объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-80-617

Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский, Э.А.Айрян

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В СТУПЕНЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ

Направлено в журнал "Вычислительная математика и математическая физика".

1980

Эффективность применения метода Ричардсона для уточнения решений разностных задач определяется разложением приближенного решения по степеням шага сетки h. В работах [I,2] показано, что существование такого разложения при подходящей аппроксимации исходного оператора конечномерным связано, с одной стороны, с обратимостью производных Фреше непрерывного и разностного оператора на точном решении, а с другой – с выбором некоторых классов функций из области определения и области значения исходного оператора, определяющих обычно соответствие между гладкостью входных данных и гладкостью решения. Например, как показано в работе [3], для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками производные решений в окрестности этих точек имеют, вообще говоря, степенные особенности даже при бесконечно дифференцируемых правых частях. Это обстоятельство значительно усложняет применение метода Ричардсона в таких задачах.

В настоящей работе строятся разложения по степеням шага сетки решений двумерного уравнения Пуассона для пятиточечной разностной схемы в ступенчатых областях при различных типах краевых условий на разных участках границы. Эти разложения позволяют повышать точность приближенных решений с помощью экстраполяции на последовательности сеток. Приводятся результаты численных экспериментов, иллюстрирующие эффективность такой экстраполяции.

Аналогичный подход может быть использован и в трехмерном случае.

§ I. Постановка задачи.

Пусть G -область в плоскости OX_1X_2, составленная из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Пусть Γ - граница G, $\bar{G} = G \cup \Gamma$, $n(\xi)$ - внутренняя нормаль к Γ в точке $\xi \in \Gamma$. Рассмотрим задачу

(I.I) $\Delta u = f(x_1,x_2)$, $x=(x_1,x_2)\in G$; $P^m u = g$, $x\in\Gamma^m$, $m=0,1,2$,
где $P^0 = \partial/\partial n$, $P^1 = E$, E – единичный оператор, $P^2 = \partial/\partial n - \sigma E$, $\sigma > 0$, Γ^m, $m=0,1,2$ – части границы $\Gamma = \Gamma^0 \cup \Gamma^1 \cup \Gamma^2$, на которых заданы краевые условия Неймана (Γ^0), Дирихле (Γ^1) и смешанные (Γ^2), $\Gamma^1 \neq \phi$. Об относительном расположении участков Γ^0, Γ^1, Γ^2 сказано в § 4. Функция $f(x)\in W_2^K(\bar G)$, $K = 2L+2$, $L \geq 1$, а $g \in W_2^{K+1/2}(\Gamma)$. Соответствующие нормы, согласно[3], определяются выражениями

$$\|u\|^2_{W^K(\bar G)} = \sum_{m=0}^{K} \iint_{\bar G} \left| \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right|^2 dx \; , \; \left(\frac{\partial^m}{\partial x^m} = \frac{\partial^m}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}} \; , \; i_1 + i_2 = m \right)$$

$$\|g\|_{W^{K-1/2}(\Gamma)} = \inf \|v\|_{W^K(\bar G)} \; , \; P^m v/\Gamma = g.$$

Как отмечено в[4], задача (I.I) имеет при $g=0$ обобщенное решение $u(x)\in W_2^1(\bar G)$, т.е.

(I.2) $$-\iint_{\bar G} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right) dx + \int_{\Gamma^2} \sigma u \eta \, ds = \iint_{\bar G} f\cdot\eta \, dx$$

при произвольной функции $\eta \in W_2^1(\bar G)$, $\eta/\Gamma_1 = 0$. Это решение, вообще говоря, не принадлежит даже $W_2^2(\bar G)$. Соотношение (I.2) приводит уравнение (I.I) к операторному виду

(I.3) $\Lambda u = f$, $\Lambda : W_2^1 \to W_2^1$, $u/\Gamma_1 = 0.$

В общем случае $g \neq 0$ особенности у решения $u\in W_2^1(\bar G)$ в окрестности угловой точки (x_0, y_0) с углом φ_0 имеют, согласно[3], следующий вид:

(I.4) $$u = \sum_{0<\lambda_p<K+1} a_{pq} r^{\lambda_p} P_{pq}(r \ln^q r) + \sum_{0\le i_1+i_2\le K+1} a_{i_1 i_2} x^{i_1} y^{i_2} + \sum_{2\le j_1\le K+1} r^{j_1} \ln^{j_2} r\, \theta_{j_1 j_2}(\varphi) + w, \quad r = [(x_1-x_0)^2 + (x_2-y_0)^2]^{1/2},$$

p, q, j_1 – целые числа, P_{pq} – полином, коэффициенты которого есть комбинации тригонометрических функций. При $q=0$ $P_{pq} = A\sin\lambda_p\varphi + B\cos\lambda_p\varphi$. Функции $\theta_{j_1 j_2}(\varphi)$ – бесконечно дифференцируемы. Главный член асимптотики (I.4) есть $r^{\lambda_1}(A\sin\lambda_1\varphi + B\cos\lambda_1\varphi)$. Функция $d = \sum r^{j_1} \ln^{j_2}(r) Q_{j_1 j_2}(\varphi)$ обращает в нуль величину $P^m d$ на сторонах угла. Кроме того, $w \in W_0^{K+2}(\bar G)$, $\|v\|_{W_0^K(\bar G)} = \sum_{m=0}^{K} \iint_{G} r^{-2(K-m)} \left| \frac{\partial^m v}{\partial x^m} \right| dx$, (I.5) $\|w\|_{W_0^{k+2}(G)} \le C\left(\|f\|_{W^k(G)} + \|u\|_{W_2^1(G)}\right).$

Числа λ_p, функции $\theta_{j_1 j_2}$ и коэффициенты P_{pq} есть собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

(I.6) $\vartheta''_{\varphi\varphi} - \lambda^2 \vartheta = 0, \quad \rho_1^m \vartheta(0) = \rho_1^m \vartheta(\varphi_0) = 0, \quad m = 0,1,2,$

где $\rho_1^1 = E$, $\rho_1^2 = \partial/\partial\varphi - \sigma E$, $\rho_1^0 = \partial/\partial\varphi$. Решение задачи (I.6) при различных комбинациях условий ρ_1^m на разных сторонах угла φ_0 имеют вид: для ρ_1^1, ρ^1 $\vartheta_p = \sin\frac{\pi p}{\varphi_0}\varphi$, $\lambda_p = \frac{\pi p}{\varphi_0}$; для ρ_1^1, ρ_1^i, $i = 0,2$ имеем $\vartheta_p = \sin\lambda_p\varphi$, $\lambda_p\varphi_0 + \operatorname{arctg}\lambda_p/\sigma = p\pi$; для пары ρ_1^2, ρ_2^2, $\vartheta_p = p^{-1}\sin\lambda_p\varphi + \frac{\pi}{\varphi_0\sigma}\cos\lambda_p\varphi$, $\lambda_p = \frac{p\pi}{\varphi_0}$, а при ρ_1^0, ρ_2^2 $\vartheta_p = \cos\lambda_p\varphi$, $\lambda_p \operatorname{tg}\lambda_p\varphi_0 = \sigma$.

Представление (I.4) справедливо для области G с одной угловой точкой, однако, следуя работе /4/, можно с помощью разложения единицы

$$u = \sum_{i=1}^{J} \eta_i u + \left(1 - \sum_{i=1}^{J} \eta_i\right) u,$$

где J - число угловых точек, получить разложение типа (I.4), в которое входят асиптотики от каждой угловой точки.

Отметим, что коэффициенты $\theta_{j_1 j_2}$ зависят лишь от правой части $f(x_1, x_2)$ в угловой точке и граничных условий и могут быть уничтожены при выполнении некоторых условий согласования. Числа a_{pq} есть линейные функционалы от $f(x)$ интегрального типа.

Пусть область G и квадратная разностная сетка $\bar{w}$ подчиняются требованиям из § 4, а условие ρ^i, $i = 0,2$ аппроксимируется оператором ρ_h^i либо по формуле (4.I), для которой погрешность аппроксимации разлагается по степеням h^2, либо по простейшей схеме порядка $O(h)$. При такой аппроксимации граничных условий пятиточечный оператор Лапласа

$$\Delta_h u = (u_{\bar{x}_1})_{x_1} + (u_{\bar{x}_2})_{x_2}$$

удовлетворяет условиям теоремы сравнения из /5/ с мажорантной функцией (4.II) для областей второго типа (§4) и имеет место априорная оценка (4.9) для областей первого и третьего типов. При этом для оператора

(I.7) $$\Lambda_h u = \begin{cases} \Delta_h u, & x \in G \\ P_h^m u, & x \in \Gamma^m, \quad m = 0,1,2 \end{cases}$$

существует обратный оператор, равномерно ограниченный по h.

Обозначим через P_h оператор проектирования на сетку $\bar{\omega}$. Тогда для функции u вида (I.4) погрешность аппроксимации при граничных условиях (4.I) имеет представление

$$
\begin{aligned}
&\text{(I.8)} \quad P_h \Delta u - \Delta_h P_h u = \sum_{i=1}^{L} P_h c_i(x) h^{2i} + v_h \cdot O(h^{2L+2}), \quad x \in G \\
&\qquad\quad P_h P^m u - P_h^m P_h u = \sum_{i=1}^{L} P_h \alpha_i(\xi) h^{2i} + \beta_h \cdot O(h^{2L+2}), \quad \xi \in \Gamma^m,
\end{aligned}
$$

где коэффициенты c_i, α_i имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\text{(I.9)} \quad c_i(x) = -\frac{2}{2(i+1)!} \delta_{i+1} u, \quad \delta_p = \frac{d^{2p}}{dx^{2p}} + \frac{d^{2p}}{dy^{2p}}, \\
&\qquad\quad \alpha_i(\xi) = \frac{2}{(2i+1)!} \frac{d^{2i+1}}{dn^{2i+1}} u - \sigma \frac{2}{2i!} \frac{d^{2i}}{dn^{2i}} u \equiv \mu_i u, \quad \xi \in \Gamma
\end{aligned}
$$

и согласно (I.4) в окрестности угловой точки $x_\circ$ справедливо представление

$$
\begin{aligned}
&c_i = \sum_{\lambda_p} a'_{pq} r^{\lambda_p - 2(i+1)} P'_{pq}(r \ln^q r) + \sum_{j_1} r^{j_1 - 2(i+1)} \ln^{\gamma'_2} r\, \theta'_{j_1 j_2}(\varphi) + \\
&\text{(I.10)} \quad + v_i(x), \qquad v_i \in W^{k-2i}(\bar{G}), \\
&\alpha_i = \sum_{\lambda_p} a''_{pq} r^{\lambda_p - 2i-1} P''_{pq}(r \ln^q r) + \sum_{j_1} r^{j_1 - 2i-1} \ln^{\gamma''_2} r\, \theta_{j_1 j_2}(\varphi) + \\
&\qquad\quad + \beta_i(\xi), \qquad \beta_i \in W^{k-2i+1/2}(\Gamma).
\end{aligned}
$$

Коэффициенты v_h, β_h имеют оценки

$$
\begin{aligned}
&\qquad |v_h| \le c\, |\delta_{2(L+2)} u(\eta)|, \quad |\eta - x_\circ| \geq h, \\
&\text{(I.11)} \quad |\beta_h| \le c \left| \frac{d^{2L+3}}{dn^{2L+3}} u(\eta) \right|, \quad \eta \in \Gamma, \quad |\eta - x_\circ| \geq h.
\end{aligned}
$$

Пусть u^* - точное решение задачи (I.I). Как будет показано ниже, решение разностной задачи

$$
\text{(I.12)} \quad \Delta_h u_h = P_h f, \quad P_h^m u_h = P_h^m g, \quad m = 0, 1, 2
$$

при малых h имеет представление

$$
\text{(I.13)} \quad u_h = P_h u^* + P_h \Big(\sum_{i=1}^{L} a_i(x) h^{2i} \Big) + \eta_h \cdot O(h^{2L+2}),
$$

однако коэффициенты a_i, η_h имеют, вообще говоря, степенные особенности в окрестности угловых точек.

Отметим, что в книге /1/ получено разложение $u_h = P_h u^* + \vartheta h^2 + h^{3+\alpha}\eta_h$, $|\vartheta|, |\eta_h| < c$ для задачи Дирихле в прямоугольнике при выполнении некоторых условий согласования. В работе /6/ установлено разложение типа (I.13) с ограниченными коэффициентами a_i, η_h в прямоугольнике при выполнении условий согласования для всех вспомогательных задач для коэффициентов a_i. Действительно, в случае угла $\varphi_0 = \pi/2$ и $\sigma = 0$ имеем $a_{pq} = 0$ (так как числа λ_p -целые), а коэффициенты $\theta_{j,k}$ явно выражаются через значения $f(x,y)$ и краевые условия в угловых точках. Однако при $\varphi_0 = \pi$ и $\varphi_0 = 3\pi/2$, $a_{pq} \neq 0$ и условия согласования имеют весьма громоздкий вид. В работах /7/ получено асимптотическое представление первого члена ошибки в разложении (I.13) по степеням h^λ для модельных задач с одной угловой точкой вида $\pi/2$, π, $3\pi/2$, а в /8/ строится разностная схема, которая точно аппроксимирует первый член асимптотики (I.2). ВРС с аддитивным выделением особенности рассматриваются в /4/.

§ 2. Вывод разложения типа (I.13)

Построим сначала разложение (I.13) для гладких решений $u \in W^{k+2}(\bar G)$. В этом случае коэффициенты $c_i, a_i, \vartheta_h, \beta_h$ в (I.8) ограничены, $c_i \in W^{k-2i}(\bar G)$, $\beta_i \in W^{k-2i+1/2}(\Gamma)$. Используя результаты из /1,2/, для коэффициентов $a_i(x)$, η_h из (I.13) получим уравнения

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} &\Delta a_i = -\sum_{p=1}^{i+1} \frac{2}{(2p)!}\delta_p a_{i+1-p}, \quad P^m a_i = 0, \quad x \in \Gamma^1, \\ &P^m a_i = -\sum_{p=1}^{i} \mu_i a_{i-p}, \quad x \in \Gamma^0, \Gamma^2, \\ &i = 1,\dots,L; \quad a_0 = u^*, \end{aligned}$$

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} &\Delta_h \eta_h = \vartheta_h + \sum_{i=1}^{L} h^{2i} d_{h,i} \cdot O(h^{2(L-i)+2}), \\ &P_h^m \eta_h = 0, \quad x \in \Gamma^1, \quad P_h^m \eta_h = \beta_h + \sum_{i=1}^{L} h^{2i} e_{h,i}\, O(h^{2(L-i)+1}), \\ &x \in \Gamma^0, \Gamma^2, \end{aligned}$$

где сеточные функции ϑ_h, β_h ограничены величиной $O(h^{2L+1})$, а функции $d_{h,i}$ и $e_{h,i}$ ограничены в окрестностях угловых точек величинами

(2.3) $|d_{h,i}| \le c\,|\delta_{l-i+1} a_i|,\ |e_{h,i}| \le c\,|\mu_{l-i} a_i|.$

Символы δ_p , μ_p определены в (I.9).

Лемма I. Пусть в окрестности угловой точки

$$f(x) = r^{\lambda} \ln^{q} r\, \Psi(\varphi),\quad f \cdot r^{-\lambda} \ln^{-q} r \in W^{k}(G),$$
$$g(\xi) = r^{\lambda+1} \ln^{p} r \quad \chi(m),\ \xi \in \Gamma^{m},\quad m = 0, 1, 2,$$

где $q, p \ge 0$, $\chi(m) = 0, m = 0, 1;\ \chi(2) = 1$, а $\Psi(\varphi)$ – собственная функция задачи (I.6). Тогда решение u задачи (I.I) представимо в виде

(2.4) $$u = \sum_{i=0}^{Q} r^{\lambda+2} c_i \ln^{q_i} r\, \Psi_0(\varphi) + \sum_{\lambda_j > 0} r^{\lambda_j} \Psi_j(\varphi) + w(x),$$

где Ψ_0, Ψ_j – линейные комбинации синусов и косинусов, $w \in W^{k+2}(\bar{G})$, r – расстояние до угловой точки.

Доказательство. Рассмотрим сначала задачу (I.I) при $g = 0$. Пусть функции $\Psi(\varphi)$ соответствует собственное значение λ_n . Рассмотрим два случая:

I. Пусть $\lambda \ne \lambda_n$, тогда найдем частное решение задачи (I.I), удовлетворяющее краевым условиям на участках границы, прилегающих к угловой точке, в виде

$$u_0 = r^{\lambda+2} \left(\sum_{i=0}^{q} c_i \ln^{q-i} r \right) \Psi(\varphi).$$

В силу соотношения

(2.5) $$\begin{aligned} \Delta r^{\lambda} \ln^{q} r\, \Psi(\varphi) &= r^{\lambda-2}(\lambda(\lambda-1)\ln^{q} r + q(2\lambda-1)\ln^{q-1} r + \\ &+ q(q-1)\ln^{q-2} r)\Psi(\varphi) + r^{\lambda-2}(\lambda \ln^{q} r + q \ln^{q-1} r)\Psi(\varphi) + \\ &+ r^{\lambda-2} \ln^{q} r\, \Psi''(\varphi) = \\ &= r^{\lambda-2} \ln^{q-2} r\,((\lambda^2 - \lambda_n^2)\ln^2 r + 2q\lambda \ln r + q^2 - q)\Psi(\varphi) \end{aligned}$$

коэффициенты c_i можно найти, подставляя (2.5) в (I.I) и приравнивая множители при равных степенях $\ln r$. Получается система

$$\begin{cases} c_0(\lambda^2-\lambda_n^2)=1 \\ c_0\, 2q\lambda \quad + c_1(\lambda^2-\lambda_n^2)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{i-2}\,(q-i+2)(q-i+1)+c_{i-1}\,2\cdot(q-i+1)\lambda+c_i(\lambda^2-\lambda_n^2)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{q-2}\cdot 2+c_{q-1}\,2\lambda+c_q(\lambda^2-\lambda_n^2)=0, \end{cases}$$

которая однозначно разрешима.

2.Пусть $\lambda=\lambda_n$, тогда выполнено соотношение

$$\Delta r^\lambda \ln^q r\ \Psi(\varphi)=$$
$$= r^{\lambda-2}\ln^{q-2} r\,(2q\lambda\ln r+q^2-q)\Psi(\varphi).$$

Поэтому ищем частное решение (I.I) в виде

$$u_0=r^{\lambda+2}\Big(\sum_{i=0}^{q} c_i \ln^{q-i+1} r\Big)\Psi(\varphi),$$

а для коэффициентов c_i получаем систему

$$\begin{cases} c_0\, 2(q+1)n=1 \\ c_1\, 2q\lambda \ + c_0\, q(q+1)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{i-1}\,(q-i+2)(q-i+1)+c_i\, 2(q-i+1)\lambda=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{q-1}\cdot 2\ +\ c_q\cdot 2\cdot\lambda=0 \end{cases},$$

которая также однозначно разрешима. Представляя искомое решение задачи (I.I) в виде $u=u_0+v_0$, для функции v_0 получаем разложение типа (I.4).

Решение задачи (I.I) при $f=0$ представим в виде $u=u_1+v_1$, где $u_1=r^{\lambda+2}\ln^p r\ \vartheta(\varphi)$, а $\vartheta(\varphi)$ имеет вид $a\sin\mu\varphi+b\cos\mu\varphi$ в зависимости от краевых условий, так что u_1 удовлетворяет условиям $\rho^m u_1=g$ на сторонах угла. Тогда вид функции v_1 устанавливается с помощью предыдущих рассуждений. Лемма доказана.

Для оценки сеточной функции η_h из (2.2) изучим асимптотики решений разностных уравнений (I.I2) с правой частью вида

$$\Delta_h u_h=P_h(r^\lambda \ln^q r\ \Psi(\varphi))\equiv f_h\ ,\quad \lambda<0 \tag{2.6}$$
$$P_h^m u_h=0\ ,\qquad x\in\Gamma^m.$$

Пусть Γ_1^ℓ, Γ_2^ℓ – части границы длины ℓ, $\ell\sqrt{2} \le 1$, прилегающие к рассматриваемой вершине. Справедлива следующая

Лемма 2. Решение u_h задачи (2.6) при достаточно малом h подчиняется оценке

$$(2.7) \qquad u_h \le \max|\Psi(\varphi)|\cdot v_h + \alpha_h ,$$

где

$$(2.8) \qquad v_h = \begin{cases} |\lambda+2|^{-1} r^{\lambda+2-\varepsilon}, & \lambda \ne -2, \\ \ln r, & \lambda=-2,\ q=0 \\ 2\ln \ell/2\ r \ln r, & \lambda=-1,\ q=0, \end{cases}$$

а $\varepsilon>0$ – сколь угодно мало, и при $q=0$, $\varepsilon=0$. Сеточная функция α_h удовлетворяет уравнению

$$(2.9) \qquad \begin{gathered} \Delta_h \alpha_h = g_h;\quad g_h=0,\quad x\in G';\ g_h=f_h,\ x\in G\setminus G' \\ P_h^m(\alpha_h+v_h)=0,\quad x\in \Gamma_1^\ell\cup\Gamma_2^\ell;\ P_h^m\alpha_h=0,\ x\in\Gamma\setminus(\Gamma_1^\ell\cup\Gamma_2^\ell), \\ G'=G\cap\{|x|\le\ell,\quad |y|\le\ell\}. \end{gathered}$$

Доказательство: Пусть $\varphi_0=\pi/2$. Рассмотрим сеточную область G_h', $G_h'=\bar{w}\cap G'$. Изучим три возможности: $0>\lambda>-2$; $\lambda=-2$, $q=0$; $\lambda<-2$.

Так как $r\le 1$, при $x\in G'$, то $|\ln^q r|\le C(q)r^{-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. Далее положим $r=|x|+|y|$, учитывая, что переход к величине $r=(x^2+y^2)^{1/2}$ дает эквивалентные по порядку оценки, т.к. $c_1(|x|+|y|)\le(x^2+y^2)^{1/2}\le c_2(|x|+|y|)$.

Рассмотрим частное решение уравнения

$$(2.10) \qquad \Delta_h v_h^1 = c(q) r^{\lambda-\varepsilon},\quad r=|x|+|y|,$$

имеющее след v_h из (2.8) на сторонах Γ_1, Γ_2. Построим для него мажорантную функцию ξ_h, имея в виду применение мажорантной теоремы из /5/ для краевых условий P^1. Полагая $p=\varepsilon-\lambda$, рассмотрим сеточную функцию

$$(2.11) \qquad \xi_h=(i+j)^{2-p},\ 0\le i,\ j\le N,\ i+j\ne 0,\ p>2.$$

Поскольку

$$\Delta_h \xi_h = \left[(i+j-1)^{2-p}+(i+j+1)^{2-p}+(i+j+1)^{2-p}+(i+j-1)^{2-p}-4(i+j)^{2-p}\right]h^{-p} =$$

$$= 2\left[(K-1)^{2-p}-2K^{2-p}+(K+1)^{2-p}\right]h^{-p}, \qquad K=i+j\geqslant 2,$$

то разностный оператор в переменных $z=x+y$ становится одномерным. Докажем, что

(2.12) $\quad \Delta_h \xi_h \geqslant 2c(p)\,z^{-p}, \qquad c(p)>0.$

Это утверждение эквивалентно оценке

(2.13) $\quad \left(\dfrac{K}{K-1}\right)^{p-2}+\left(\dfrac{K}{K+1}\right)^{p-2}-2 \geqslant \dfrac{c(p)}{K^2}, \qquad K\geqslant 2.$

При $p>2$ левую часть неравенства (2.13) приведем к виду

$$\left[\left(\frac{K}{K-1}\right)^{\frac{p-2}{2}}-\left(\frac{K}{K+1}\right)^{\frac{p-2}{2}}\right]^2+2\left[\left(\frac{K^2}{K^2-1}\right)^{\frac{p-2}{2}}-1\right]>$$

$$>2\left[\left(1+\frac{1}{K^2-1}\right)^{\ell}-1\right]=\frac{2\ell}{K^2-1}+2\sum_{i=2}^{\infty}c_i\,(K^2-1)^{-i}, \qquad \ell=\frac{p}{2}-1,$$

$$c_i=\frac{\ell(\ell-1)\ldots(\ell-i+1)}{i!}.$$

Если $\ell(\ell-1)>0$, то воспользуемся очевидным соотношением

(2.14) $\quad c_i\,(K^2-1)^{-i}+c_{i+1}\,(K^2-1)^{-(i+1)}>0, \qquad i=2,4,6,\ldots,$

и получим $c(p)=2\ell=p-2$.

В случае $\ell-1\leqslant 0$ имеет место неравенство

$$\frac{\ell}{K^2-1}+\frac{\ell(\ell-1)}{2!\,(K^2-1)^2}=\frac{\ell}{K^2-1}\left(1+\frac{\ell-1}{2(K^2-1)}\right)\geqslant\frac{5}{6}\,\frac{\ell}{K^2-1},$$

а для оценки оставшейся суммы применим неравенство (2.14) при $i=3,5,7,\ldots$. В итоге $c(p)=\frac{5}{6}\left(\frac{p}{2}-1\right)$.

В случае $2>p>0$ нужное неравенство имеет вид

$$S(K)\equiv\left(\frac{K-1}{K}\right)^{\ell}+\left(\frac{K+1}{K}\right)^{\ell}-2\geqslant\frac{c(\ell)}{K^2}, \qquad K\geqslant 2, \quad \ell=2-p.$$

При $\ell > 1$ с помощью разложения

$$S(k) = 1 - \frac{\ell}{k} + \frac{\ell(\ell-1)}{2!\,k^2} + \dots + 1 + \frac{\ell}{k} + \frac{\ell(\ell-1)}{2!\,k^2} + \dots - 2 =$$

$$= \frac{\ell(\ell-1)}{k^2} + u_k, \qquad u_k > 0$$

получаем $c(\ell) = \ell(\ell-1)$.

При $0 < \ell < 1$ имеем

$$S(k) = \frac{\ell(\ell-1)}{k^2} + S_1, \qquad S_1 < 0$$

поэтому достаточно взять в (2.11) $\xi_h = -(i+j)^p$.

При $\ell = 1$ положим $\xi_n = k \ln k$. Докажем неравенство

(2.15) $\quad (k-1)\ln(k-1) - 2k\ln k + (k+1)\ln(k+1) \geq \frac{c}{k}$,

из которого будет следовать (2.12). Неравенство (2.15) эквивалентно

$$\ln k+1 - \ln k-1 + k \ln \frac{k^2-1}{k^2} \geq \frac{c}{k},$$

$$k \ln\left(1+\frac{2}{k-1}\right) + k^2 \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{k-1}\right)^k\left(1-\frac{1}{k^2}\right)^{k^2} \geq \ln\frac{e^2}{4},$$

так как $\left(1+\frac{2}{k-1}\right)^k \geq e^2$, $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)^{k^2} \geq \frac{1}{4}$. Итак, $c = \ln e^2/4$.

В случае $p = -2$, $q = 0$ достаточно установить неравенство

(2.16) $\quad -\ln(k-1) + 2\ln k - \ln(k+1) \geq \frac{1}{k^2}$,

если положить $\xi_k = -\ln(i+j)$. Т.к. (2.16) эквивалентно $k^2 \ln \frac{k^2}{k^2-1} \geq 1$, то оно следует из

$$\frac{k^2}{k^2-1} \ln\left(1+\frac{1}{k^2-1}\right)^{k^2-1} \geq 1, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq e.$$

Итак, для всех случаев найдена мажорантная функция ξ_n, обеспечивающая оценку (2.12). Так как краевые условия ρ_h^m по построению удовлетворяют требованиям мажорантной теоремы из /5/ (что легко проверить), то для функции v_h^1 из (2.10) справедлива оценка $|v_h^1| \leq \xi_n$, а решение u_h (2.6) представимо в виде

$$u_h = v_h + \alpha_h, \qquad v_h \leq v_h^1,$$

где α_h удовлетворяет (2.9). В случае углов $\varphi_0 = \pi$, $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ нужно еще учесть знаки i и j. Лемма доказана.

Вернемся к уравнениям (2.1) для коэффициентов a_i. Пусть $u^* \in W^{k+2}(\bar{G})$, тогда $a_1 \in W_2^1(\bar{G})$ и согласно (1.4) справедливо разложение в окрестности угловой точки

(2.17) $$a_1(x,y) = \sum_{0<\lambda_p<k+1} a_{pq}^1 z^{\lambda_p} P_{pq}(z \ln^q z) + \sum_{2 \leq j_1 \leq k+1} z^{j_1} \ln^{j_2} z\, \theta_{j_1 j_2}(\varphi) + w_1,$$

$$w_1 \in W^k(\bar{G}).$$

Учитывая главный член асимптотики (2.17) и Лемму I, для a_2 получим представление

$$a_2 = a_{10}^2\, r^{\lambda_1-2} v_1(\varphi) + \sum_{0<\lambda_p<\kappa}' a_{pq}^2 r^{\lambda_p-2} P_{pq}'(r\ln^q r) + \sum r^{j_1-2}\ln^{j_2} Q_{j_1 j_2} + w_2$$

$$w_2 \in W^{\kappa-2}(\bar{G}).$$

Для a_i имеет место равенство

$$a_i\,(x,y) = a_{10}^i\, r^{\lambda_1-2(i-1)} v_1(\varphi) + \sum r^{\mu_{j_1}} \ln^{q_{j_2}} Q_{j_1 j_2}(\varphi) + w_i\,,$$

(2.18) $$w_i \in W^{\kappa-2(i-1)}(G)\,, \quad \mu_{j_1} > \lambda_1 - 2\,(i-1).$$

Коэффициенты $d_{k,i}$, $\ell_{k,i}$ из (2.2), согласно (2.3), подчиняются оценкам

(2.19) $$|d_{k,i}| \le c\, r^{\lambda_{1j}-2i}\,, \quad |\ell_{k,i}| \le c\, r^{\lambda_{1j}-2i+1}$$

в окрестности j-ой угловой точки. В случае угла $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ будет присутствовать логарифмический множитель. Вид разложения (I.13) для $u^* \in W^{\kappa+2}(\bar{G})$ дает

<u>Теорема I</u>. Пусть $u^* \in W^{\kappa+2}(\bar{G})$, тогда для решения u_h уравнения (I.12) справедливо представление (I.13), в котором

(2.20) $$a_i\,(x) = \sum_{j\in J} \alpha_j\,(u^*)\, r_j^{\lambda_{1j}-2(i-1)} v_j(\varphi) + \sum_{j,j_1,j_2} r_j^{\mu_{j_1}} \ln^{q_{j_1}} \theta_{j_1 j_2}(\varphi) + w_i\,,$$

где α_j, $\theta_{j_1 j_2}$, w_i не зависят от h, $w_i \in W_2^{\kappa-2(i-1)}(\bar{G})$, $\mu_{j_1} > \lambda_{1j} - 2\,(i-1)$, а сеточная функция $\eta_h = W_h + \gamma_h$ такова, что

(2.21) $$|W_h| \le c \sum_{j\in J} r_j^{\lambda_{1j}-2i}\,(1+F(r))\,, \quad 0 \le F(r) < c\, r^{\mu}\,, \quad \mu > 0\,,$$

а функция γ_h удовлетворяет равенствам

(2.22) $$\Delta_h \gamma_h = 0\,, \quad P_h^m (W_h + \gamma_h) = c\, r_j^{\lambda_{1j}-2i-1}(1+G(r))$$

$$|G(r)| < c\cdot r^{\mu_1}\,, \quad \mu_1 > 0\,, \quad m = 0,2; \quad P^1 \gamma_h = c\, r_j^{\lambda_{1j}-2i}\,,$$

и оценивается с помощью Леммы 4.

Доказательство. Представление (I.13) получим как следствие теоремы I из /2/, в которой установлено разложение приближенного решения u_h по степеням h для нелинейного операторного уравнения. В нашем случае условие сходимости $\|P_h u^* - u_h\| \to 0,\ h \to 0$ следует из априорной оценки (4.9), Леммы 2 и разложения (I.8). Существование обратного оператора Λ_h^{-1}, равномерно ограниченного по h, есть следствие Леммы 4. Разложение ошибки аппроксимации $P_h \Lambda u^* - \Lambda_h P_h u^*$ по степеням h дается формулами (I.8), где Λ задается равенством (I.3). Зададим последовательность множеств B_i и B_i', $i=1,\dots L$. B_i' – множество функций $u(x)$ вида (I.4), где минимальная степень r есть $\lambda_p - 2i$, а $w_i \in W^{k-2i}(\bar G)$. Множество B_i состоит из функций вида (2.18), где $w_i \in W^{k-2(i-1)}(\bar G)$. При этом $\Lambda : B_i \to B_i'$. Из теоремы I /2/ сразу получаем разложение (I.13), однако с неограниченными коэффициентами a_i. Решение уравнений (2.I) для коэффициентов a_i ищем в классах B_i, используя Лемму I. Тогда представления (2.20) следуют из (2.17), (2.18). Оценки (2.21), (2.22) получим с помощью лемм 2,4. Действительно, решение g_h уравнения

$$\Delta_h g_h = d_{h,i} \quad , \quad P_h^m g_h = 0 \quad , \quad x \in \Gamma ,$$

где $d_{h,i}$ удовлетворяет (2.19), мажорируется функцией z_h, которую можно представить в виде $z_h = W_h + \alpha_{j,h}$, где

$$\Delta_h W_h = C\, r_j^{\lambda_{1j} - 2(L-i+1)-1}, \ x \in G_h' \ , \ P_h^m W_h = P_h^m v_h \ , \quad x \in \Gamma^m$$

$$P' W_h = P' v_h \ , \quad x \in \partial G_h' \setminus \Gamma^m ,$$

а функция v_h определена в (2.8). Функция $\alpha_{j,h}$ определяется в силу Леммы 2 из (2.9). Теперь (2.21) следует из оценки (2.8). Теорема доказана.

Разложения (I.13), (2.20)-(2.22) получены без каких-либо условий согласования для вспомогательных уравнений (2.I). При выполнении таких условий получаются разложения типа (I.13) с ограниченными коэффициентами a_i, γ_h. Для задачи Дирихле в прямоугольнике такие результаты содержатся в /6/.

Замечание I. В случае $u^* \in W_2^1(\bar G)$, $f \in W_2^k(G)$ коэффициенты разложения (I.13) получаются аналогично теореме I. В этом случае $a_i(x)$ будет, вообще говоря, иметь особенности в угловых точках, т.к. $u^k(x)$ имеет вид (I.4). При этом

(2.23) $$a_i = \sum_j \alpha_{ij}(u^*) r_j^{\lambda_{ij}-2i} \vartheta_j(\varphi) + \sum r_j^{\mu_{ji}} \ln^{q_{jk}} r\, \theta_{j,j_k}(\varphi) + u\gamma_i ,$$

$$|\eta_h| \le c \quad r^{\lambda_{ij}-2L-2}(1+F(r))+\gamma_h , \; F(r)<c .$$

$$\Delta_h \gamma_h = 0 , \; P^m \gamma_m = c r^{\lambda_{ij}-2L-3}(1-G(r)) \quad m=0,2 ; \; P'_h \gamma_h = c r^{\lambda_{ij}-2L-2}$$

и все слагаемые в разложении (I.I3) имеют одинаковый порядок по h в окрестностях угловых точек. В этом случае уточнение по Ричардсону дает значительный эффект лишь в области, удаленной от углов.

Замечание 2. В случае $\varphi_0 = \pi/2$ для условий Дирихле или Неймана при $u^* \in W_2^2(\bar G)$ главный член асимптотики (I.4) есть $r^2 \ln r \; \vartheta(\varphi)$, и поэтому $a_1(x)$ имеет асимптотику $c \ln r \; \vartheta_1(\varphi)$ в окрестности угла, а разложение (I.I3) имеет вид

$$P_h u^* = u_h^* + c_1 \ln r \,(1+F_1(r)) h^2 + c_2 (r^{-2}+F_2(r)) h^4 + \ldots \eta_h ,$$

(2.24) $$|F_1(r)|, \; |F_2(r)| < c ,$$

$$|\eta_h| < [c \quad r^{-2(L-1)}(1+F_h(r))+\gamma_h]\, O(h^{2L}) ,$$

$$\Delta_h \gamma_h = 0 , \quad P_h^m \gamma_h = c r^{-2L+1}(1+G(r)) , \quad m=0,2,$$

$$P_h^1 \gamma_h = c r^{-2L+2} .$$

Возвращаясь к случаю гладкого решения $u^* \in W^{K+2}(\bar G)$, видим, что в разложении (I.I3) первые два члена имеют убывающие порядки по h в окрестностях углов, и поэтому уточнение на двух и трех сетках дает хорошие результаты во всей области G. Хотя оставшиеся слагаемые в разложении уже имеют одинаковый порядок по h, численные расчеты показывают, что сингулярные составляющие в $a_i(x)$ имеют случайный характер и, как правило, невелики. Таким образом, для гладких решений метод Ричардсона в ступенчатых областях дает практически тот же результат, что и для согласованных задач в прямоугольнике.

§ 3. Численные эксперименты

Проиллюстрируем сделанные выводы численными примерами. Обозначим $\Delta(h)$ – погрешность приближенного решения на сетке ω_h с шагом h, $\Delta(h_1, h_2, \ldots, h_k)$ – погрешность решения, экстраполированного по сеткам $\omega_{h_1}, \omega_{h_2}, \ldots, \omega_{h_k}$.

Решение задачи

$$(3.1)\quad \Delta U = \frac{8xy}{x^2+y^2}\ ,\ u^* = r^2 \ln r \sin 2\varphi,$$

$$u_\Gamma = 0\ ;\ x = 0,\ y = 0\ \ ;\ G = \{0 \le x,\ y \le 1\}$$

принадлежит $W_2^2(\bar G)$, и разложение (I.13) имеет вид

$$U_h = P_h\,(u^* + (\alpha_1 \ln r + a_1)\,h^2 + (\tfrac{\alpha_2}{r^2} + a_2)h^4 + (\tfrac{\alpha_3}{r^4} + a_3)h^6 \ldots) \ldots + \eta_h .$$

Соответствующие погрешности указаны в табл.I.

Для уравнения

$$(3.2)\quad \Delta U = \pi^2 \sin \pi x \cdot \sin \pi y\ ,\ u_\Gamma = 0\ ,\ u^* = \sin \pi x \cdot \sin \pi y,$$

в той же области G все вспомогательные задачи для коэффициентов $a_i(x)$ согласованы и потому все a_i ограничены, а $|\eta_h| \le O(h^{2k+1})$. Соответствующие результаты экстраполяции приведены в табл.I. Видно, что экстраполяции на трех сетках в задаче (3.2) дают несколько большую точность, чем для (3.I), поскольку отличаются на величину $\frac{\alpha_3}{r^4}\, h^6$.

Для задачи Дирихле с гладким решением в L -образной области

$$G = \{|x| \le 1,\ 0 \le y \le 1\} \cup \{0 \ge x,\ y \ge -1\}$$

$$(3.3)\quad \Delta u = 2e^{x+y},\ p^1 u = p^1(e^{x+y})\ ,\quad u^* = e^{x+y}$$

на ошибки экстраполяций Ричардсона в ближайшей к угловой точке $x = 0\ ,\ y = h$ практически не влияет наличие угла $\varphi_0 = 3\pi/2$, хотя разложение (I.13) имеет вид

$$u_h = P_h\,(u^* + a_1 h^2 + (\alpha_2 r^{-4/3} + a_2)h^4 + (\alpha_3 r^{-10/3} + a_3)h^6 + \ldots) + \eta_h .$$

Однако в той же области G для задачи

$$(3.4)\quad \Delta u = 0\ ,\ p^1 u = p^1(r^{2/3} \sin \tfrac{2}{3}\varphi),\ u^* = r^{2/3} \sin \tfrac{2}{3}\varphi$$

в точке $(0,h)$ соответствующие погрешности значительно хуже, поскольку разложение ошибки имеет вид

$$u_h = P_h\,(u^* + (\alpha_1 r^{-4/3} + a_1)h^2 + (\alpha_2 r^{-10/3} + a_2)h^4 + \ldots) + \eta_h .$$

Таблица I.

Решение u^*	Область	h	Точка измерения погрешн.	$\Delta(h)$	$\Delta(\frac{h}{2})$	$\Delta(\frac{h}{4})$	$\Delta(\frac{h}{8})$	$\Delta(h,\frac{h}{2})$	$\Delta(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4})$	$\Delta(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4},\frac{h}{8})$
$r^2 \ln r \cdot \sin 2\varphi$	$0 \le x,y \le 1$	$\frac{1}{4}$	$x=y=\frac{1}{4}$	$8,9\cdot10^{-3}$	$2,5\cdot10^{-3}$	$6,7\cdot10^{-4}$	$1,7\cdot10^{-4}$	$4,3\cdot10^{-4}$	$1,4\cdot10^{-5}$	$1,1\cdot10^{-7}$
		$\frac{1}{8}$	$x=y=\frac{1}{8}$	$2,5\cdot10^{-3}$	$7,0\cdot10^{-4}$	$1,8\cdot10^{-4}$		$1,0\cdot10^{-4}$	$3,4\cdot10^{-6}$	
		$\frac{1}{16}$	$x=y=\frac{1}{16}$	$6,3\cdot10^{-4}$	$1,8\cdot10^{-4}$			$2,6\cdot10^{-5}$		
$\sin \pi x \sin \pi y$	$0 \le x,y \le 1$	$\frac{1}{4}$	$x=y=\frac{1}{2}$	$5,3\cdot10^{-2}$	$1,3\cdot10^{-2}$	$3,2\cdot10^{-3}$	$8,0\cdot10^{-4}$	$4,0\cdot10^{-4}$	$6,1\cdot10^{-7}$	$3,4\cdot10^{-8}$
		$\frac{1}{8}$	$x=y=\frac{1}{2}$	$1,3\cdot10^{-2}$	$3,2\cdot10^{-3}$	$8,0\cdot10^{-4}$		$2,5\cdot10^{-5}$	$2,3\cdot10^{-8}$	
		$\frac{1}{16}$	$x=y=\frac{1}{2}$	$3,2\cdot10^{-3}$	$8,0\cdot10^{-4}$			$1,6\cdot10^{-6}$		
$\sin \pi x \, \sin \pi y$	$\{-0,5 \le x,y \le 0\} \cup$	$\frac{1}{4}$	$x=y=-\frac{1}{4}$	$7,8\cdot10^{-3}$	$2,1\cdot10^{-3}$	$5,3\cdot10^{-4}$	$1,3\cdot10^{-4}$	$1,7\cdot10^{-4}$	$3,2\cdot10^{-6}$	$2,0\cdot10^{-8}$
	$\{0 \le y \le 1;$	$\frac{1}{8}$	$x=y=-\frac{1}{8}$	$7,7\cdot10^{-4}$	$2,0\cdot10^{-4}$	$4,9\cdot10^{-5}$		$4,3\cdot10^{-6}$	$2,1\cdot10^{-8}$	
	$-0,5 \le x \le 0,5\}$	$\frac{1}{16}$	$x=y=-\frac{1}{16}$	$5,4\cdot10^{-5}$	$1,3\cdot10^{-5}$			$7,6\cdot10^{-8}$		
e^{x+y}	$\{-0,5 \le x,y \le 0\} \cup$	$\frac{1}{4}$	$x=0,\ y=\frac{1}{4}$	$3,8\cdot10^{-4}$	$1,0\cdot10^{-4}$	$2,7\cdot10^{-5}$	$6,8\cdot10^{-6}$	$1,3\cdot10^{-5}$	$4,1\cdot10^{-7}$	$1,7\cdot10^{-8}$
	$\{0 \le y \le 1;$	$\frac{1}{8}$	$x=0,\ y=\frac{1}{8}$	$8,0\cdot10^{-5}$	$2,1\cdot10^{-5}$	$5,5\cdot10^{-6}$		$1,8\cdot10^{-6}$	$7,2\cdot10^{-7}$	
	$-0,5 \le x \le 0,5\}$	$\frac{1}{16}$	$x=0,\ y=\frac{1}{16}$	$1,3\cdot10^{-5}$	$3,6\cdot10^{-6}$			$2,8\cdot10^{-7}$		
$r^{2/3} \sin 2\varphi/3$	$\{-0,5 \le x,y \le 0\} \cup$	$\frac{1}{4}$	$x=0,\ y=\frac{1}{4}$	$2,3\cdot10^{-2}$	$9,1\cdot10^{-3}$	$3,2\cdot10^{-3}$	$1,2\cdot10^{-3}$	$4,5\cdot10^{-3}$	$1,1\cdot10^{-3}$	$4,9\cdot10^{-4}$
	$\{0 \le y \le 1;$	$\frac{1}{8}$	$x=0,\ y=\frac{1}{8}$	$1,9\cdot10^{-2}$	$7,3\cdot10^{-3}$	$2,7\cdot10^{-3}$		$3,6\cdot10^{-3}$	$9,6\cdot10^{-4}$	
	$-0,5 \le x \le 0,5\}$	$\frac{1}{16}$	$x=0,\ y=\frac{1}{16}$	$1,3\cdot10^{-2}$	$5,0\cdot10^{-3}$			$2,5\cdot10^{-3}$		

Повышение эффективности экстраполяции Ричардсона при удалении от угловой точки можно проследить на следующем примере

$$\Delta u = -0.5\,(x+y)^{-3/2}, \quad P^1 u = P^1((x+y)^{1/2}), \quad u^* = (x+y)^{1/2}$$

для области $G = \{0 \le x, y \le \frac{1}{4}\}$. Решения с такой особенностью возникают, например, в точке смены краевых условий $P^1 = E$ и $P^2 = \frac{\partial}{\partial u}$ для угла $\varphi = \pi$. Погрешности в диагональных точках квадратной сетки ω_h, $h = 1/64$ и $\omega_{h/2}$ и соответствующие результаты экстраполяции приводятся в табл.2.

В этом случае

$$(3.5) \quad \Delta(h) = (\alpha_1 r^{-3/2} + a_1)h^2 + (\alpha_2 r^{-7/2} + a_2)h^4 + \dots + \eta_h,$$

$|\eta_h| \le O(h^{2l+1}) \cdot r^{1/2-(2l+1)}$. Погрешность экстраполяции уменьшается по степенному закону $r^{-3/2}$.

Отметим, что разложения типа (3.5) для одной модельной задачи получены в [7].

§ 4. Априорные оценки для разностных схем в ступенчатых областях

Рассмотрим три типа областей:

1. Прямоугольник $G = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \le x_\alpha \le \ell_\alpha, \ \alpha = 1,2\}$ с краевыми условиями P^0, P^1 и P^2 из (I.I) на разных участках границы, $\Gamma^1 \neq \emptyset$.

2. Произвольная ступенчатая область G, для которой краевое условие $P^0 = \frac{\partial}{\partial n}$ задается только на тех отрезках $\Gamma^0_k \in \Gamma^0$, $k = 1, \dots, p$, для которых выполнено соотношение $(n_i, n_j) \ge 0$, $1 \le i, j \le p$, где n_i – внутренняя нормаль к части границы Γ^0_i.

3. Пусть Π – минимальный прямоугольник, со сторонами, параллельными осям координат, и содержащий область G. Пусть $\Pi = G \cup \Pi_i$, $i = 1, \dots, \ell$, где Π_i – некоторые ступенчатые области, а $\Gamma_i = \Gamma \cap \partial \Pi_i$. Для областей G третьего типа будем предполагать, что на Γ_i задано условие Дирихле P^1.

В первом случае квадратная разностная сетка $\bar\omega = \omega_1 \times \omega_2$, $\omega_\alpha = \{x = x_i \mid i = 0, \dots, N_\alpha\}$ такова, что условие $P^2 = \frac{\partial}{\partial n} - \sigma E$, $\sigma \ge 0$ заменяется разностным соотношением

$$(4.1) \quad P_h^2\, u(x) = \frac{u(x+\Delta) - u(x-\Delta)}{h} - \sigma\,\frac{u(x+\Delta) + u(x-\Delta)}{2}, \quad \Delta = \frac{h \cdot n(x)}{2},$$

Таблица 2.

	Номера диагональных точек, считая от (0.0).														
	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3	I4	I5
$10^{-5}\cdot\Delta(h)$	73	44	30	2I	I6	I2	9.7	7.5	5.7	4.2	3.0	I.9	I.I	0.52	0.I3
$10^{-5}\,\Delta(\frac{h}{2})$	3I	I5	9.6	6.6	4.8	3.6	2.8	2.I	I.6	I.2	0.84	0.55	0.3I	0.I4	0.037
$10^{-5}\,\Delta(h,\frac{h}{2})$	I7	5.8	2.7	I.6	I.0	0.69	0.49	0.35	0.25	0.I8	0.I2	0.07	0.04	0.0I9	0.004

где $n(x)$ - единичный вектор внутренней нормали в точке $x \in \Gamma$. Формула (4.1) аппроксимирует ρ^2 с точностью $O(h^2)$, а ошибка аппроксимации разлагается по степеням h^2. Условие ρ^1 получается простым сносом. Разностную аппроксимацию задачи (I.I) запишем в виде

$$(4.2) \qquad \Lambda_0 u_h = \varphi(x), \quad x \in \bar{\omega}; \ \varphi(x) = f, x \in \omega; \ \varphi = g, x \in \Gamma,$$

где Λ_0 определен из (I.7), (4.I). Далее используем сеточные нормы $\|\vartheta\|_0$, $\|\nabla\vartheta\|_0$, $\|\vartheta\|_1$, $\|\vartheta\|_{-1}$, определенные в /5/. При наличии точек смены условий ρ^1 и ρ^i, $i=0,2$ используем простейшую разностную схему порядка h. Обозначим соответствующий (I.7) оператор через Λ_1. Рассмотрим две задачи для $i=0,1$.

$$(4.3) \qquad \Lambda_i u_h^1 = \psi(x), \ \psi(x) = f, x \in \omega, \ \psi(x) = g, x \in \Gamma^0, \psi = 0, x \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2.$$

$$(4.4) \qquad \Lambda_i u_h^2 = \chi(x), \ \chi(x) = 0, x \in \omega, x \in \Gamma^0; \ \chi(x) = g, x \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2.$$

Лемма 3. Если сеточная функция $\vartheta(x)$ такова, что $\rho_h^m \vartheta = 0$, $x \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2$, то равномерно по h выполнено соотношение

$$(4.5) \qquad -(\Lambda_i \vartheta, \vartheta)_{\bar{\omega}} \geq c\|\vartheta\|_1^2, \quad c > 0, \quad i = 0,1$$

при достаточно малых h.

Доказательство. По построению

$$(4.6) \qquad -(\Lambda_0 \vartheta, \vartheta)_{\bar{\omega}} = \|\nabla\vartheta\|_0^2 + \frac{\sigma}{2} \sum_{x \in \Gamma^2} \left(\vartheta(x + \tfrac{h}{2}n) + \vartheta(x - \tfrac{h}{2}n)\right) (x - \tfrac{h}{2}n).$$

В силу условия $\rho^2\vartheta = 0$ получаем при $\sigma h < 2$

$$\vartheta(x + \tfrac{h}{2}n) = g \ \vartheta(x - \tfrac{h}{2}n), \quad g = (1 + \tfrac{\sigma h}{2})(1 - \tfrac{\sigma h}{2})^{-1} > 0.$$

Поэтому из (4.6) следует $-(\Lambda_0 \vartheta, \vartheta)_{\bar{\omega}} \geq \|\nabla\vartheta\|_0^2$.

Пусть, например, на стороне $x_1 = 0$, $\rho^1\vartheta = 0$. Тогда, согласно лемме 10, § 5 гл.5 из /5/ имеет место оценка

$$(4.7) \qquad \|\nabla\vartheta\|_0^2 \geq \frac{\ell_2}{(\ell_1 + \ell_2)(\ell_1^2 + \ell_2^2)} \|\vartheta\|_0^2 .$$

Из (4.6), (4.7) следует (4.5).

Для оператора Λ_1 сразу имеем

(4.8) $$-(\Lambda_1 v, v)_{\bar{\omega}} = \| \nabla v \|_0^2 + (\sigma, v^2)_{\Gamma^2} \geq \| \nabla v \|_0^2 .$$

Пусть $\gamma \subset \Gamma$ – множество граничных узлов, в которых задано условие P_h^1, содержащееся на отрезке границы длины m. Согласно упомянутой лемме 10 из /5/, получим

$$\| \nabla v \|_0^2 \geq \frac{m}{(\ell_1+\ell_2)(\ell_1^2+\ell_2^2)} \| v \|_0^2 ,$$

что вместе с (4.8) дает неравенство (4.5). Лемма доказана.

Лемма 4. Существует единственное решение задачи (4.3) при $i=0,1$, и для него справедлива априорная оценка

(4.9) $$\| u_h^1 \|_1^2 \leq M \left(\| f \|_{-1}^2 + \| g \|_0'^2 \right) + \sigma^{-1} \max |g| .$$

Для достаточно гладкого решения $u^*(x,y)$ уравнения (1.1) имеет место оценка

(4.10) $$\| P_h u^* - u_h \|_1^2 \leq M_1 h^{\mu} , \quad \mu > 0 ,$$

где μ – минимальное собственное значение задачи (1.6).

Доказательство. Представим u_h в виде $u_h = u_h^1 + u_h^2$. Существование, единственность и априорная оценка решения u_h^1 доказываются аналогично теореме 4, гл. VI из /5/ при помощи леммы 3. Решение задачи (4.4) мажорируется константой $\sigma^{-1} \max |g|$. Оценка (4.10) следует из представления (1.8), леммы 2 и неравенства (4.9). Лемма доказана.

Для областей G третьего типа утверждение, аналогичное лемме 4, получается, если продолжить функцию u_h в области Π_i нулем, после чего все сводится к первому случаю.

Во втором случае воспользуемся мажорантной теоремой 1, § 4, гл.III из /5/. Пусть прямоугольник $\Pi = \{ x = (x_1, x_2) \mid 0 \leq x_\alpha \leq m_\alpha ;\ \alpha = 1,2 \}$ содержит область G и отстоит от границы Γ на расстоянии ρ. Тогда мажорантную функцию $U(x_1, x_2)$ выберем в виде

(4.11) $$U(x_1,x_2) = \frac{1}{4} \left(R^2 - (x_1 - m_1)^2 - (x_2 - m_2)^2 \right) M + \sigma^{-1} \max |g| ,$$

где $M = \max \{ f(x_1,x_2), g/2\rho \}$, а круг радиуса R с центром в нуле содержит прямоугольник Π. В этом случае оценка типа (4.10) получается в равномерной норме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. "Наука", М., 1979.
2. Жидков Е.П., Нгуен М., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р5-12979, Дубна, 1979.
3. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. - Труды ММО, 1967, 16, с.109-192.
4. Оганесян Л.А., Ривкинд В.Я., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, II. - Дифференциальные уравнения и их применение, вып.8, Вильнюс, 1974.
5. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. Наука, М., 1976.
6. Волков Е.А. Решение задачи Дирихле методом уточнений разностями высших порядков, I. - Дифф.уравнения, 1965, I, № 7, с.946-960.
7. Андреев В.Б. ДАН СССР, 1977, т.234, № 5, с.997-1000; 1979, т.244, № 6, с.1289-1293.
8. Фрязинов И.В. Разностные схемы для уравнения Лапласа в ступенчатых областях. Ж.вычисл. матем. и матем. физ., 1978, 18, № 5, с. 1170-1185.
9. Жидков Е.П., Нгуен М., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р5-12916, Дубна, 1979. Направлено в ЖВМ и МФ.
10. Нгуен М., Хоромский Б.Н., Ямалеев Р.М. ОИЯИ, Р5-12993,Дубна, 1979. Дифференциальные уравнения, 1980, т.16, № 7, с.1293-1302.

Рукопись поступила в издательский отдел 18 сентября 1980 года.