Delta^2 - 2\frac{d^4}{dn^2 d\ell^2}) u,$$

$$d_{1,\Gamma} = 0, \quad \Delta d_{1,\Gamma} = -\frac{2}{4!}(\Delta^2 - 2\frac{d^4}{dn^2 d\ell^2}) u.$$

Это уравнение после перехода к переменным x, y примет вид

$$\Delta^2 d_1 = -\frac{1}{6}\Delta(\frac{1}{2}\Delta^2 + 2\frac{d^4}{dx^2 dy^2}) u,$$

$$d_{1,\Gamma} = 0, \quad \Delta d_{1,\Gamma} = -\frac{2}{4!}(\frac{1}{2}\Delta^2 + 2\frac{d^4}{dx^2 dy^2}) u. \qquad /3.8/$$

Сравнивая /3.8/ с уравнением /3.4/, для c_1 имеем

$$\Delta^2(c_1 + d_1) = -\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\Delta^3 u = -\frac{1}{4}\Delta^2(\Delta u),$$

$$c_{1,\Gamma} + d_{1,\Gamma} = 0; \quad \Delta(c_1 + d_1)_\Gamma = -\frac{2}{4!}\,\frac{3}{2}\Delta^2 u = -\frac{1}{8}\Delta(\Delta u),$$

или

$$\Lambda^2(c_1 + d_1 + \frac{1}{4}\Delta u) = 0; \quad (c_1 + d_1)_\Gamma = 0; \quad \Delta(c_1 + d_1 + \frac{1}{8}\Delta u)_\Gamma = 0,$$

откуда, учитывая, что $\Delta u_\Gamma = 0$ и $f_\Gamma = 0$, получаем

$$c_1 + d_1 + \frac{1}{4}\Delta u = 0. \qquad /3.9/$$

Из формулы /3.9/ следует, что $d_1 \in C^6(\bar{\Pi})$. Этот факт вместе с априорной оценкой для u_τ и дает /3.7/.

Комбинируя разложения /3.6/, /3.7/ с учетом /3.9/, приходим к формуле

$$\frac{2u_h + u_\tau}{3} + \frac{h^2}{6}\Delta u = u(x,y) + O(h^4), \quad x \in w_h,$$

которая в силу разложения /3.6/ приводится к виду /3.5/. Теорема доказана.

Отметим, что разностное уравнение /3.3/ аналогично предыдущему распадается на две независимые подсистемы, каждую из которых можно решать отдельно.

§4. СРАВНЕНИЕ ЧИСЛА ОПЕРАЦИЙ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ

Предположим, что для решения уравнений /1.4/ и /1.6/ используется итерационный метод, сходящийся со скоростью q^n, где q одно и то же для обоих уравнений. При расчетах по формуле /1.8/ вычисления u_h и u_τ заканчиваются, когда $\sigma_h = |\Delta_h u_h - f| \le h^4$, $\sigma_\tau = |\Delta_\tau u_\tau - f| \le \tau^4$. Расчет u_τ на сетке w_h проводится на двух сеточных областях $w_1 \cup w_2 = w_h$ с учетом того, что Δ_τ определен на двух независимых шаблонах. Расчет на сетке w_1 требует k_1 итераций, где

$$q^{k_1} = h^4, \quad k_1 = 4\frac{\ln h}{\ln q} = 4p.$$

Эту величину берем с коэффициентом 1/2, так как массив w_1 составляет половину первоначального. Используем полученное решение как начальное приближение при расчете на сетке w_2, для него $\sigma_\tau = ch^2$ в силу /1.11/. Число итераций на сетке w_2 поэтому равно k_2, где

$$q^{k_2} = ch^2, \quad k_2 = \frac{\ln c + 2\ln h}{\ln q} = 2p + N_0,$$

где N_0 не зависит от h. Эти итерации также учитываем с коэффициентом 1/2. Для расчета u_h с использованием u_τ потребуется $2p + N_1$ итераций, где N не зависит от h. Общее число итераций Q равно

$$Q = \frac{1}{2}\cdot 4p + \frac{1}{2}\cdot 2p + \frac{1}{2}N_0 + N_1 + 2p = 5p + k_0.$$

При расчете с помощью метода Ричардсона при удвоении первоначального шага потребуется

$$Q_1 = 4p + 4\cdot 2p + L_0 = 12p + L_0$$

итераций. Тот же метод с измельчением шага поочередно для переменных x и y потребует

$$Q_2 = 4p + 2\cdot 2p + 2\cdot 2p + M_0 = 12p + M_0$$

итераций. Для метода Ричардсона на областях w_{h_1} и w_{h_2}, где $h_1 = 1/N$, $h_2 = 1/N+1$ - число операций $Q > 4p + 2p = 6p$ без учета затрат на построение новой сеточной области и интерполяцию с одной сетки на другую.

Для $n = 3$ расчеты по формуле /2.6/ дают

$$Q = \frac{1}{2}4p_1 + \frac{1}{2}\cdot 2p_1 + 2\cdot 2p_1 = 7p_1$$

итераций без учета слагаемых, не зависящих от h. Метод Ричардсона с использованием сетки $w_{h/2}$ дает

$$Q_1 = 4p_1 + 8\cdot 2p_1 = 20p_1$$

итераций, а при удвоении массива поочередно для каждой координаты получим

$$Q_2 = 4p_1 + 3\cdot 2\cdot 2p_1 = 16p_1$$

итераций. Для сеток с шагами $h_1 = 1/N$ и $h_2 = 1/N+1$

$$Q_3 \ge 4p_1 + 2p_1 = 6p_1$$

итераций без учета интерполяции и построения новой сетки.

В случае $n = 4$ для формулы /2.13/ имеем

$$Q = \frac{1}{2}4p_2 + \frac{1}{2}\cdot 2p_2 + 2\cdot 2p_2 = 7p_2$$

итераций, а для трех рассмотренных выше вариантов метода Ричардсона $Q_1 = 4p_2 + 16\cdot 2p_2 = 36p_2$, $Q_2 = 4p_2 + 4\cdot 2\cdot 2p_2 = 20p_2$, $Q_3 \ge 4p_2 + 2p_2 = 6p_2$.

При расчетах с точностью до h^5 получается аналогичное соотношение числа итераций. Легко видеть, как возрастает эффективность предложенного метода при увеличении размерности пространственной переменной. Число операций каждый раз примерно равно тому, которое требуется в методе Ричардсона на двух сетках с наиболее близкими шагами h_1, h_2. Однако во втором случае требуется построение новой разностной сетки и интерполяция с одной сетки на другую, в то время как в нашем случае все расчеты проводятся на одном массиве точек.

§5. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР И НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рассмотрим уравнение

$$\Delta u = -2\pi^2 \sin\pi x \cdot \sin\pi y, \quad u_\Gamma = 0$$

в квадрате $\Pi = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$, решением которого является функция $u(x,y) = \sin\pi x \cdot \sin\pi y$. Используем формулу /1.8/ теоремы 1 при расчетах на квадратной сетке w_h с шагом $h=0.1$. Величина $\max|u_h - u(x,y)|$ для решения $u_h(1,4)$ на сетке w_h достигается в точке $x=0,5$, $y=0,5$, где $u_h - u(x,y) = -0,00827$. Для этой же точки $u_\tau - u(x,y) = -0,0336$, где u_τ есть решение уравнения /1.6/. Интерполяция по формуле /1.8/ дает сеточную функцию v_h, для которой в этой точке $v_h - u(x,y) = 0,000247$. Те же самые величины, но для точки $x=h$, $y=2h$ имеют значения -0,0015- -0,0061 и -0,0000449 соответственно.

Таким образом, точность предложенного метода совпадает по порядку с точностью метода Ричардсона. При этом расчеты экстраполируемых решений проводятся с использованием одного и того же массива точек, что упрощает практическую реализацию метода. Кроме того, разностные схемы, построенные после поворота системы координат, определены на нескольких независимых шаблонах, что приводит к расщеплению разностного уравнения на несколько независимых подсистем.

Ограничение $f|_\Gamma = 0$, фигурирующее во всех теоремах, несущественно. От него можно избавиться двумя способами: либо вычитая из решения $u(x,y)$ некоторое частное решение, либо прибавляя к граничной функции $\phi(\xi)$ в разностном уравнении величину, пропорциональную $h^2 f(\xi)$, $\xi \in \Gamma$, чтобы обратить в нуль на границе выражения типа $c_1 + d_1 + af(\xi)$, возникающие при доказательствах теорем. Отметим, что требования гладкости решения $u(x,y)$ совпадают с соответствующими для разностных схем повышенного порядка аппроксимации. Кроме того, формулы /1.8/, /1.9/, /2.6/, /2.12/, /3.5/ сразу дают разностные схемы повышенного порядка аппроксимации и одновременно сводят их к нескольким задачам для простейших разностных схем.

Все вышесказанное позволяет надеяться, что метод уточнения разностных решений, использующий в качестве параметра экстраполяции угол поворота системы координат, окажется полезным при решении задач математической физики, связанных с оператором, инвариантным относительно поворота системы координат. В качестве примера можно назвать задачи на собственные значения, связанные с оператором Лапласа в двумерной или трехмерной области. Метод Ричардсона в задачах на собственные значения для интегродифференциального уравнения применялся в /6/.

Автор благодарен проф. Е.П.Жидкову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. "Наука", М., 1979.
2. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. "Наука", М., 1976.

3. Волков Е.А. Дифф. уравнения, 1965, т.1, №7, с.946-960.
4. Жидков Е.П., Нгуен М., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р5-12979, Дубна, 1979.
5. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Айрян Э.А. ОИЯИ, Р5-80-617, Дубна, 1980.
6. Нгуен М., Хоромский Б.Н., Ямалеев Р.М. Уточнение разностных решений задачи на собственные значения для интегро-дифференциального уравнения. Дифф. уравнения, 1980, т.16, №7, с.1293-1302; ОИЯИ, Р5-12993, Дубна, 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 декабря 1980 года.