сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р5-80-585

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЧАСТИЦЕПОДОБНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПОЛЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

Часть II

1980

Введение

В первой части работы /1/ было доказано существование положительного частицеподобного решения нелинейного дифференциального уравнения

$$\ddot{\Psi}(x) - Q_\ell(x)\Psi(x) = -\Psi(x)F(\Psi^2(x), x), \tag{I}$$

$$Q_\ell(x) = \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \eta^2, \quad \eta > 0, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

при граничных условиях

$$\Psi(0) = \Psi(+\infty) = 0 \tag{2}$$

и когда функция $F(z,x)$ удовлетворяет следующим условиям:

(I_a) $F(z,x)$ непрерывна по z и x при

$$0 \le z < \infty \quad и \quad 0 < x < \infty;$$

$(I_б)$ $F(z,x) > 0$ для $z > 0$, $x > 0$;

$(I_в)$ для фиксированного положительного x и

$0 \le z_1 < z_2 < \infty$ существует $\delta > 0$ такое,

что

$$z_2^{-\delta} F(z_2, x) > z_1^{-\delta} F(z_1, x);$$

$(I_г)$ $\lim\limits_{x \to \infty} F(c^2, x) = 0$, для всех конечных C;

$(I_д)$ $\int_0^a x^{1-\varepsilon} F(c^2 x, x)\,dx < \infty$, для всех конечных c,

$0 < a < \infty$ и некоторого $\varepsilon \ge 0$.

В данной работе для любых натуральных значений параметра ℓ доказана следующая

Теорема I. Если функция $F(z,x)$ удовлетворяет условиям $(I_a) - (I_д)$, то существуют решения $\varphi(x) = \varphi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ задачи (I)–(2), имеющие точно n нулей в интервале $0 < x < \infty$.

Доказательство теоремы I проведено с помощью вариационного подхода, развитого в работах Нехари /2/ и в /3,4/.

Доказательство разбито на несколько этапов. В § I сформулирована соответствующая вариационная задача (см. (I.I)–(I.2)) в интервале $0 \le x < \infty$. Затем решение этой вариационной задачи связывается с решением $y_j(x)$ вспомогательной вариационной задачи (см. (I.6)-(I.7)). В § 2 установлено три свойства функционала вспомогательной вариационной задачи. С помощью этих свойств доказано, что исходный функционал достигает минимума при некотором разбиении $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ интервала $(0, \infty)$. В § 3 установлена непрерывность первых производных $y_j(x)$ в точках $\bar{x}_j$ $(j=1,2,\dots,n)$ и завершается доказательство теоремы I.

§ I. Сформулируем соответствующую вариационную задачу. Ищется минимум функционала

$$J(y) = \int_0^\infty \left[\dot{y}^2(t) + Q_\ell(t)\, y^2(t)\right] dt \tag{I.I}$$

при нормировочном условии

$$K(y) = \int_0^\infty G\,(y^2(t),\, t)\, dt = B\,, \tag{I.2}$$

где

$$G(y^2(t), t) = \int_0^{y^2(t)} F(z, t)\, dz\,. \tag{I.3}$$

Функция $F(z,t)$ удовлетворяет условиям (I_a)-(I_g); B -фиксированное число из промежутка $0 < B < \infty$.

Вариационную задачу (I.I)-(I.2) будем рассматривать в классе функций $Y(0,\infty)$, определяемых условиями:

а) $y(t)$ непрерывны в промежутке $[0,\infty)$ и имеют в нем кусочно-непрерывные первые производные $\dot{y}(t)$;

б) $J(y) < \infty$;

в) $K(y) = \mathcal{D}$; $\mathcal{D}$ - произвольное число из промежутка $0 < \mathcal{D} < \infty$.

г) $y(0) = y(\infty) = 0$;

д) $y(x)$ имеет ровно n нулей в интервале $(0, \infty)$.

Под решением вариационной задачи (I.I)-(I.2) будем понимать функцию $y(x) \in Y(0,\infty)$, доставляющую минимум функционалу (I.I) при выполнении условия (I.2).

В дальнейшем будет показано, что решение вариационной задачи (I.I)-(I.2) является и решением задачи (I)-(2).

Доказательство существования решения вариационной задачи (I.I)-(I.2) проведем в несколько этапов.

Рассмотрим некоторое разбиение интервала $(0,\infty)$ точками $t_1, t_2, \dots, t_n$, где $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = \infty$. Учитывая это разбиение, вариационную задачу (I.I)-(I.2) перепишем так:

$$\mathcal{J}(t_1,\dots,t_n,y)=\sum_{j=0}^{n}\mathcal{J}_j \quad , \tag{I.4}$$

$$K(t_1,\dots,t_n,y)=\sum_{j=0}^{n}\beta_j \quad , \tag{I.5}$$

где

$$\mathcal{J}_j(y_j)=\int_{x_j}^{x_{j+1}}\left[\dot y_j^2(t)+Q_\ell(t)\,y_j^2(t)\right]dt \,, \tag{I.6}$$

$$\beta_j(y_j)=\int_{x_j}^{x_{j+1}}G\left(y_j^2(t),t\right)dt \,. \tag{I.7}$$

β_j – заданные положительные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{j=0}^{n}\beta_j = B$.

Далее для любого промежутка $x_j \le x \le x_{j+1}$ рассмотрим существование знакоопределенных решений задачи (I.6)-(I.7) в классе функций $Y_j(t_j\,,\,t_{j+1})$, определяемых следующими условиями:

а) $y_j(t)$ непрерывны в промежутке $[t_j,t_{j+1}]$ и имеют в нем кусочно-непрерывные первые производные $\dot y(t)$;

б) $y_j(t_j)=y(t_{j+1})=0$;

в) $\mathcal{J}_j(y_j)<\infty$;

г) $\int_{t_j}^{t_{j+1}}G(y_j^2(t),t)dt=\beta_j$; β_j – произвольное число из промежутка $0<\beta_j<\infty$.

Повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые проведены в работе /I/, можно убедиться, что для любого промежутка $t_j \le t \le t_{j+1}$ существует в классе функций $Y_j(t_j\,,t_{j+1})$ знакоопределенное решение $y_j(t)$ вариационной задачи (I.6)-(I.7), причем функция $y_j(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[\dot y_j^2(t)+Q_\ell(t)\,y_j^2(t)\right]dt=\int_{t_j}^{t_{j+1}}y_j^2(t)\,F(y_j^2(t),t)\,dt \tag{I.8}$$

и является решением следующей краевой задачи

$$\ddot y_j(t)-Q_\ell(t)\,y_j(t)=-y_j(t)\,F(y_j(t),t) \tag{I.9}$$

$$y_j(t_j)=y_j(t_{j+1})=0. \tag{I.10}$$

Итак, в каждом промежутке $t_j \le t \le t_{j+1}$ существует нетривиальное безузловое решение уравнения (I) при граничных условиях (I.10) и удовлетворяющее условию (I.8).

Каждому значению $\mathfrak{J}(y)=\mathfrak{J}(t_1,\dots,t_n,y)$ при фиксированном разбиении интервала $(0,\infty)$ соответствует кривая $y(t)$, составленная из $y_j(t)$ $(j=0,1,2,\dots,n)$. Поскольку уравнение (I) от смены знака $y(t)$ не зависит, можно построить кривую так, что $y_j(x)$ и $y_{j+1}(x)$ имеют разные знаки. Покажем, что функция $\mathfrak{J}(t_1,\dots,t_n,y)$ достигает минимума при некотором разбиении $(\bar{t}_1,\dots,\bar{t}_n)$ интервала $(0,\infty)$ при выполнении условия (I.8) в каждом промежутке $[t_j,t_{j+1}]$. Существование такого разбиения является следствием следующих трех свойств:
$\mathfrak{J}_j=\mathfrak{J}_j(t_j,t_{j+1},y_j)$ /2,3/.

§ 2. <u>Лемма I</u>.

I. Если $t_j\le\hat{t}_j<\hat{t}_{j+1}\le t_{j+1}$, то

$$\mathfrak{J}_j(t_j,t_{j+1},y_j)\le\mathfrak{J}_j(\hat{t}_j,\hat{t}_{j+1},\hat{y}_j);$$

2. $\mathfrak{J}_j(t_j,t_{j+1},y_j)\to\infty$, если $(t_{j+1}-t_j)\to 0$;

3. $\mathfrak{J}_j(t_j,t_{j+1},y_j)$ – непрерывная функция от t_j, t_{j+1}.

Докажем первое утверждение леммы I. Пусть функция $\hat{y}_j$ является нетривиальным решением вариационной задачи для интервала $[\hat{t}_j,\hat{t}_{j+1}]$ при выполнении условия (I.8). Определим функцию $u(t)$ следующим образом

$$u(t)=\begin{cases} u(t)=\hat{y}_j(t), & \text{при } [\hat{t}_j,\hat{t}_{j+1}],\\ u(t)\equiv 0, & \text{при } t_j\le t<\hat{t}_j \text{ и } \hat{t}_{j+1}<t\le t_{j+1}.\end{cases}$$

Очевидно,

$$\mathfrak{J}_j(t_j,t_{j+1},y_j)\le\mathfrak{J}_j(t_j,t_{j+1},u)=\mathfrak{J}_j(\hat{t}_j,\hat{t}_{j+1},\hat{y}_j). \tag{2.I}$$

Доказательство второго утверждения леммы I проведем лишь для двух интервалов $[0,t_1]$ и $[t_n,\infty)$. Остальные случаи доказываются аналогично.

Если $0\le t\le t_1$, то, используя оценку

$$y_0^2(t)\le t\mathfrak{J}_0 \tag{2.2}$$

и условие (I.8), имеем

$$1\le t_1^{(\alpha+1)}\int_0^{t_1}t^{(\frac{1}{2}-\varepsilon)}F(\mathfrak{J}_0t,t)\,dt\ ,\quad \varepsilon\geqslant 0. \tag{2.3}$$

Отсюда, если $t_1 \to 0$, то при выполнении условий $(I_a)-(I_g)$ получаем $J_0 \to \infty$.

Аналогично, при $t_n \le t < \infty$, используя оценку

$$y_n^2(t) \le J_n \tag{2.4}$$

и условие (I.8), имеем

$$1 \le \frac{1}{\eta^2} \max_{t_n \le t_0 < \infty} F(J_n, t_0). \tag{2.5}$$

Отсюда, если $t_n \to \infty$, то при выполнении условий $(I_a)-(I_g)$ получаем $J_n \to \infty$.

Итак, доказано второе утверждение леммы I.

Покажем, что $J_j(t_j, t_{j+1}, y_j)$ – непрерывная функция от t_j и t_{j+1}. Доказательство проведем для интервала $0 \le t \le t_1$. В других возможных случаях: $t_j \le t \le t_{j+1}$ и $t_n \le t < \infty$ доказательство аналогично.

Пусть функции $\hat{y}_0(t)$ и $y_0(t)$ являются решениями вариационной задачи соответственно на промежутках $0 \le t \le \hat{t}_1$ и $0 \le t \le t_1$, причем $0 < \hat{t}_1 \le t_1$. Положим, $\xi = \frac{t_1}{\hat{t}_1} \geqslant 1$. Определим функцию $U(t) = \alpha y_0(\xi t)$ на промежутке $0 \le t \le \hat{t}_1$, причем $U(0) = U(\hat{t}_1) = 0$. Постоянную α выберем так, чтобы функция $U(t)$ удовлетворяла условию (I.8) на этом промежутке. Так как функция $y_0(t)$ является решением вариационной задачи и удовлетворяет условию (I.8) на промежутке $0 \le t \le t_1$, то при $\hat{t}_1 \to t_1$ имеем $\alpha \to 1$. Функция $U(t)$ является допустимой функцией для вариационной задачи на промежутке $0 \le t \le \hat{t}_1$, поэтому

$$J_0(0, \hat{t}_1, \hat{y}_0) \le J_0(0, \hat{t}_1, U) = \alpha^2 \int_0^{\hat{t}_1} \left[\dot{y}_0^2(\xi t) + Q_\ell\, y_0^2(\xi t)\right] dt.$$

Переходя в последнем интеграле к новым переменным интегрирования $\xi t = s$ и учитывая $\alpha \to 1$, при $\hat{t}_1 \to t_1$ получим

$$J_0(0, \hat{t}_1, \hat{y}_0) \le J_0(0, t_1, y_0) + \gamma, \tag{2.6}$$

где $\gamma > 0$ и $\lim\limits_{\hat{t}_1 \to t_1} \gamma \to 0$.

Из (2.6) и свойства I леммы I следует непрерывная зависимость $J_0(0, t_1, y_0)$ от t_1. Это и завершает доказательство леммы I.

Теперь будем минимизировать функционал $J(t_1, \dots, t_n, y)$ на интервале $(0, \infty)$ при соблюдении условия (I.8) на каждом промежутке $t_j \le t \le t_{j+1}$. Минимизация ведется путем вариации точек t_j $(j=1,2,\ldots,n)$. Учитывая три свойства $\mathcal{J}_j$, доказанные в лемме I, убедимся, что функция $\mathcal{J}(t_1,\ldots,t_n,y)$ достигает минимума на некотором разбиении $(\bar{t}_1,\bar{t}_2,\ldots,\bar{t}_n)$ интервала $(0,\infty)$.

В самом деле, согласно свойству 2 леммы I величины t_j должны быть отделены друг от друга, т.е. $(t_{j+1}-t_j)\geq\varepsilon$, где ε – достаточно маленькое фиксированное число, кроме того, $t_n \le T$, где T – достаточно большое фиксированное число. Поэтому переменные $t_1,t_2,\ldots,t_n$ изменяются в замкнутой ограниченной области, причем из свойства 3 леммы I видно, что в этой области функционал $\mathcal{J}(t_1,\ldots,t_n,y)$ – непрерывная функция переменных $t_1,t_2,\ldots,t_n$.

Тогда существует ограниченная последовательность точек

$$\{t_{1m},t_{2m},\ldots,t_{nm}\} \qquad (m=1,2,\ldots,),$$

минимизирующая функционал $\mathcal{J}(t_{1m},\ldots,t_{nm},y)$ на интервале $(0,\infty)$ при соблюдении условия (I.8) на каждом промежутке $t_j\le t\le t_{j+1}$. Из нее можно извлечь подпоследовательность

$$\{t_{1\bar{m}},t_{2\bar{m}},\ldots,t_{n\bar{m}}\} \qquad (\bar{m}=1,2,\ldots),$$

которая сходится к $(\bar{t}_1,\bar{t}_2,\ldots,\bar{t}_n)$. В силу непрерывной зависимости $\mathcal{J}(t_1,\ldots,t_n,y)$ от переменных t_j $(j=1,2,\ldots,n)$ получаем

$$\lim_{t_j\to\bar{t}_j\,(j=1,2,\ldots,n)} \mathcal{J}(t_1,\ldots,t_n,y)=\mathcal{J}(\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_n,y)=\inf\mathcal{J}(\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_n,y).$$

Следовательно, $\min\mathcal{J}$ действительно достигается при некотором разбиении $(\bar{t}_1,\bar{t}_2,\ldots,\bar{t}_n)$ интервала $[0,\infty)$. Функция $y_j(t)$ на каждом из интервалов $[\bar{t}_j,\bar{t}_{j+1}]$ удовлетворяет уравнению (I) и условию $y(\bar{t}_j)=y(\bar{t}_{j+1})=0$. Считаем, без ограничения общности, что $y_j(t)$ меняет знак при прохождении через точки $\bar{t}_j$. Покажем теперь, что функция $y(t)$, составленная из $y_j(t)$ $(j=1,2,\ldots,n)$, есть решение уравнения (I) на всем интервале $[0,\infty)$. Для этого достаточно установить равенство

$$\lim_{t\to\bar{t}_j-0}\dot{y}_j(t)=\lim_{t\to\bar{t}_j+0}\dot{y}_j(t), \qquad j=1,2,\ldots,n. \tag{2.7}$$

§ 3. В этом разделе докажем, что функция $y(t)$, составленная из $y_j(t)$ $(j=1,2,\ldots,n)$, не будет решением вариационной за-

дачи (I.I)-(I.2) на всем интервале $[0,\infty)$, если не будет выполняться условие (2.7). Для удобства введем следующие обозначения: $t_{j-1}=a$, $t_j=c$ и $t_{j+1}=b$. Пусть функция $y(t)$ является решением вариационной задачи на $[a,b]$.
Без ограничения общности предположим, что $y(t)>0$ на (a,c) и $y(t)<0$ на (c,b) . Определим функцию $u(t)$ следующим образом:

$$u(t) = \begin{cases} u(t)=y(t) \text{, при } [a,c-\delta] \text{ и } [c+\delta,b], \\ u(t)=At+B \text{, при } (c-\delta,\ c+\delta), \end{cases} \tag{3.I}$$

где постоянные A и B подбираем из условия непрерывности $u(t)$ на (a,b)

$$A=(2\delta)^{-1}[y(c+\delta)-y(c-\delta)],$$

$$B=y(c-\delta)-(2\delta)^{-1}(c-\delta)[y(c+\delta)-y(c-\delta)]. \tag{3.2}$$

Пусть в точке $t=c'$ - функция $u(c')=0$. В интервале $[a,c']$ функцию $u(t)$ умножим на σ и в интервале $[c',b]$ - на ρ . Постоянные σ и ρ подбираем из уоловия

$$\int_a^{c'} G(\sigma^2 u^2(t),t)\,dt=\int_a^{c} G(y^2(t),t)\,dt \tag{3.3}$$

$$\int_{c'}^{b} G(\rho^2 u^2(t),t)\,dt=\int_c^{b} G(y^2(t),t)\,dt. \tag{3.4}$$

Равенства (3.3) и (3.4) обеспечивают выполнение условия нормировки (I.2) для функции $u(t)$ на промежутке $[a,b]$. Так как при $\delta\to 0$ имеем $c'\to c$, то из (3.3) и (3.4) получаем

$$\lim_{\delta\to 0}\sigma(\delta)\to 1 \quad , \quad \lim_{\delta\to 0}\rho(\delta)=1. \tag{3.5}$$

Теперь рассмотрим функционал на промежутке $a\le t\le b$

$$J(u)=\int_a^b[\dot u^2(t)+Q_\ell(t)u^2(t)]\,dt.$$

Учитывая определение (3.I) функции $u(t)$ и свойства (3.5), повторяя выкладки и рассуждения, приведенные в работе /2/, имеем

$$J(u)\le J(y)-\frac{\delta}{2}[\dot y_+(c)-\dot y_-(c)]^2+o(\delta), \tag{3.6}$$

где

$$\dot{y}_+(c) = \lim_{x \to c+0} \dot{y}(t)$$

$$\dot{y}_-(c) = \lim_{x \to c-0} \dot{y}(t) .$$

Если $\dot{y}_+(c) \neq \dot{y}_-(c)$, то при достаточно малом положительном δ выражение $-\frac{\delta}{2}[\dot{y}_-(c) - \dot{y}_-(c)]^2 + O(\delta)$ отрицательно, поэтому из (3.6) имеем

$$J(u) < J(y).$$

Но это противоречит предположению, что $y(t)$ есть решение вариационной задачи. Противоречие можно избежать, если выполняется условие (2.7). Тем самым доказали утверждение, сформулированное в начале этого раздела.

Так как функция $y_j(t)$ на каждом промежутке $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ является решением уравнения (I) и на концах промежутка выполняется условие (I.I0) и (2.7), то функция $y(t)$, составленная из $y_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, является решением краевой задачи (I)-(2), и тем самым завершается доказательство теоремы I.

В заключение отметим, что вопрос об однозначной разрешимости вариационной задачи (I.I)-(I.2) остается открытым. Другой вопрос, который остается без ответа, а именно - имеет ли задача (I)-(2) дополнительные решения с n нулями в $[0, \infty)$, в то же время не является решением вариационной задачи (I.I)-(I.2).

Литература

I. Амирханов И.В., Жидков Е.П. ОИЯИ, Р5-80479 , Дубна, 1980.

2. Nehari Z. Proc. Royal Irish Acad., 1963, A62, p. 117;
Trans. Amer. Math. Soc. 1960, 95, p. 101;
Acta Math. 1961, 105, p. 141.

3. Ryder G.H. Pacific Journal of Mathematics. 1967, Vol. 22, p. 477.

4. Амирханов И.В., Жидков Е.П. ОИЯИ, Р5-I2925, Дубна, 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 августа 1980 года.