сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-80-479

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЧАСТИЦЕПОДОБНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПОЛЕВЫХ МОДЕЛЕЙ.

Часть 1

1980

Амирханов И.В., Жидков Е.П. P5-80-479

Достаточное условие существования частицеподобного решения для некоторых полевых моделей. Часть 1

Проведено исследование нелинейного уравнения

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \left(\eta^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right)\phi(x) = -\phi(x)\, F(\phi^2(x), x), \quad \eta > 0 \qquad /1/$$

при граничных условиях

$$\phi(0) = \phi(\infty) = 0 . \qquad /2/$$

Уравнение /1/ при значениях параметра $\ell = 0$ ранее исследовалось многими авторами.

В настоящей работе рассматриваются любые натуральные значения параметра ℓ. С помощью вариационного подхода доказана следующая основная теорема. Теорема: Если функция $F(\phi^2(x), x)$ удовлетворяет условиям /1а/-/1д/, то существуют положительные частицеподобные решения краевой задачи /1-/-/2/.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1980

Amirkhanov I.V., Zhidkov E.P. P5-80-479

Sufficient Condition for the Existence of a Particle-Like Solution for Some FIELD Model. Part I

An investigation of nonlinear equation

Некоторые модели теории поля/I-4/ приводят к исследованию существования решений следующего нелинейного дифференциального уравнения:

$$\ddot{\Psi}(x) - Q_\ell(x)\Psi(x) = -\Psi(x) F(\Psi^2(x), x),$$
$$Q_\ell(x) = \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + \eta^2, \quad \eta > 0, \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots \qquad (I)$$

при граничных условиях

$$\Psi(0) = \Psi(+\infty) = 0 . \qquad (2)$$

Под частицеподобным решением понимается любое нетривиальное решение $\Psi(x)$ краевой задачи (I)-(2). Положительное частицеподобное решение - это частицеподобное решение, не обращающееся в нуль ни в одной точке, кроме $x=0$ и $x=\infty$, и $\Psi(x)>0$ при $x>0$.

В частном случае, когда нелинейная функция выбирается в виде $F(\Psi^2, x) = \left(\frac{\Psi}{x}\right)^{k-1}$, краевая задача (I)-(2) исследовалась многими авторами/5-9/.

В случае модели Фридберга-Ли-Сирлина/3/ в работах/I0/ приведены достаточные условия существования частицеподобных решений задачи (I)-(2).

В работе/II/ проведено исследование уравнения (I) при $\ell=0$, когда функция $F(z,x)$ удовлетворяет следующим условиям:

(Iа) $F(z,x)$ непрерывна по z и x при $0 \le z < \infty$ и $0 < x < \infty$.

(Iб) $F(z,x) > 0$ для $z > 0$, $x > 0$.

(Iв) для фиксированного положительного x и $0 \le z_1 < z_2 < \infty$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$z_2^{-\delta} F(z_2, x) > z_1^{-\delta} F(z_1, x).$$

(I_z) $\lim\limits_{x\to\infty} F(c^2, x) = 0$ для всех конечных c.

(I_g) $\int\limits_0^a x^{\frac{1}{2}-\varepsilon} F(c^2 x, x)\,dx < \infty$ для всех конечных c, $0<a<\infty$, и некоторого $\varepsilon \geqslant 0$.

В данной работе для любых натуральных значений параметра ℓ доказана следующая теорема.

Теорема I. Если функция $F(z,x)$ удовлетворяет условиям $(I_a)-(I_g)$, то существуют положительные частицеподобные решения краевой задачи (I)-(2).

Доказательство теоремы (I) приведено в §§ I-4 с помощью вариационного подхода.

§ I. В этом параграфе сформулируем соответствующую вариационную задачу.

Ищется минимум функционала

$$\mathcal{J}(y) = \int\limits_0^\infty \left[\dot{y}^2(t) + Q_\ell(t)\, y^2(t)\right] dt \tag{I.I}$$

при нормировочном условии

$$K(y) = \int\limits_0^\infty G\left(y^2(t), t\right) dt = B, \tag{I.2}$$

где

$$G(y^2(t), t) = \int\limits_0^{y^2(t)} F(z,t)\, dz. \tag{I.3}$$

Функция $F(z,t)$ удовлетворяет условиям $(I_a)-(I_g)$ и B - фиксированное число из промежутка $0 < B < \infty$.

Вариационную задачу (I.I)-(I.2) будем рассматривать в классе функций $Y(0,\infty)$, определяемых условиями:

а) $y(t)$ непрерывны в промежутке $[0,\infty)$ и имеют в нем кусочно-непрерывные первые производные $\dot{y}(t)$;

б) $y(t)$ положительны при $0<t<\infty$;

в) $y(0) = y(\infty) = 0$;

г) $\mathcal{J}(y) < \infty$;

д) $K(y) = \mathcal{D}$; $\mathcal{D}$ - произвольное число из промежутка $0 < \mathcal{D} < \infty$.

Под решением вариационной задачи (I.I)-(I.2) будем понимать функцию $y(t) \in Y(0,\infty)$, доставляющую минимум функционалу (I.I) при выполнении условия (I.2).

В дальнейшем будет показано, что решение вариационной задачи (I.I)-(I.2) является и решением задачи (I)-(2).

Теорема 2. Если функция $F(z,x)$ удовлетворяет условиям $(I_a)-(I_g)$, то существует решение вариационной задачи (I.I)-(I.2), рассматриваемой в классе функций $Y(0,\infty)$.

Доказательство теоремы 2 является следствием утверждений, доказанных в следующих трех леммах (§§ 2-4).

§ 2. В этом параграфе установим некоторые свойства функций $y(t)$ из класса $Y(0,\infty)$.

Лемма I. Если функция $F(z,x)$ удовлетворяет условиям $(I_a)-(I_g)$, то в классе функций $Y(0,\infty)$ существует последовательность $\{y_n(t)\}$, минимизирующая функционал (I.I) при выполнении условия (I.2), и такая, что:

I. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{J}(y_n) = \lambda$, $\lambda > 0$. (2.I)

2. Для любого конечного $T>0$ из последовательности $\{y_n(t)\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ подпоследовательность $\{y_{n_m}(t)\}$, т.е.

$$\lim_{m\to\infty} y_{n_m}(t) = y(t), \tag{2.2}$$

где $y(t)$ - непрерывная функция на $[0,T]$.

Доказательство разобъем на несколько этапов.

I°. Установим некоторые оценки для функций $y(t)$ из класса $Y(0,\infty)$.

Введем обозначения

$$\mathcal{J}_T(y) = \int\limits_0^T \left[\dot{y}^2(t) + Q_\ell(t)\, y^2(t)\right] dt, \tag{2.3}$$

$$K_T(y) = \int\limits_0^T G\left(y^2(t), t\right) dt. \tag{2.4}$$

Используя (2.3) и то, что $y(0)=0$, при $0 \le t \le T$ будем иметь

$$y^2(t) = \left(\int_0^t \dot{y}(s)ds\right)^2 \le t\int_0^t \dot{y}^2(s)ds \le t\,\mathcal{J}_T(y) \tag{2.5}$$

и

$$y^2(t) = 2\int_0^t y(s)\,\dot{y}(s)ds \le \frac{1}{\eta}\int_0^t [\dot{y}^2(s) + \eta^2 y^2(s)]ds \le \frac{1}{\eta}\mathcal{J}_T(y). \tag{2.6}$$

Так как функция $F(z,t)$ удовлетворяет условию (I_ε), то из (1.3) получим следующее неравенство :

$$G(y^2,t) = \int_0^{y^2} z^\varepsilon[z^{-\varepsilon}F(z,t)]dz \le \frac{1}{(1+\varepsilon)}\,y^2F(y^2,t) . \tag{2.7}$$

Интегрируя обе части (2.7) по t от 0 до T и учитывая (2.5) и (2.6) для $K_T(y)$, получаем оценку

$$K_T(y) \le M(\mathcal{J}_T)\,\mathcal{J}_T(y) , \tag{2.8}$$

где

$$M(\mathcal{J}_T) = \frac{1}{(1+\varepsilon)}\left[M_0(t_1,0) + \frac{1}{\eta^2}M_1(t_1,t_0)\right],$$

$$M_0(t_1,0) = t_1^{\varepsilon_1}\int_0^{t_1} s^{1-\varepsilon_1}F(\mathcal{J}_T s, s)ds ,$$

$$M_1(t_1,t_0) = \max_{t_1 \le t_0 < T} F\left(\frac{\mathcal{J}_T}{\eta}, t_0\right) ,$$

$$\varepsilon > 0 \quad , \varepsilon_1 \geqslant 0 , \qquad 0 < t_1 < T .$$

Учитывая существование предела

$$\lim_{T\to\infty} \mathcal{J}_T(y) = \mathcal{J}(y) < \infty ,$$

из (2.5) и (2.6) имеем

$$y^2(t) \le t\,\mathcal{J}(y) , \tag{2.9}$$

$$y^2(t) \le \frac{1}{\eta}\mathcal{J}(y). \tag{2.10}$$

2^0. Докажем первое утверждение леммы I.

Переходя к пределу в (2.8) при $T\to\infty$ и учитывая (I.2), получим

$$B \le m\cdot\mathcal{J}(y) , \tag{2.11}$$

где $$m = \lim_{T\to\infty} M(\mathcal{J}_T).$$

Так как функция удовлетворяет условиям (I_2) и (I_g), то $m < \infty$ и $m \ne 0$.

Из (2.II) следует, что точная нижняя грань функционала (I.I) при выполнении условия (1.2) является положительной:

$$\inf_{y\in Y(0,\infty)} \mathcal{J}(y) = \lambda > 0 , .$$

Тогда существует такая последовательность функций $\{y_n\} \in Y(0,\infty)$ – минимизирующая последовательность, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(y_n) = \lambda , \quad \lambda > 0 .$$

Это и доказывает первое утверждение леммы I.

3^0. Докажем второе утверждение леммы I.

Из (2.I) следует, что числовая последовательность $\{\mathcal{J}(y_n)\}$ ограничена, т.е. существует положительная постоянная c, не зависящая от n, такая, что

$$\mathcal{J}(y_n) \le c^2 , \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{2.12}$$

Из (2.10) и (2.12) имеем

$$y_n(t) \le \frac{c}{\sqrt{\eta}} , \qquad n = 1, 2, \dots , \tag{2.13}$$

т.е. последовательность $\{y_n(t)\}$ равномерно ограничена. Кроме того, для $0 \le t_1 < t_2 < \infty$ имеем

$$|y_n(t_2)-y_n(t_1)|^2 = \left(\int_{t_1}^{t_2} \dot{y}_n(s)\,ds\right)^2 \le (t_2-t_1)\int_{t_1}^{t_2} \dot{y}_n^2(s)\,ds \le$$

$$\le (t_2-t_1)\quad J(y_n) \le c^2(t_2-t_1). \tag{2.14}$$

Это устанавливает равностепенную непрерывность последовательности $\{y_n\}$.

Из последовательности $\{y_n(t)\}$, рассматриваемой на любом конечном отрезке $0\le t\le T$, согласно теореме Арцела можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{y_{n_m}(t)\}$, которая сходится к непрерывной функции $y(t)$ на $[0,T]$, что и доказывает второе утверждение леммы I.

В следующих двух параграфах исследуется вопрос о непрерывности предельной функции $y(t)$ и ее производной на бесконечном интервале $(0,\infty)$.

§ 3. Следуя Нехари[5], рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\ddot{U}_n(t) - Q_\ell(t)\,U_n(t) = -\alpha_n\, y_n(t)\, F(y_n^2(t),t) \tag{3.1}$$

при граничных условиях

$$U_n(0) = U_n(\infty) = 0, \tag{3.2}$$

где α_n - некоторые положительные постоянные, которые будут выбраны ниже, а $y_n(t)$ - ранее выбранная равномерно сходящаяся подпоследовательность $\{y_{n_m}(t)\}$ (для краткости индекс m опущен).

Лемма 2. Если функция $F(y^2,t)$ удовлетворяет условиям (I_a)-(I_g), то существует единственное решение $U_n(t)$ задачи (3.1)-(3.2). Это решение обладает следующими свойствами:

$$\lim_{t\to 0} U_n(t)\dot{U}_n(t)=0, \qquad \lim_{t\to\infty} U_n(t)\dot{U}_n(t)=0. \tag{3.3}$$

Доказательство.

Очевидно, что однородное уравнение

$$\ddot{\phi}(t) - Q_\ell(t)\,\phi(t) = 0, \tag{3.4}$$

соответствующее уравнению (3.1), при граничных условиях $\phi(0)=\phi(\infty)=0$ имеет только тривиальное решение.

Решение краевой задачи (3.1)-(3.2) представим в виде интеграла

$$U_n(t) = \alpha_n \int_0^\infty \mathcal{D}(t,s)\, y_n(s)\, F(y^2,s)\,ds, \tag{3.5}$$

где

$$\mathcal{D}(t,s) = \frac{1}{N}\begin{cases}\Phi_1(s)\,\Phi_2(t), & 0\le s\le t,\\ \Phi_1(t)\,\Phi_2(s), & t\le s<\infty.\end{cases} \tag{3.6}$$

Здесь $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ - соответственно регулярные и нерегулярные в точке $t=0$ линейно независимые решения уравнения (3.4), причем $[\dot{\Phi}_1\Phi_2 - \Phi_1\dot{\Phi}_2]=N$ и для функций Φ_1 и Φ_2 при $0\le t<\infty$ имеют место оценки

$$\Phi_1(t) \le \beta_{1\ell}\left(\frac{\eta t}{1+\eta t}\right)^{\ell+1} e^{\eta t},$$

$$\Phi_2(t) \le \beta_{2\ell}\left(\frac{\eta t}{1+\eta t}\right)^{-\ell} e^{-\eta t}, \tag{3.7}$$

где $\beta_{1\ell}$, $\beta_{2\ell}$ - положительные постоянные и $N=2\eta$.

Найдем поведение функции $U_n(t)$ при $t\to 0$ и $t\to\infty$. Для этого соотношение (3.5) перепишем в виде

$$U_n(t) = \frac{\alpha_n}{N}\left[\Phi_2(t)\Psi_1(t) + \Phi_1(t)\Psi_2(t)\right], \tag{3.8}$$

где

$$\Psi_1(t) = \int_0^t \Phi_1(s)\, y_n(s)\, F(y_n^2,s)\,ds, \tag{3.9}$$

$$\Psi_2(t) = \int_t^\infty \Phi_2(s)\, y_n(s)\, F(y_n^2,s)\,ds. \tag{3.10}$$

Используя неравенства (2.9), (2.10), (2.13) и (3.7), получаем следующие оценки для Ψ_1 и Ψ_2:

а) при $t\to 0$

$$\Psi_1(t) \le c\,\beta_{1\ell}\left(\frac{\eta t}{1+\eta t}\right)^{\ell+1} e^{\eta t}\, M_2(t,0),$$

$$\Psi_2(t) \le c\,\beta_{2\ell}\left(\frac{\eta t}{1+\eta t}\right)^{-\ell} e^{-\eta t}\left[M_2(t_2,t) + \eta^{-\frac{3}{2}} e^{-\eta(t_2-t)} M_1(t_2,t_0)\right]; \tag{3.11}$$

б) при $t \to \infty$

$$\Psi_1(t) \le c\beta_{1\ell}\left(\frac{\eta t}{1+\eta t}\right)^{\ell+1} e^{\eta t}\left[e^{-\eta(t-t_1)}M_2(t_1,0)+\eta^{-\frac{1}{2}}M_3(t,t_1)\right], \tag{3.12}$$

$$\Psi_2(t) \le c\beta_{1\ell}\left(\frac{\eta t}{1+\eta t}\right)^{-\ell} e^{-\eta t}\left[M_2(t_2,t)+\eta^{-\frac{3}{2}}e^{-\eta(t_2-t)}M_1(t_2,t_0)\right],$$

где

$$M_1(t_2,t_0)=\max_{t_2<t_0<\infty} F\left(\frac{c^2}{\eta},t_0\right), \quad t<t_2<\infty,$$

$$M_2(t_2,t)=t_2^{\varepsilon}\int_t^{t_2} s^{\frac{1}{2}-\varepsilon}F(c^2 s,s)\,ds, \qquad \varepsilon \geqslant 0,$$

$$M_3(t,t_1)=e^{-\eta t}\int_{t_1}^{t} e^{\eta s}F\left(\frac{c^2}{\eta},s\right)ds, \qquad 0<t_1<t.$$

Учитывая оценки (3.II) и (3.I2), из равенства (3.8) получаем оценки для $U_n(t)$:

а) при $t \to 0$

$$U_n(t) \le \alpha_n\beta_{1\ell}\beta_{2\ell}\frac{c}{2}\left(\frac{t}{1+\eta t}\right)M_{12}(t); \tag{3.13}$$

б) при $t \to \infty$

$$U_n(t) \le \alpha_n\beta_{1\ell}\beta_{2\ell}\frac{c}{2}\left(\frac{t}{1+\eta t}\right)M_{123}(t), \tag{3.14}$$

где

$$M_{12}(t)=\left[M_2(t,0)+M_2(t_2,t)+\eta^{-\frac{3}{2}}e^{-\eta(t_2-t)}M_1(t_2,t_0)\right],$$

$$M_{123}(t)=\Big[e^{-\eta(t-t_1)}M_2(t_1,0)+\eta^{-\frac{1}{2}}M_3(t,t_1)+$$
$$+M_2(t_2,t)+\eta^{-\frac{3}{2}}M_1(t_2,t_0)\Big].$$

Так как функция $F(z,t)$ удовлетворяет условиям (I_a)-(I_g), то нетрудно убедиться, что

$$\lim_{t\to 0} M_{12}(t)=const<\infty, \tag{3.15}$$

$$\lim_{t\to\infty} M_{123}(t)=0.$$

Покажем, что выполняются предельные соотношения (3.3). Для этого найдем поведение производных $\dot{U}_n(t)$ при $t\to 0$ и $t\to\infty$. Дифференцируя равенство (3.8) по t, получаем

$$\dot{U}_n(t)=\frac{\alpha_n}{N}\left[\dot{\Phi}_2(t)\Psi_1(t)+\dot{\Phi}_1(t)\Psi_2(t)\right]. \tag{3.16}$$

Используя оценки (3.II) и (3.I2), из (3.I6) получаем оценки для $\dot{U}_n(t)$:

а) при $t \to 0$

$$\dot{U}_n(t) \le \alpha_n\beta_{1\ell}\beta_{2\ell}\frac{c}{2}(1+\ell)M_{12}(t); \tag{3.17}$$

б) при $t \to \infty$

$$\dot{U}_n(t) \le \alpha_n\beta_{1\ell}\beta_{2\ell}\frac{c}{2}(1+\ell)M_{123}(t). \tag{3.18}$$

Так как функция $F(y^2,t)$ удовлетворяет условиям (I_a)-(I_g), то из (3.I3)-(3.I8) следуют предельные соотношения (3.3), и функция (3.5) является единственным решением краевой задачи (3.I)-(3.2).

Лемма 2 доказана полностью.

§ 4. В этом параграфе установим свойства решений краевой задачи (3.I)-(3.2).

Лемма 3. Если функция $F(y^2,t)$ удовлетворяет условиям (I_a)-(I_g), то имеют место следующие утверждения:

I°. Решения $U_n(t)$ краевой задачи (3.I)-(3.2) принадлежат классу функций $Y(0,\infty)$.

2°. Из последовательности $\{U_n(t)\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{U_{n_m}(t)\}$, причем предельная функция $U(t)=\lim_{m\to\infty}U_{n_m}(t)$ является непрерывной при $0\le t<\infty$.

3^0. Пределы последовательностей $\{U_{n_m}(t)\}$ и $\{y_{n_m}(t)\}$ совпадают, т.е.

$$U(t)=\lim_{m\to\infty} U_{n_m}(t)=\lim_{m\to\infty} y_{n_m}(t)=y(t) \tag{4.1}$$

при $0\le t<\infty$.

4^0. Производная $\dot U(t)$ предельной функции $U(t)$ непрерывна при $0<t<\infty$, причем

$$\lim_{m\to\infty} \dot U_{n_m}(t)=\dot U(t). \tag{4.2}$$

Доказательство леммы проведем в несколько этапов.

I. Докажем, что $U_n(t)\in Y(0,\infty)$, и укажем способ выбора α_n.

Убедимся сначала, что функция $U_n(t)$ принадлежит к классу $Y(0,\infty)$.

В самом деле:

а) так как по условию леммы 3 функция $U_n(t)$ является решением уравнения второго порядка (3.I), то она непрерывна на $[0,\infty)$ и имеет непрерывную первую производную $\dot U_n(t)$ на $(0,\infty)$;

б) так как $\alpha_n>0$, $y_n(t)$ и $\mathcal{D}(t,s)$ – положительные функции, $0<t<\infty$, $F(y_n^2,t)$ удовлетворяет условиям $(I_a)-(I_g)$, то из (3.5) следует, что и $U_n(t)$ – положительная функция при $0<t<\infty$;

в) так как $U_n(t)$ – решение краевой задачи (3.I)-(3.2), то, очевидно, $U_n(0)=U_n(\infty)=0$;

г) покажем, что интеграл $\mathcal{J}(U_n)$ (см.(I.I)) существует. Умножая уравнение (3.I) на $U_n(t)$, интегрируя обе части по t от 0 до T и учитывая (2.3) и (3.3), получим

$$\mathcal{J}_T(U_n)=\alpha_n\int_0^T U_n(s)\,y_n(s)\,F(y_n^2(s),s)\,ds+ U_n(T)\,\dot U_n(T) \tag{4.3}$$

или

$$\mathcal{J}_T(U_n)\le\alpha_n\,\mathcal{J}_T^{\frac12}(U_n)\cdot\mathcal{J}_T^{\frac12}(y_n)\left[M_0(t_1,0)+M_1(t_1,t_0)\right]+ U_n(T)\dot U_n(T)\quad ,\quad 0<t_1\le t_0<T. \tag{4.4}$$

Отсюда в силу (3.3) и того, что $M_0<\infty$ и $M_I<\infty$, получаем

$$\mathcal{J}(U_n)<\infty;$$

д) так как неравенство (2.8) справедливо для функции $U_n(t)$:

$$K_T(U_n)\le M(\mathcal{J}_T)\,\mathcal{J}_T(U_n) \tag{4.5}$$

и $\mathcal{J}(U_n)<\infty$, то, переходя в (4.5) к пределу при $T\to\infty$, получим

$$K(U_n)<\infty. \tag{4.6}$$

Из (4.6) следует, что постоянные α_n можно подобрать так, чтобы

$$K(U_n)=B. \tag{4.7}$$

Итак, доказано, что $U_n(t)\in Y(0,\infty)$.

Покажем теперь, что последовательность $\{\alpha_n\}$, подобранная из условия нормировки (4.7), является ограниченной и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$.

Из (4.3) при $T\to\infty$ имеем

$$\mathcal{J}(U_n)=\alpha_n\int_0^\infty U_n(s)\,y_n(s)\,F(y_n^2(s),s)\,ds. \tag{4.8}$$

Так как функция $F(z,t)$ удовлетворяет условию (I_e), то функция $G(z,t)$ (см.(I.3)) является выпуклой по переменной z, и мы имеем

$$G(U_n^2,t)\ge G(y_n^2,t)+(U_n^2-y_n^2)\,F(y_n^2,t). \tag{4.9}$$

Интегрируя обе части (4.9) по t от 0 до ∞ и используя (I.2) и (4.7), получим

$$\int_0^\infty U_n^2\,F(y_n^2(s),s)\,ds\le\int_0^\infty y_n^2\,F(y_n^2(s),s)\,ds. \tag{4.10}$$

Применяя неравенство Гельдера к интегралу, стоящему в правой части (4.8), и учитывая (4.10), имеем

$$\mathcal{J}(U_n)\le\alpha_n\int_0^\infty y_n^2\,F(y_n^2(s),s)\,ds. \tag{4.11}$$

Умножая уравнение (3.I) на $y_n(t)$, интегрируя обе части по t от 0 до ∞ и используя (3.3), получим

$$\mathcal{J}(u_n)+\mathcal{J}(y_n)-\mathcal{J}(u_n-y_n)=2\alpha_n\int_0^\infty y_n^2 F(y_n^2(s),s)\,ds. \tag{4.12}$$

Из (4.11) и (4.12) получаем неравенства

$$\mathcal{J}(u_n)\le\mathcal{J}(y_n). \tag{4.13}$$

Так как последовательность функций $\{u_n(t)\}$ также является допустимой для вариационной задачи (1.1)-(1.2), то нижний предел

$$\varliminf_{n\to\infty}\mathcal{J}(u_n)\geq\lambda. \tag{4.14}$$

Тогда из (2.1), (4.13) и (4.14) получим

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{J}(u_n)=\lim_{n\to\infty}\mathcal{J}(y_n)=\lambda\ . \tag{4.15}$$

Учитывая (4.11), (4.15) и свойства (I_0)-(I_9), которым удовлетворяют функции $F(z,t)$, нетрудно убедиться, что последовательность $\{\alpha_n\}$ ограничена, т.е.

$$\alpha_n\le c^2/B \qquad n=1,2,3,\dots\ . \tag{4.16}$$

Отсюда следует, что из последовательности $\{\alpha_n\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность α_{n_m}, т.е.

$$\lim_{m\to\infty}\alpha_{n_m}=\alpha\ .$$

2 . Докажем утверждение пункта 2^0 леммы 3. Учитывая (4.16), оценки (3.13) и (3.14) перепишем в следующем виде:

а) при $t\to 0$

$$u_n(t)\le\frac{\beta_{1e}\,\beta_{2e}\,c^3}{2B}\left(\frac{t}{1+\eta t}\right)M_{12}(t), \tag{4.17}$$

б) при $t\to\infty$

$$u_n(t)\le\frac{\beta_{1e}\beta_{2e}c^3}{2B}\left(\frac{t}{1+\eta t}\right)M_{123}(t)\ , \tag{4.18}$$

Правая часть неравенств (4.17) и (4.18) не зависит от индекса n.

Из (2.13) и (4.13) следует

$$u_n(t)\le\frac{c}{\sqrt{\eta}}\ ,\qquad n=1,2,3,\dots\ , \tag{4.19}$$

т.е. последовательность $\{u_n(t)\}$ равномерно ограничена. Кроме того, для $0\le t_1<t_2<\infty$ имеем (см.(2.14))

$$|u_n(t_2)-u_n(t_1)|^2\le\frac{c^2}{\eta}(t_2-t_1)\ . \tag{4.20}$$

Это устанавливает равностепенную непрерывность последовательности $\{u_n\}$.

Тогда, учитывая (4.17)-(4.20), убеждаемся, что последовательность функций $\{u_n(t)\}$ удовлетворяет всем условиям теоремы о компактности класса функций на бесконечном интервале /12/. Следовательно, из $\{u_n\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{u_{n_m}(t)\}$:

$$\lim u_{n_m}(t)=u(t), \tag{4.21}$$

причем $u(t)$ является непрерывной функцией при $0\le t<\infty$. Доказан пункт 2^0 леммы 3.

3 . Докажем утверждение пункта 3^0 леммы 3.

Так как формулы (4.11) и (4.12) справедливы и для подпоследовательности $\{u_{n_m}(t)\}$, то из (4.11) и (4.12) имеем

$$\lim_{m\to\infty}\mathcal{J}(u_{n_m}-y_{n_m})=0. \tag{4.22}$$

Тогда из (2.10) и (4.22) получим

$$\lim_{m\to\infty}|u_{n_m}(t)-y_{n_m}(t)|=0. \tag{4.23}$$

Откуда с учетом (4.21) вытекает соотношение (4.1), что и требовалось доказать.

4 . Докажем утверждение пункта 4^0 леммы 3.

Для этого равенство (3.5) перепишем в виде

$$\left|y_{n_m}-\alpha_{n_m}\int_0^\infty \mathcal{D}(t,s)\,y_{n_m}F(y_{n_m}^2,s)\,ds\right|=|y_{n_m}(t)-u_{n_m}(t)|$$

и перейдем к пределу при $m \to \infty$. Учитывая (4.I) и (4.23), получим

$$y(t) = \alpha \int_0^\infty \mathcal{D}(t,s)\, y(s)\, F(y^2(s), s)\, ds \qquad (4.24)$$

Дифференцируя (4.24) по t, заменяя $y(t)$ на $U(t)$, будем иметь

$$\dot{u}(t) = \frac{\alpha}{N}\Big[\dot{\phi}_2(t)\int_0^t \phi_1(s)\, U(s) F(U^2, s)\, ds + \dot{\phi}_1(t)\int_t^\infty \phi_2(s)\, U(s) F(U^2, s)\, ds\Big]. \qquad (4.25)$$

Отсюда следует, что если $F(z,x)$ удовлетворяет условиям $(I_a)-(I_g)$, то функция $\dot{u}(t)$ непрерывна при $0 < t < \infty$.

Теперь перепишем (3.I6) в виде

$$\dot{U}_{n_m}(t) = \frac{\alpha_{n_m}}{N}\Big[\dot{\phi}_2(t)\int_0^t \phi_1(s)\, y_{n_m}(s)\, F(y^2_{n_m}, s)\, ds + \dot{\phi}_1(t)\int_t^\infty \phi_2(s)\, y_{n_m}(s)\, F(y^2_{n_m}, s)\, ds\Big]. \qquad (4.26)$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ и учитывая (4.I) из (2.26), имеем

$$\lim_{m\to\infty} \dot{U}_{n_m}(t) = \frac{\alpha}{N}\Big[\dot{\phi}_2(t)\int_0^t \phi_1(s)\, U(s)\, F(U^2, s)\, ds + \dot{\phi}_1(t)\int_t^\infty \phi_2(s)\, U(s) F(U^2, s)\, ds\Big]. \qquad (4.27)$$

Сравнивая (4.25) и (4.27), получим

$$\lim_{m\to\infty} \dot{U}_{n_m}(t) = \dot{u}(t),$$

что и доказывает (4.2).

Лемма 3 доказана полностью.

Следствие. Из (4.I) и (4.2) получаем

$$\mathcal{J}(U) = \lim_{m\to\infty} \mathcal{J}(U_{n_m}). \qquad (4.28)$$

Таким образом, если функция $F(z,t)$ удовлетворяет условиям $(I_a)-(I_g)$, то из лемм I,2,3 следует, что предельная функция $y(t)$ и будет решением рассматриваемой вариационной задачи (I.I)-(I.2). Теорема 2 доказана полностью.

§ 5. Покажем, наконец, что из существования решения вариационной задачи (I.I)-(I.2) следует существование решения краевой задачи (I)-(2).

Дифференцируя (4.24) дважды по t, получим

$$y(t) - Q_\ell(t)\, y(t) = -\alpha\, y(t) F(y^2(t), t), \qquad (5.I)$$

причем $y(t)$ удовлетворяет граничным условиям

$$y(0) = y(\infty) = 0. \qquad (5.2)$$

Уравнение (5.I) отличается от уравнения (I) наличием множителя α.

Так как значение α зависит от величины нормировочной постоянной B (см. (I.2)), то, меняя B, можно добиться того, чтобы $\alpha = 1$ и тем самым уравнения (I) и (5.I) совпали. Для этого B надо выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$\mathcal{J}(y) = \int y^2(s)\, F(y^2(s), s)\, ds. \qquad (5.3)$$

В самом деле, подставляя в (5.3) новую функцию:

$$y(s) = \gamma \cdot \varphi(s), \quad \gamma > 0,$$

имеем

$$\mathcal{J}(\varphi) = \int \varphi(s)\, F(\gamma^2 \varphi^2, s)\, ds. \qquad (5.4)$$

Так как $F(z,t)$ удовлетворяет условию (I_b), то всегда можно подобрать γ так, чтобы выполнялось равенство (5.4).

Таким образом, из существования решения вариационной задачи (I.I)-(I.2) следует существование решения краевой задачи (I)-(2), и тем самым завершается доказательство теоремы I.

В заключение этого раздела отметим, что теорема I позволяет, в частности, установить существование положительного частицеподобного решения задачи (I)-(2) в случае $F(\Psi^2, x) = \left(\frac{\Psi}{x}\right)^{k-1}$. Этот результат был получен ранее несколькими авторами /4-8/.

Литература

I. Makhankov V.G. Phys. Reports., 1978, 35, p.1;
Faddeev L.D., Korepin V.E. Phys. Reports., 1978, 42, p.1.

2. Гласко В.Б. и др. ЖЭТФ, I958, 35, с.452.

3. Friedberg R. et al. Nucl. Phys., 1976, B115, p.1.

4. Амирханов И.В., Жидков Е.П. Совместный научный сборник ОИЯИ (Дубна) и ЦИФИ (Будапешт, Венгрия), выпуск третий. KFKI -I979-82, с.I65.

5. Nehari Z. Proc. Royal Irish Acad., 1963, A62, p.117.

6. Жидков Е.П., Шириков В.П. ОИЯИ,Р-1319, Дубна, 1963; ЖВМ и МФ, 1964, № 4, с.804.

7. Амирханов И.В., Жидков Е.П., Макаренко Г.И. ОИЯИ, Р5-11705, Р5-11866, Дубна, 1978.

8. Амирханов И.В., Макаренко Г.И. ОИЯИ, Р5-11865, Дубна, 1978.

9. Амирханов И.В., Жидков Е.П. ОИЯИ, Р5-12925, Дубна, 1979.

10. Жидков Е.П., Жидков П.П. ОИЯИ, Р5-11599, Р5-11600, Дубна,1978; Strauss W.A. Commun. Math. Phys.,1977, 55, p.149.

11. Ryder G.H. Pacific Journal of Mathematics, 1967, Vol. 22, p.477; Nehari Z. Trans. Amer. Math. Soc.,1960, 95, p.101; Acta Math.,1961, 105, p. 141.

12. Функциональный анализ (под ред.С.Г.Крейна). "Наука", М.,1972.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 июля 1980 года.