объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-80-474

С.И.Сердюкова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РАЗНОСТНЫХ СХЕМ МАКСИМАЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Направлено в журнал "Математические заметки".

1980

Сердюкова С.И. Р5-80-474

Асимптотические свойства разностных схем максимального нечетного порядка точности

Для разностных схем максимального нечетного порядка точности $(2k-1)$ получены асимптотические оценки разностной функции Грина и "разностной ступеньки", $k = O(\ln h^{-1})$, h -шаг сетки. Задача сводится к построению асимптотик интегралов. Основные оценки получены с помощью метода перевала. Точки перевала, определяющие асимптотику, находятся вблизи окружности конечного радиуса и сближаются при $h \to 0$. Из полученных асимптотических оценок следует, что при начальных данных из $C_{\alpha}^{N}(\hat{C})$ численное решение сводится к решению непрерывной задачи со скоростью $O(h^{N+\alpha} \ln \ln h^{-1})$. Ширина зоны "размывания" изолированного разрыва пропорциональна $\ln h^{-1}$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1980

Serdyukova S.I. P5-80-474

Asymptotic Properties of Difference Schemes of Maximum Odd Accuracy

В работе[1] изучаются конечно-разностные методы решения задачи Коши для уравнения $u_t + u_x = 0$ при начальных условиях $u_0(x)$ из $\mathcal{P}_p(\hat{C})$. $\mathcal{P}_p(\hat{C})$ - класс периодических с периодом 2π функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{2\pi} |u_0^{(p)}(x)|^2 dx \le \hat{C}^2 .$$

Уравнение интегрируется методом конечных разностей по сетке с шагами τ, h. Если известны значения решения при $t = n \cdot \tau$ $x = \nu \cdot h$, то можно определить решение с точностью до величины порядка $O(h^p)$. Поэтому имеется принципиальная возможность, интегрируя по такой сетке, получить решение с точностью до $O(h^p)$. Показано, что в L_2 такая возможность реализуется, если используются разностные аппроксимации порядка точности $\ln h^{-1}$. Рассматриваются явные разностные схемы максимального при заданном наборе точек порядка точности. Накладывается естественное ограничение на отношение шагов сетки $(\tau/h) \le 1$.

В предлагаемой работе исследуется сходимость в равномерной метрике, в C. Рассматривается подкласс схем нечетного порядка точности $(2k-1)$. В случае конечного k эти схемы устойчивы в C[2,3]. При начальных данных из $C_{\alpha}^{N}(\hat{C})$ для схем порядка точности $\ln h^{-1}$ установлена оценка погрешности решения в C порядка точности $O(h^{N+\alpha} \ln \ln h^{-1})$. Получены асимптотические оценки разностной функции Грина.

Кроме того, получены асимптотические оценки решения разностной задачи в окрестности изолированного разрыва. При счете разрывных решений важно, чтобы зона "размывания" разрыва была как можно уже́. Показано, что число точек, на которые "размывается" разрыв, пропорционально порядку схемы. Зона "размывания" разрыва имеет ширину порядка $\ln h^{-1}$. Для схем конечного порядка точности q ширина зоны "размывания" разрыва имеет порядок $h^{-1/(q+1)}$[4-6]. При доказательстве основных оценок используется метод перевала. Точки перевала, определяющие асимптотику, лежат вблизи окружности конечного радиуса. Число этих точек пропорционально порядку схемы, и они сближаются при $h \to 0$. Основные оценки получаются суммированием асимптотических вычетов по множеству определяющих точек перевала.

Итак, обсуждается численное решение задачи Коши для уравнения $u_t + u_x = 0$ с начальными данными $u_0(x)$ из $C_{\alpha}^{N}(\hat{C})$. Рассматриваются разностные аппроксимации порядка $(2k-1)$ по минимальному набору точек

$$u_\nu^{n+1} = \sum_{\ell=-k}^{k-1} a_\ell u_{\nu+\ell}^n, \qquad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad /1/$$

$$a_\ell = a_{-k+r} = (-1)^{k+r} \frac{(k-\gamma)\ldots(1-\gamma)\,\gamma(1+\gamma)\ldots(k-1+\gamma)}{(2k-1)!} \cdot \frac{C^r_{2k-1}}{(-k+r+\gamma)}.$$

Через γ обозначено отношение шагов сетки (τ/h). Через $f(\phi)$ обозначим характеристическую функцию

$$f(\phi) = \sum_{\ell=-k}^{k-1} a_\ell e^{i\ell\phi}.$$

При $\gamma \le 1$ задача Коши устойчива /1,7/ в L_2 : $|f(\phi)| \le 1,\ 0 \le \phi \le 2\pi$. В окрестности $\phi = 0$ справедливо разложение /8/ :

$$e^{i\gamma\phi} f(\phi) = 1 - \frac{\sin\gamma\pi}{\pi} \frac{\Gamma(k+1-\gamma)\,\Gamma(k+\gamma)}{\Gamma(2k+1)} \phi^{2k} + O(\phi^{2k+1}) =$$

$$= 1 - \frac{\sin\gamma\pi}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{k}} (1 + O(k^{-1}))\left(\frac{\phi}{2}\right)^{2k} + O(\phi^{2k+1}).$$

Учитывая результаты работы /1/, получаем, что

$$|f(\phi)| \le \exp\left\{-\frac{\sin\gamma\pi}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\sin^{2k}\frac{\phi}{2}(1 + O(k^{-1}))\right\}. \qquad /2/$$

Характеристическая функция допускает представление

$$f(\phi) = e^{-i\gamma\phi}(-1)^k A\, 2^{-(2k-1)} \sum_{r=0}^{2k-1} C^r_{2k-1}(-1)^r\, i(e^{2\pi i\gamma}-1)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{i(-k+r+\gamma)(\phi+t)} dt =$$

$$= e^{-i\gamma\phi}\mathcal{F}(\phi) = e^{-i\gamma\phi}\left(1 - A\int_0^{\phi} (\sin^{2k-1}\frac{u}{2}) \exp i\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) u\, du\right), \qquad /3/$$

$$A = \frac{(k-\gamma)\ldots(1-\gamma)\,\gamma(1+\gamma)\ldots(k-1+\gamma)}{(2k-1)!}\, 2^{2k-1} = \frac{\sin\gamma\pi}{\pi}\sqrt{k\pi}\,(1 + O(k^{-1})).$$

Переходим непосредственно к оценке разностной функции Грина Γ_ν^n и "разностной ступеньки" G_ν^n :

$$\Gamma_\nu^0 = \begin{cases} 1, & \nu = 0, \\ 0, & \nu \ne 0, \end{cases} \qquad G_\nu^0 = \begin{cases} 0, & \nu < 0, \\ 1, & \nu \ge 0. \end{cases}$$

Положим $k = [\ln\tau/(4\sin\frac{3}{4})]$, $J_0 = \max(1, nAk\tau^{1/2})$, $j = \nu - \gamma n$,

$\Phi_j^n = G_j^n - (1 + \operatorname{sgn} j)/2$. Постоянные B , c , которые встречаются ниже , не зависят ни от k , ни от γ , ни от n .

Лемма локализации . Найдется постоянная B такая, что при всех

$$n \ge 1 \quad \sum_{|j| > J_0} |\Gamma_j^n| < B\{\exp -\left(\frac{n\sqrt{\tau}\sin\gamma\pi}{4\sqrt{k\pi}}\right) + J_0^{-1}\}.$$

Аналогичная оценка верна для Φ_j^n.

Заметим, что при $n \gg \tau^{-1/2}\sqrt{k}$ J_0 ограничивает зону, в которой "разностная ступенька" отличается от ступеньки на величину порядка единицы. В таком смысле употребляется термин "локализация". Для остальных n эта оценка является основной.

Доказательство. Известно, что разностная функция Грина и "разностная ступенька" допускают представление:

$$\Gamma_\nu^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^n(\phi)\, e^{i\nu\phi}\, d\phi, \qquad G_\nu^n = \frac{1}{2\pi}\int_L f^n(\phi)\frac{e^{i\nu\phi}\, d\phi}{(1 - e^{-i\phi})}.$$

Полюс обходится по произвольному пути в нижней полуплоскости. Контур L представлен на рис.1.

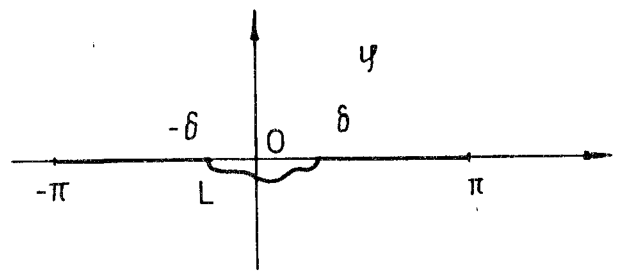

Рис.1.

Интегрированием по частям оцениваем

$$\hat{\Gamma}_\nu^n = \frac{1}{2\pi}\int_{|\phi| \le 3/2} f^n(\phi)\, e^{i\nu\phi}\, d\phi.$$

Используется интегральное представление /3/. Положим

$$\xi = ij - nA\,\frac{(\sin^{2k-1}\frac{\phi}{2})\,\exp i(\gamma-\frac{1}{2})\,\phi}{1-A\int\limits_0^{\phi}(\sin^{2k-1}\frac{u}{2})\,\exp i(\gamma-\frac{1}{2})\,u\,du}.$$

Заметим, что $\sin^{2k}\frac{3}{4}=\sqrt{r}$. При $|\phi|<\frac{3}{2}$, $|j|>J_0$

$$|1-A\int\limits_0^{\phi}(\sin^{2k-1}\frac{u}{2})\exp i(\gamma-\frac{1}{2})\,u\,du\,|>1-\frac{2A\sqrt{r}}{k\cos(3/4)}.$$

Отсюда следует, что $|\xi|>|j|/2$. Интегрируем по частям:

$$\int\limits_{|\phi|\le\frac{3}{2}} f^n(\phi)\,e^{i\nu\phi}\,d\phi=\frac{\mathcal{F}^n(\phi)\,e^{ij\phi}}{\xi}\Big|_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}+\int\limits_{|\phi|\le\frac{3}{2}}\frac{\xi'}{\xi^2}\,\mathcal{F}^n(\phi)\,e^{ij\phi}\,d\phi= \qquad /4/$$

$$=\mathcal{F}^n(\phi)\,e^{ij\phi}\,(\frac{1}{\xi}+\frac{\xi'}{\xi^3})\Big|_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}-\int\limits_{|\phi|\le\frac{3}{2}}(\frac{\xi''}{\xi^3}-\frac{3(\xi')^2}{\xi^4})\,\mathcal{F}^n(\phi)\,e^{ij\phi}\,d\phi.$$

Справедливы оценки: $|\xi'|\le 2Ank\sin^{2k-2}\frac{\phi}{2}$, $|\xi''|\le 2Ank^2\sin^{2k-3}\frac{\phi}{2}$.
Отсюда и из оценки /2/ следует

$$\int\limits_{|\phi|\le\frac{3}{2}} f^n(\phi)\,e^{i\nu\phi}\,d\phi=\mathcal{F}^n(\phi)\,e^{ij\phi}\,\xi^{-1}\Big|_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}+R_j^n,$$

где

$$|R_j^n|\le\frac{4Ank\sqrt{r}}{(|j|/2)^3\sin^2(3/4)}\exp-(\frac{An\sqrt{r}}{2k})+\frac{4Ank^2}{(|j|/2)^3}\int\limits_0^{\frac{3}{2}}\sin^{2k-3}\frac{\phi}{2}\,d\phi+$$

$$+6\,\frac{(2Ank)^2}{(|j|/2)^4}\int\limits_0^{\frac{3}{2}}\sin^{4k-4}\frac{\phi}{2}\,d\phi,\qquad\int\limits_0^{\frac{3}{2}}\sin^{2k-3}\frac{\phi}{2}\,d\phi\le\frac{\sqrt{r}}{(k-1)\sin^2\frac{3}{4}\cos\frac{3}{4}}.$$

Аналогично оценивается второй интеграл. В результате получаем
$|R_j^n|\le B|j|^{-2}(1+4\exp-\frac{An\sqrt{r}}{2k})$, соответственно

$$\sum_{|j|>J_0}|\hat{\Gamma}_j^n|\le B\{(\ln nk)\exp-(\frac{An\sqrt{r}}{2k})+J_0^{-1}\}.$$

Чтобы получить аналогичную оценку для "разностной ступеньки" G_J^n, в /4/ суммируем по j от $-\infty$ до J при $J<0$ и от $(J+1)$ до $+\infty$ при $J>0$. Заметим, что $\mathcal{F}^n(\phi),\xi',\xi''$ не зависят от j. Справедливо соотношение

$$\sum_{j=J+1}^{\infty}e^{ij\phi}\cdot\xi^{-1}(j)=\sum_{j=J+1}^{\infty}\frac{e^{ij\phi}-e^{i(j+1)\phi}}{(1-e^{i\phi})\cdot\xi(j)}=(1-e^{i\phi})^{-1}\{\frac{e^{i(J+1)\phi}}{\xi(J+1)}+$$

$$+\sum_{j=J+2}^{\infty}e^{ij\phi}\,\xi^{-1}(j)\,\xi^{-1}(j-1)\},\qquad|1-e^{i(3/4)}|>\sin\frac{3}{4},$$

так что главный член асимптотики не меняется. Что касается суммирования под знаком интеграла, то особенность в нуле нейтрализуется степенью синуса в ξ', ξ'':

$$|\xi'\cdot(1-e^{i\phi})^{-1}|\le 2Ank\sin^{2k-3}\frac{\phi}{2},\quad|\xi''\cdot(1-e^{i\phi})^{-1}|\le 2Ank^2\sin^{2k-4}\frac{\phi}{2}.$$

В остальном все остается по-старому.

Интегралы по отрезкам $\frac{3}{2}\le|\phi|\le\pi$ оцениваются одинаково для функции Грина и "разностной ступеньки", сразу для всех j. Естественно ограничиться $|\phi|<\phi^*$: $|f(\phi^*)|=e^{-1}$. При $|\phi|<\phi^*$, $|j|>8An$ $|\xi|>|j|/2$. Пусть $|j|\le 8An$, $\psi(\gamma,\phi)$ определяется соотношением

$$e^{i\gamma\phi}\cdot f(\phi)=1-A(\gamma)\int\limits_0^{\phi}(\sin^{2k-1}\frac{u}{2})\exp i(\gamma-\frac{1}{2})\,u\,du=1-\psi(\gamma,\phi),$$

$$A(\gamma)=2^{2k-1}\,\frac{(k-\gamma)\dots(1-\gamma)\,\gamma(1+\gamma)\dots(k-1+\gamma)}{(2k-1)!}\le A(\frac{1}{2}),\qquad 1-A(\frac{1}{2})\int\limits_0^{\pi}\sin^{2k-1}\frac{u}{2}\,du=0.$$

Так как, по предположению, $0<\gamma<1$, то $\mathrm{Re}\,\psi(\gamma,\phi)$ и $|\mathrm{Im}\,\psi(\gamma,\phi)|$ монотонно возрастают на $[0,\pi]$. При некотором $\phi_0=\phi_0(\gamma)$

$$\mathrm{Re}\,\psi(\gamma,\phi_0)=A(\gamma)\int\limits_0^{\phi_0}\sin^{2k-1}\frac{u}{2}\cdot\cos(\gamma-\frac{1}{2})\,u\,du=\frac{\sin\gamma\pi}{\sqrt{k}}.$$

Справедливы оценки

$$|\operatorname{Im}\psi(\gamma,\phi_0)| = A(\gamma)\int_0^{\phi_0} \sin^{2k-1}\frac{u}{2}\cdot\sin\left|\gamma-\frac{1}{2}\right|u\,du < \frac{\cos\gamma\pi}{\sqrt{k}},$$

$$|\psi(\gamma,\phi_0)| < \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Заметим, что при $\gamma<\frac{1}{\sqrt{k}}$, $\psi(\gamma,\pi) = -i\sin\gamma\pi + O(k^{-1})$, т.е. при $\gamma<\frac{1}{\sqrt{k}}$ $|\psi(\gamma,\phi)|<2\pi/\sqrt{k}$ для всех ϕ. При $\gamma\ge\frac{1}{\sqrt{k}}$ справедлива оценка $1-\frac{\sin\gamma\pi}{\sqrt{k}}<|f(\phi_0)|<1-\frac{\sin\gamma\pi}{2\sqrt{k}}$. Соответственно для интегралов по отрезку $\phi_0\le\phi\le\phi^*$ справедлива оценка

$$\sum_{|j|\le 8An}|I_j^n|<17An\exp-\frac{n\sin\gamma\pi}{2\sqrt{k}}<Bk\exp-\frac{n\sin\gamma\pi}{4\sqrt{k}}.$$

На отрезке $[\frac{3}{2},\phi_0]$

$$\xi = ij - nA\left(\sin^{2k-1}\frac{\phi}{2}\right)\left(\exp i\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\phi\right)\left(1+\frac{R(\gamma,\phi)}{\sqrt{k}}\right),\quad |R(\gamma,\phi)|<2.$$

Пусть $j=nA\sin^{2k-1}\frac{\theta}{2}\sin(\gamma-\frac{1}{2})\theta$, $\sin^{2k-1}\frac{\phi'}{2}=\frac{1}{2}\sin^{2k-1}\frac{\theta}{2}$, $\sin^{2k-1}\frac{\phi''}{2}=2\sin^{2k-1}\frac{\theta}{2}$. Элементарная выкладка, использующая разложение в ряд Тейлора, показывает, что длина отрезка $[\phi',\phi'']$ не превосходит $\sqrt{(2k-1)^{-1}\ln 2}$. Соответственно интегралы по выделенным отрезкам допускают оценку

$$\sum_{|j|<8An}|I_j^n|<\left(9An\sqrt{r}\,e^{-\frac{nA\sqrt{r}}{4k}}+\sum_{|j|>4An\sqrt{r}}\exp-\frac{|j|}{6k}\right)\sqrt{(2k-1)^{-1}\ln 2}\le B\sqrt{k}\,e^{-\frac{nA\sqrt{r}}{4k}}.$$

На оставшихся отрезках $|\xi|>|j|/2$. Интегралы по этим отрезкам оцениваются интегрированием по частям

$$\int_a^b f^n(\phi)e^{i\nu\phi}\,d\phi = \frac{\mathcal{F}^n(\phi)e^{ij\phi}}{\xi}\Big|_a^b+\int_a^b\frac{\xi'}{\xi^2}\mathcal{F}^n(\phi)e^{ij\phi}\,d\phi.$$

На рассматриваемых отрезках

$$|f^n(\phi)|<\exp\left(-\frac{nA\sqrt{r}}{4k}\right),\quad |\phi|>\frac{3}{2}.$$

Остается оценить

$$\int_a^b|\xi'(\phi)|\exp-\left(\frac{nA}{k}\sin^{2k}\frac{\phi}{2}\right)d\phi.$$

Справедливы соотношения [8]:

$$|\xi'(\phi)|<2An\left\{\frac{(2k-1)\sin^{2k-1}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}}{\sin\frac{3}{4}}+\frac{\sin^{2k}\frac{\phi}{2}}{\sin\frac{3}{4}}+4A\sin^{4k-2}\frac{\phi}{2}\right\},$$

$$\int_a^b kAn\sin^{2k-1}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}\exp-\left(\frac{nA}{3k}\sin^{2k}\frac{\phi}{2}\right)d\phi=3k\exp-\left(\frac{nA}{3k}\sin^{2k}\frac{\phi}{2}\right)\Big|_a^b,$$

$$\int_a^b nA\sin^{2k}\frac{\phi}{2}\exp-\left(\frac{nA}{3k}\sin^{2k}\frac{\phi}{2}\right)d\phi\le 4k(b-a)\exp-\left(\frac{nA\sqrt{r}}{4k}\right),$$

$$\int_a^b nA^2\sin^{4k-2}\frac{\phi}{2}\exp-\frac{nA}{3k}\sin^{2k}\frac{\phi}{2}\,d\phi<3kA\left(\exp-\frac{nA\sqrt{r}}{4k}\right)\times$$

$$\times\int_a^b\sin^{2k-2}\frac{\phi}{2}\,d\phi\le\frac{3kA}{\sin^2\frac{3}{4}}\,\frac{\pi}{2^{2k}}\,\frac{\Gamma(2k+1)}{(\Gamma(k+1))^2}\exp-\frac{nA\sqrt{r}}{4k}\le c.$$

Лемма локализации доказана.

Для $3k<j\le J_0$ оценки Γ_j^n, G_j^n получаются с помощью метода перевала. Нижеследующие теорема и лемма дают точную по порядку оценку зоны "размывания" изолированного разрыва при $n>>r^{-1/2}\sqrt{k}$.

Теорема. При $3k<j\le J_0$, $0<\gamma<1$, $n\le r^{-1}$ асимптотика Γ_j^n, G_j^n-1 определяется суммой асимптотических вычетов относительно точек перевала t_ℓ^* функции

$$f^n(2\arcsin t)\cdot\exp(2\nu i\arcsin t),$$

расположенных в верхней полуплоскости. Справедливо соотношение

$$\Gamma_j^n=\sum_{\ell=0}^{k-1}(-1)^\ell\sqrt{\frac{2t_\ell(1-t_\ell^2)^{-1}}{\pi ij(2k-1)}}\left(1+\rho_\ell\left(\sqrt{\frac{k}{j}}\right)\right)\exp 2ij\left\{\arcsin t_\ell-\frac{t_\ell}{2k}(1+O(k^{-1}))\right\}+$$

$$+R_j^n,\quad |R_j^n|<\frac{c}{j}\exp-\left(\frac{nA\sqrt[4]{r}}{4k}\right),\quad t_\ell=\left(\frac{j}{nA}\right)^{\frac{1}{2k-1}}\exp i\,\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi\ell}{(2k-1)},$$

$$t_\ell^*=t_\ell(1+O(k^{-2})),\quad \sin^2\frac{3}{4}(1+O(k^{-1}))<|t_\ell^*|<\sin\frac{3}{4}(1+O(k^{-1})). \qquad /5/$$

Асимптотика (G_j^n-1) отличается от асимптотики Γ_j^n множителем $(2it_\ell)^{-t}$ под знаком суммы. При $-J_0\le\gamma<-3k$ асимптотика определяется точками перевала, расположенными в нижней полуплоскости.

Доказательство. Интегралы по отрезкам $\phi_0\le|\phi|\le\pi$, $\sin\frac{\phi_0}{2}=\sqrt{\sin\frac{3}{4}}=t_0$ допускают оценку

$$|I_j^n|<c\exp-\left(\frac{nAr^{1/4}}{3k}\right)<\frac{cJ_0}{j}\exp-\left(\frac{nAr^{1/4}}{3k}\right).$$

Далее речь пойдет об интегралах по отрезку $|\phi|\le\phi_0$. В процессе доказательства отрезок интегрирования деформируется, и нам потребуется специальное представление $\mathcal{F}^n(\phi(t))$ в круге $|t|\le t_0$, $t=\sin\frac{\phi}{2}$:

$$\left(1-A\int_0^\phi \sin^{2k-1}\frac{u}{2}\cdot\exp i\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)u\,du\right)^n=\Bigg(1-\frac{A}{k}\,\frac{\sin^{2k}\frac{\phi}{2}}{\cos\frac{\phi}{2}}\exp i\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\phi-$$

$$-\frac{A}{k}\,\frac{\sin^{2k+1}\frac{\phi}{2}}{(2k+1)}\left(\exp i\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\phi\right)\left(\frac{i(2\gamma-1)}{\cos^2\frac{\phi}{2}}+\frac{\sin\frac{\phi}{2}}{\cos^3\frac{\phi}{2}}\right)-$$

$$-\frac{A}{k(2k+1)}\int_0^{\sin\frac{\phi}{2}} t^{2k+1}\left(\exp i(2\gamma-1)\arcsin t\right)\left(\frac{i(2\gamma-1)t}{(1-t^2)^2}-\frac{(2\gamma-1)^2}{(1-t^2)^{3/2}}\right)dt\Bigg)^n=$$

$$=\exp n\left(-\frac{A}{k}\,\frac{\sin^{2k}\frac{\phi}{2}}{\cos\frac{\phi}{2}}\left(1+O\left(\frac{\sin\frac{\phi}{2}}{k}\right)\right)\exp i\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\phi\right).$$

После замены переменных получаем

$$\hat{\Gamma}_j^n=\frac{1}{\pi}\int_{|t|\le t_0}\exp\left(-\frac{nA}{k}\,\frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}}\left(1+O\left(\frac{t}{k}\right)\right)\exp i(2\gamma-1)\arcsin t+\right.$$

$$\left.+2ij\arcsin t\right)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\pi}\int_{|t|\le t_0}\exp n\chi(t,j)\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Разберемся в структуре линий уровня функции $\chi(t,j)$ в круге $|t|\le t_0$, $t=\rho\cdot\exp i\omega$. Область

$$\operatorname{Re} n\tilde{\chi}(t,j)=-\frac{nA}{k}\rho^{2k}\cos 2k\omega-j\rho\sin\omega\le 0$$

на рис.2 заштрихована.

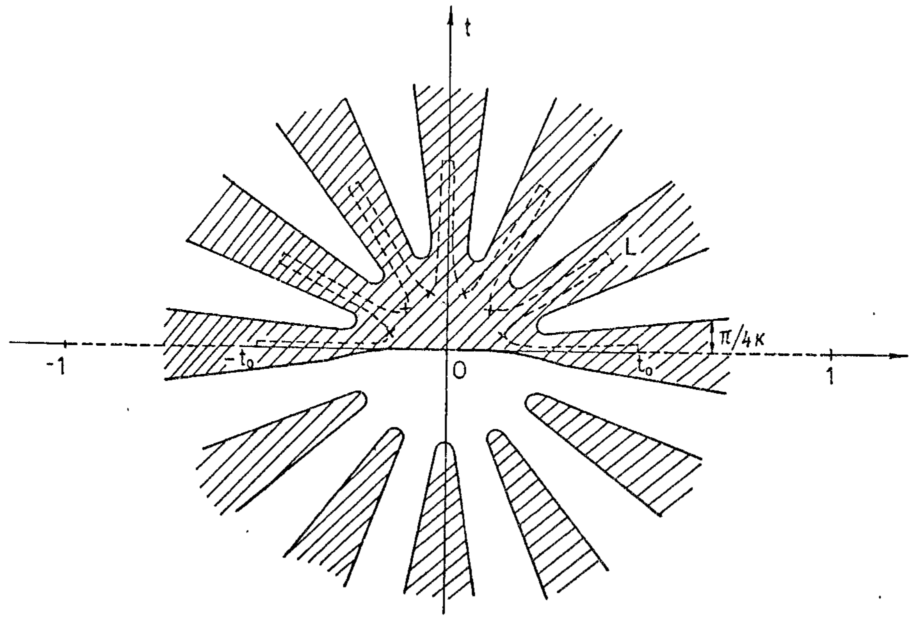

Рис.2.

В круге $|t|\le t_0$ ветви $\operatorname{Re} n\chi(t,j)=0$ смещаются относительно ветвей $\operatorname{Re} n\tilde{\chi}(t,j)=0$ на угол, не превосходящий $\pi/6k$. Асимптоты ветвей $\operatorname{Re} n\tilde{\chi}(t,j)=0$ разделены углами $\pi/2k$, так что компоненты областей $\operatorname{Re} n\chi(t,j)\le 0$ и $\operatorname{Re} n\tilde{\chi}(t,j)\le 0$ устроены одинаково. Одинаково ведут себя и линии наискорейшего спуска, проходящие через точки перевала, расположенные в верхней полуплоскости. Исходный отрезок интегрирования деформируется в контур L. В круге $|t|\le t_0$ контур L идет по дугам линий наискорейшего спуска, проходящих через определяющие точки перевала. Эти дуги соединяются между собой и с вещественной осью дугами окружности $|t|=t_0$, погруженными в область $\mathrm{Re}\, n\chi(t,j)<0$, как показано на рис.2. Так как определяющие точки перевала находятся на конечном расстоянии от окружности $|t|=t_0=\sqrt{\sin\frac{3}{4}}$, то асимптотически интегралы по дугам линий наискорейшего спуска равны асимптотическим вычетам относительно определяющих точек перевала. Интегралы по дугам окружности $|t|=t_0$ оцениваются сверху величиной

$$R_j^n=\sum_{\ell=0}^{k-1}\frac{B}{k}\exp\left(-jt_0\sin\frac{\pi\ell}{k}-\frac{nA}{2k}r^{1/4}\right)\le\frac{c}{j}\exp-\frac{nA}{4k}r^{1/4}.$$

Суммируем эти оценки по j:

$$\sum_{j=3k}^{J_0}R_j^n<c(\ln J_0)\exp-\frac{nA}{4k}r^{1/4}<B\exp-\frac{nA}{8k}r^{1/4}.$$

Остается использовать стандартные формулы /9/ для асимптотического вычета. Определяющие точки перевала находятся на расстоянии $O(k^{-1})$ друг от друга. Поэтому асимптотика определяется не двумя, а k точками перевала. Теорема доказана.

Следствие. Существует постоянная B такая, что

$$\sum_{3k<|j|\le J_0}|\Gamma_j^n|<B,\qquad\sum_{3k<|j|\le J_0}|\Phi_j^n|<B.$$

Чтобы получить оценки $|\Gamma_j^n|,|\Phi_j^n|$, суммируем в /5/ по ℓ. Заметим, что точки перевала расположены симметрично относительно мнимой оси

$$t_{k-1-\ell}=-\bar t_\ell,\qquad\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi(k-\ell)}{2k-1}=\pi-\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi\ell}{2k-1}.$$

Суммируем слагаемые, отвечающие точкам перевала, расположенным в первом квадранте. Положим $\ell_0=[k/2]-1$. Суммируем по методу Абеля:

$$\mathrm{Res}_j=\sum_{\ell=0}^{\ell_0}(-1)^\ell\sqrt{\frac{2t_\ell(1-t_\ell^2)^{1/2}}{\pi(2k-1)ij}}\left(1+\rho_\ell\left(\sqrt{\frac{k}{j}}\right)\right)\exp 2ij\left\{\arcsin t_\ell-\frac{t_\ell}{2k}(1+O(k^{-1}))\right\}=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{\ell_0}(\sigma_\ell-\sigma_{\ell+1})\xi_\ell,\quad\sigma_\ell=\sum_{n=\ell}^{\ell_0}(-1)^n\exp\left\{-2j\,\mathrm{Im}\arcsin t_\ell+\frac{j}{k}\mathrm{Im}\,t_\ell\right\},$$

$\sigma_{\ell_0+1}=0$. В круге $|t|\le t_0=\sqrt{\sin\frac{3}{4}}$ справедлива оценка

$$\mathrm{Im}\arcsin t=\rho\sin\omega(1+R),\quad|R|\le\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}-1\right)\le 0{,}78,\quad t=\rho\exp i\omega.$$

Отсюда следует, что $|\sigma_\ell|<2\exp\left(-\frac{j\rho}{5}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\ell\right)/(2k-1)\right)\right)$.

Справедливо соотношение

$$\mathrm{Res}_j=\sum_{\ell=1}^{\ell_0}\sigma_\ell(\xi_\ell-\xi_{\ell-1})+\sigma_0\xi_0,\quad|\xi_\ell|<\frac{B}{\sqrt{jk}}\exp\left(\frac{cj\rho}{k^2}\right).$$

В результате получаем

$$|\mathrm{Res}_j|<\frac{B}{\sqrt{jk}}\exp-\frac{j\rho}{5k},\qquad\rho>\frac{1}{2}\sin^2\frac{3}{4}.$$

Слагаемые в /5/, отвечающие точкам перевала, расположенным во втором квадранте, оцениваются аналогично. Такие же оценки верны для Φ_j^n. Остается просуммировать полученные оценки по j.

Лемма. При $0<\gamma<1$, $r^{-1/2}(Ak)^{-1}\le n\le r^{-1}$

$$\sum_{|j|\le 3k}|\Gamma_j^n|\asymp\ln k,\qquad\sum_{|j|\le 3k}|\Phi_j^n|\asymp\ln k.\qquad /6/$$

Доказательство. Положим $t=\sin\frac{\phi}{2}$. Интегралы по $|t|>t_0=\sqrt{\sin\frac{3}{4}}$ экспоненциально малы: $\frac{1}{2k}A\sin^{2k}\frac{\phi}{2}>r^{-1/4}\frac{1}{2k^2}$. При $|t|\le t_0$

$$f^n(\phi)e^{i\gamma h\phi}=\exp\left\{-\frac{nA}{k}\frac{\sin^{2k}\frac{\phi}{2}}{\cos\frac{\phi}{2}}\left(1+O\left(\frac{\sin\frac{\phi}{2}}{k}\right)\right)\exp i\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\phi\right\}=\exp n\theta(\gamma,t).$$

Пусть $t_2=t_1\left(1+\frac{b}{k}\right)$, $t_1=\sin\frac{\phi_1}{2}$, $\frac{nA}{k}\frac{t_1^{2k}}{\sqrt{1-t_1^2}}=\frac{1}{4}$. При $|t|<t_1$

$$|n\theta(\gamma,t)|<\frac{1}{2},\quad|1-\exp n\theta(\gamma,t)|<\frac{4}{3}|n\theta(\gamma,t)|<\frac{2An}{k}\frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}}.$$

При $|t| > t_2 \quad |f^n(\phi(t))| < \exp - \frac{(2b+1)}{8}$.

Интегрируя по частям, получаем

$$\Gamma_j^n = \frac{\sin j\phi_1}{j\cdot\pi} + R_j^n + O(k^{-1}), \quad |R_j^n| < \frac{3}{|j|} \exp - \frac{(2b+1)}{8}.$$

Φ_j^n имеет аналогичное представление. Отсюда следует /6/, если b достаточно большое.

Оценка погрешности решения /1/ при начальных данных $u_0(x)$ из $C_\alpha^N(\mathfrak{A})$ является простым следствием оценок Γ_j^n, G_j^n. В самом деле, справедлива цепочка равенств:

$$u(n\tau, \nu h) - u_\nu^n = u_0((\nu-\gamma n)h) - \sum_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{\nu-\ell}^n u_0(\ell h) = u_0((\nu-\gamma n)h) -$$

$$- u_0((\nu-\ell_0)h) - \sum_{\ell<\gamma n} G_\ell^n(u_0((\nu-\ell)h) - u_0((\nu-\ell-1)h)) - \sum_{\ell\geq\gamma n} (G_\ell^n - 1)(u_0((\nu-\ell)h) \cdot$$

$$- u_0((\nu-\ell-1)h)), \qquad \ell_0 = \min_{\ell\geq\gamma n} \ell .$$

Отсюда получаем, что

$$|u(n\tau, \nu h) - u_\nu^n| \leq \mathfrak{A}\, h^{N+\alpha}(1 + \sum_{\ell<\gamma n} |G_\ell^n| + \sum_{\ell\geq\gamma n} |G_\ell^n - 1|).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Цинь Мэн-чжао. О минимальном порядке погрешности интегрирования уравнения $u_t + u_x = 0$ методом конечных разностей. ЖВМ и МФ, 1961, т.1, №6, с.1117-1121.
2. Thomee V. J.Dif.Equations, 1965, I, pp.273-292.
3. Сердюкова С.И. ЖВМ и МФ, 1967, т.7, № 3, с.497-509.
4. Thomee V. J. Dif. Equations, New York, Ed. by J.H.Bramble, Academic Press, pp.125-151, 1966.
5. Hedstrom G.H. SIAM J.Numer.Anal.,1968, 5, pp.363-406.
6. Сердюкова С.И. ЖВМ и МФ, 1971, т.11, № 2, с.411-424.
7. Strang G. J.Math. and Phys., 1962, 41, pp.147-154.
8. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.1973, М., "Наука", т.1, с.17,26,62.
9. Федорюк М.В. Метод перевала. М., "Наука", 1977, с.164.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 июля 1980 года.