Объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

5807/2-80

8/12-80

P5-80-458

В.А.Загребнов

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ: РЕШЕНИЯ В КОНЕЧНОМ ОБЪЕМЕ ПРИ НЕПУСТЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Направлено в "Annales de l'Institut Henri Poincaré (Section A)"

1980

Загребнов В.А. Р5-80-458

Корреляционные уравнения для классических непрерывных систем: решения в конечном объеме при непустых граничных условиях

При использовании резольвент для операторов Кирквуда-Зальбурга, Кирквуда-Рюэля и Майера-Монтролла получены решения корреляционных уравнений в случае конечного объема с непустыми граничными условиями. Доказана теорема единственности. Обсуждается связь корреляционных уравнений с уравнениями Добрушина-Ланфорда-Рюэля для гиббсовской вероятностной меры.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1980

Zagrebnov V.A. P5-80-458

Correlation Equations for Classical Continuous Systems: Finite-Volume Solutions for Non-Empty Boundary Conditions

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Lambda \subset R^{\nu}$ - связное измеримое подмножество /сосуд/ ν - мерного пространства, имеющее конечную меру $\mathrm{mes}\,\Lambda = |\Lambda|$ и границу $\partial\Lambda$. Мы будем рассматривать систему одинаковых классических частиц, взаимодействующих посредством парного потенциала $\Phi: R^{\nu} \to R^{1} \cup \{+\infty\}$, который является измеримой функцией, удовлетворяющей условию $\Phi(x) = \Phi(-x)$. Тогда энергия взаимодействия n частиц, сосредоточенных в точках $(x_1, x_2, \dots, x_n) = X_n$, определяется, как

$$U(X_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} \Phi(x_i - x_j), \qquad /1.1/$$

и является инвариантной относительно трансляций и перестановок частиц. Мы полагаем по определению, что $U(X_n) = 0$ для $n = 0,1$. Для того,чтобы система проявляла термодинамическое поведение, на взаимодействие необходимо наложить некоторые дополнительные условия [1,2].

<u>Условия,накладываемые на взаимодействие</u>

/У/ Существует $B \ge 0$, такие, что

$$U(X_n) \ge -nB \qquad /1.2/$$

для $n \ge 0$ и $X_n \in R^{n\nu}$ /устойчивость/.

/СУ/ Если $\Lambda \subset R^{\nu}$ - некоторая фиксированная конечная область, то существуют $A > 0$ и $B \ge 0$, такие, что

$$U(X_n) \ge -n\left(B - n\frac{A}{|\Lambda|}\right) = -nB_n(\Lambda) \qquad /1.3/$$

для $n \ge 0$ и $X_n \in \Lambda^n$ /сверхустойчивость/.

/Р/ Потенциал Φ называется регулярным, если он ограничен снизу и удовлетворяет условию

$$C_{\Phi}(\beta) = \int_{R^{\nu}} dx\, |e^{-\beta\Phi(x)} - 1| < \infty \qquad /1.4/$$

для некоторого /а следовательно, и для всех/ $\beta > 0$.

Замечание 1.1. Сверхустойчивость, очевидно, более сильное свойство, чем устойчивость, и это будет важно для дальнейших рассуждений. Заметим также, что /P/ - условие очень близко к требованию быстрого убывания потенциалов взаимодействия, см.[1], и немного сильнее, чем требование регулярности снизу, которое введено в работах [12,13].

Условные корреляционные функции для гиббсовской меры в большом ансамбле

В этой работе X будет обозначать конфигурацию частиц в R^ν, а X_Λ и $X_{\bar\Lambda}$ - соответственно конфигурации частиц внутри и вне сосуда Λ, так что $X=X_\Lambda \cup X_{\bar\Lambda}$. Если число $N(X)=\mathrm{Card}\,X$ конечно: $N(X)=n$, тогда мы будем писать также $X=X_n$ и полагать $X_{n=0}=\emptyset$. Фазовым пространством Ω бесконечной системы мы будем считать совокупность множеств всех локально-конечных конфигураций, т.е. таких, что для каждой конфигурации $X\in\Omega$ имеем: $N(X_\Lambda)<\infty$ для любой ограниченной области $\Lambda\subset R^\nu$. Мы будем обозначать через Ω_Λ сужение Ω на сосуд Λ, т.е. $\Omega_\Lambda=\Omega\restriction\Lambda$, тогда: $\Omega_{\bar\Lambda}=\Omega\restriction(R^\nu\setminus\Lambda)$.

Определение 1.1. Конфигурация $\bar X_\Lambda \in \Omega_{\bar\Lambda}$ называется регулярной /по отношению к конфигурациям Ω_Λ/, если существует такая конечная величина $D(\bar X_\Lambda)\ge 0$, что энергия взаимодействия

$$W(X_n,\bar X_\Lambda)=\sum_{x\in X_n,\, y\in \bar X_\Lambda}\Phi(x-y)\ge -nD(\bar X_\Lambda) \qquad /1.5/$$

для $n\ge 0$ и каждой конфигурации $X_n\in\Omega_\Lambda$. По определению полагаем $W(X_n,\emptyset)=0$.

Замечание 1.2. Для частиц с твердыми сердцевинами все конфигурации $\{X\}$ являются локально-конечными. Если, кроме того, парный потенциал удовлетворяет /P/-условию, тогда все конфигурации $\{X_{\bar\Lambda}\}$ являются регулярными, мы будем обозначать их $\bar\Omega_\Lambda$. То же справедливо для частиц с неотрицательными парными потенциалами взаимодействия, несмотря на то, что $\{X\}\supset\Omega$. Пусть парный потенциал /без твердой сердцевины/ имеет конечный радиус взаимодействия, тогда $X\in\Omega$ и /P/-условие также приведет к тому, что $\Omega_{\bar\Lambda}=\bar\Omega_\Lambda$, причем оба условия здесь существенны.

Теперь определим конфигурационный большой канонический ансамбль для частиц, находящихся в сосуде $\Lambda\subset R^\nu$ /для обратной температуры $\beta>0$ и активности $z>0$ /, при наличии регулярной конфигурации частиц вне сосуда.

Определение 1.2. Для устойчивого взаимодействия условная вероятностная гиббсовская мера для большого канонического ансамбля в сосуде $\Lambda\subset R^\nu$ и конфигураций $\bar X_\Lambda\in\bar\Omega_\Lambda$ определяется на $\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda^n$ сужениями

$$d\mu_\Lambda(X_n|\bar X_\Lambda)=\chi_\Lambda(X_n)\frac{z^n dX_n}{n!}\,\frac{\exp\{-\beta(U(X_n)+W(X_n|\bar X_\Lambda))\}}{\Xi(\beta,z,\Lambda|\bar X_\Lambda)} \qquad /1.6/$$

на каждое Λ^n, где $\chi_\Lambda(X_n)$ - характеристическая функция области $\Lambda^n\subset R^{n\nu}$. Таким образом, $d\mu_\Lambda(X_n|\bar X_\Lambda)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $dX_n=dx_1\dots dx_n$, а ее полная масса равна большой статистической сумме /здесь $\int_{\Lambda^n} dX_n=1$, $n=0$ /

$$\Xi(\beta,z,\Lambda|\bar X_\Lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int_{\Lambda^n} dX_n\exp\{-\beta(U(X_n)+W(X_n|\bar X_\Lambda))\}. \qquad /1.7/$$

Сходимость суммы /1.7/ обеспечивается устойчивостью взаимодействия /1.2/ и регулярностью конфигурации $\bar X_\Lambda$ /1.5/.

Определение 1.3. Для меры /1.6/ n-точечная корреляционная функция определяется следующим стандартным образом:

$$\rho_\Lambda(z,X_n|\bar X_\Lambda)=(\Xi(\beta,z,\Lambda|\bar X_\Lambda))^{-1}r_\Lambda(z,X_n|\bar X_\Lambda),$$

$$r_\Lambda(z,X_n|\bar X_\Lambda)=\chi_\Lambda(X_n)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{n+m}}{m!}\int_{\Lambda^m} dY_m e^{-\beta U(X_n\cup Y_m|\bar X_\Lambda)}, \qquad /1.8/$$

где

$$U(X_n\cup Y_m|\bar X_\Lambda)=U(X_n\cup Y_m)+W(X_n\cup Y_m|\bar X_\Lambda),$$

$$X_n\cup Y_m=(x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_m),\quad \rho_\Lambda(z,\emptyset|\bar X_\Lambda)=1.$$

Заметим, что для малых непересекающихся областей $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ величина $\rho_\Lambda(z,X_n|\bar X_\Lambda)\prod_{i=1}^n|\Delta_i|$ совпадает /с точностью до $o(\sum_{i=1}^n|\Delta_i|^n)$/ с условной вероятностью найти n неразличимых частиц в области $\Delta_1\times\dots\times\Delta_n\subset\Lambda^n$. при условии, что вне сосуда фиксирована конфигурация $\bar X_\Lambda$ /граничные условия/.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ
Корреляционные тождества

С помощью небольшой модификации стандартных вычислений [1] можно установить для условных корреляционных функций /1.8/ несколько серий различных тождеств. Первая из них - это тождества Кирквуда-Зальцбурга /КЗ/:

$$\rho_\Lambda(z, X_n | \bar{X}_\Lambda) = z\chi_\Lambda(X_n) \exp\{-\beta(W(x_1, X'_{n-1}) + W(x_1, \bar{X}_\Lambda))\} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{\Lambda^m} dY_m K_\Phi(x_1, Y_m) \rho_\Lambda(z, X'_{n-1} \cup Y_m | X_\Lambda) . \qquad /2.1/$$

Здесь

$$X'_{n-1} = (x_2, x_3, \dots, x_n) ,$$

$$K_\Phi(x_1, Y_m) = \prod_{y \in Y_m} (e^{-\beta\Phi(x_1 - y)} - 1), \quad K_\Phi(x_1, \emptyset) = 1 . \qquad /2.2/$$

С помощью итерации /2.1/ /см., например,[7, 13] / нетрудно получить вторую серию тождеств, которая называется тождествами Майера:

$$\rho_\Lambda(z, X_n \cup V_\ell | \bar{X}_\Lambda) = \chi_\Lambda(X_n \cup V_\ell) z^n \exp\{-\beta(U(X_n) + W(X_n, V_\ell) + W(X_n, \bar{X}_\Lambda))\} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{\Lambda^m} dY_m M_\Phi(X_n, Y_m) \rho_\Lambda(z, V_\ell \cup Y_m | \bar{X}_\Lambda) . \qquad /2.3/$$

При $V_\ell = \emptyset$ они сводятся к хорошо известным тождествам Майера-Монтролла /ММ/:

$$\rho_\Lambda(z, X_n | \bar{X}_\Lambda) = \chi_\Lambda(X_n) z^n \exp\{-\beta(U(X_n) + W(X_n | \bar{X}_\Lambda))\} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{\Lambda^m} dY_m M_\Phi(X_n, Y_m) \rho_\Lambda(z, Y_m | \bar{X}_\Lambda) , \qquad /2.4/$$

$$M_\Phi(X_n, Y_m) = \prod_{y \in Y_m} (e^{-\beta W(X_n, y)} - 1), \quad M_\Phi(X_n, \emptyset) = 1. \qquad /2.5/$$

Основная идея, благодаря которой тождества /2.1/, /2.3/, /2.4/ превращаются в один из важнейших инструментов статистической механики, заключается в том, чтобы рассматривать их как уравнения для корреляционных функций $\{\rho_\Lambda(z, X_n | \bar{X}_\Lambda)\}_{n \geq 1}$. Хотя это обычно подразумевалось с момента написания такого рода соотношений, только после работ Боголюбова, Хацета [4] и Рюэля [5], в которых рассматривался предел бесконечного объема и описание соответствующего гиббсовского состояния, плодотворность такой точки зрения была продемонстрирована наиболее впечатляюще.

Условные корреляционные функции /1.8/ образуют бесконечную последовательность $\rho_\Lambda(z) = \{\rho_\Lambda(z, X_n | \bar{X}_\Lambda)\}_{n \geq 1}$ измеримых симметричных функций. Поэтому следует придать точный смысл корреляционным уравнениям в некотором пространстве последовательностей функций, причем достаточно большом, чтобы оно вмещало $\rho_\Lambda(z)$ и соответствующие пределы для широкой области значений параметров β, z. Первоначальный, и в настоящее время стандартный, подход к этой проблеме был предложен в работах [4-6] /см. также [1] /.

Корреляционные уравнения

В работе [4] Боголюбов и Хацет предложили рассматривать бесконечные последовательности корреляционных функций как элементы некоторого банахова пространства.

Определение 2.1. Пусть $\xi > 0$ и $\phi = \{\phi(X_n)\}_{n \geq 1}$ является последовательностью комплексных измеримых функций на $\sum_{n \geq 1} R^{n\nu}$. Векторное пространство

$$E_\xi = \{\phi : \sup_{n \geq 1} \xi^{-n} \| \phi(X_n) \|_{L^\infty(R^{n\nu})} = \|\phi\|_\xi < \infty\} \qquad /2.6/$$

является банаховым по отношению к норме $\|\cdot\|_\xi$. Подпространство E^s_ξ, состоящее из последовательностей симметричных функций, будем называть пространством Боголюбова-Хацета /БХ/.

Для $z \geq 0$ /физическая область значений активности/ устойчивого потенциала /1.2/ и регулярной конфигурации $\bar{X}_\Lambda$ /1.5/ имеем:

$$0 \leq \rho_\Lambda(z, X_n | \bar{X}_\Lambda) \leq (\Xi(\beta, z, \Lambda | \bar{X}_\Lambda))^{-1} (z e^{\beta(B + D(\bar{X}_\Lambda))})^n \times$$

$$\times \exp(z |\Lambda| e^{\beta(B + D(\bar{X}_\Lambda))}) .$$

Таким образом, векторнозначная функция $\rho_\Lambda(z) \in E_\xi$, $\xi > z e^{\beta(B + D(\bar{X}_\Lambda))}$.

В пространстве E_ξ определим, как это делается обычно /см. [1] /, оператор КЗ:

$$(K\phi)(x_1) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{R^{m\nu}} dY_m K_\Phi(x_1, Y_m) \phi(Y_m) ,$$

$$(K\phi)(X_n) = e^{-\beta W(x_1, X'_{n-1})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{R^{m\nu}} dY_m K_\Phi(x_1, Y_m) \phi(X'_{n-1} \cup Y_m), n \geq 2. \qquad /2.7/$$

Линейный оператор $\hat{\chi}_\Lambda : E_\xi \to E_\xi(\Lambda) \subset E_\xi$ определим, как

$$(\hat{\chi}_\Lambda \phi)(X_n) = \chi_\Lambda(X_n)\, \phi(X_n)\ ,$$

а оператор $\exp(-\beta \hat{W}_1(\bar{X}_\Lambda))$ определяется на подпространстве $E_\xi(\Lambda)$ следующим образом:

$$(\exp(-\beta \hat{W}_1(\bar{X}_\Lambda))\hat{\chi}_\Lambda \phi)(X_n) = e^{-\beta W(x_1, \bar{X}_\Lambda)} (\hat{\chi}_\Lambda \phi)(X_n)\ .$$

Тогда мы можем определить в пространстве E_ξ оператор КЗ "в конечном объеме" K_Λ, соответствующий сосуду $\Lambda \subset R^\nu$ с регулярными граничными условиями $\bar{X}_\Lambda \in \bar{\Omega}_\Lambda$:

$$K_\Lambda = \exp(-\beta \hat{W}_1(\bar{X}_\Lambda))\, \hat{\chi}_\Lambda K\ . \qquad /2.8/$$

С помощью /2.8/ соотношения /2.1/ могут быть переписаны в виде уравнений в пространстве E_ξ:

$$\phi = z e^{-\beta \hat{W}_1(\bar{X}_\Lambda)} \hat{\chi}_\Lambda \alpha + z K_\Lambda \phi, \qquad /2.9/$$

где $\alpha = (1, 0, \dots, 0, \dots)$ и $\phi(\emptyset) = 1$, см. Определение 1.3. Уравнение /2.9/ называют обычно уравнением КЗ в конечном объеме. В настоящей работе оно обобщено на случай явного учета регулярных конфигураций $\bar{\Omega}_\Lambda$ вне сосуда /это эквивалентно некоторому внешнему полю, см.[8] /. Для $X_{\bar{\Lambda}} = \emptyset$ оператор /2.8/ и уравнение /2.9/ сводятся к обычным хорошо известным выражениям /см.[1]/. Аналогичные аргументы, естественно, применимы и к тождествам /2.3/, /2.4/.

Замечание 2.1. Системы уравнений, которые порождаются тождествами /2.1/, /2.3/ или /2.4/, имеют по крайней мере одно решение. Для фиксированных граничных условий $\bar{X}_\Lambda \in \bar{\Omega}_\Lambda$ уравнению КЗ в конечном объеме /2.9/ тождественно удовлетворяет вектор $\phi(z) = \rho_\Lambda(z) \in E^s_\xi$ при соответствующих значениях параметров ξ, z. Таким образом, корреляционные уравнения, построенные на основании тождеств, имеют смысл и представляют интерес только в том случае, если число и физический смысл их решений можно проконтролировать, по крайней мере в конечном объеме. Эта точка зрения является отправной для всего "метода корреляционных уравнений" *.

---

* Здесь совсем не затрагивается вопрос об использовании метода корреляционных уравнений в современной теории поля, см., например,[3].

3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНОМ ОБЪЕМЕ: ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Мы рассмотрим здесь уравнение КЗ в конечном объеме и его модификацию, предложенную Рюэлем[1,5], для того, чтобы реализовать программу, намеченную в Замечании 2.1. Начать следует с хорошо известного замечания о том, что операторы КЗ /2.7/ и /2.8/ сами по себе для этой цели подходят мало. Действительно, пусть парное взаимодействие устойчиво /1.2/ /или сверхустойчиво /1.3// и регулярно /1.4/, тогда для $\phi \in E_\xi$ получаем:

$$|(K\phi)(X_n)| \le \|\phi\|_\xi\, e^{\xi C_\Phi(\beta)} (\xi e^{2\beta B})^{n-1}\ ,$$
$$|(K_\Lambda \phi)(X_n)| \le \|\phi\|_\xi\, e^{\beta D(\bar{X}_\Lambda)}\, e^{\xi C_\Phi(\beta)} (\xi e^{2\beta B})^{n-1}\ . \qquad /3.1/$$

Следовательно, $K_\Lambda : E_\xi \to E_{e^{2\beta B}\xi}$ - это означает, что уравнение /2.9/ невозможно рассматривать в некотором одном банаховом пространстве E_ξ.

<u>Оператор Кирквуда-Рюэля</u>

Замечание 3.1. Оценки /3.1/ невозможно улучшить в общем случае, поскольку даже для /СУ/-взаимодействий /1.3/ имеем:

$$\inf_{X_n \in \Lambda^n} W(x_1, X'_{n-1}) \ge -(n-1) B\ . \qquad /3.2/$$

Тем не менее, как мы увидим ниже, случаи /У/- и /СУ/-взаимодействий приводят в большинстве случаев к существенно разным следствиям.

Имеется по крайней мере два пути преодоления отмеченных выше трудностей. Первый - рассматривать оператор K_Λ /или K / в объединении $E = \bigcup_{\xi > 0} E_\xi$. Второй - воспользоваться красивым приемом Рюэля, который предложил простое преобразование, "возвращающее" область значений оператора K_Λ, или $\mathrm{Ran}\, K$, в пространство E_ξ /см.[1] и [5] /.

Замечание 3.2. Из определения 2.1 следует, что $E_\xi \subset E_{\xi'}$ для $\xi < \xi'$. Поэтому объединение E не является нормированным пространством, но обладает естественной локально-выпуклой топологией индуктивного предела. Более того, как индуктивный предел банаховых пространств E_ξ, объединение E является полным отделимым пространством Макки /см., например,[14] /. К изучению свойств оператора КЗ в пространстве E мы вернемся в другой работе.

В настоящей работе мы воспользуемся приемом Рюэля, который сформулируем в следующем виде:

Предложение 3.1. Пусть Φ - устойчивый и регулярный потенциал парного взаимодействия. Тогда существует такой идемпотентный оператор перестановки $\Pi: E_\xi \to E_\xi$, что $\Pi K: E_\xi \to E_\xi$ и оператор в конечном объеме $\Pi K_\Lambda: E_\xi \to E_\xi$ для $X_\Lambda \in \bar{\Omega}_\Lambda$.

Доказательство. Доказательство первой части предложения хорошо известно /см. [1] / и дает следующую оценку для нормы оператора ΠK:

$$\sup_{\phi \in E_\xi, ||\phi||_\xi = 1} ||\Pi K \phi||_\xi = ||\Pi K||_{E_\xi} \le e^{2\beta B} \xi^{-1} e^{\xi C_\Phi(\beta)} . \qquad /3.3/$$

Оператор Π действует в пространстве E_ξ следующим образом Π: $\phi(X_n) \to \phi(x_\pi, x_2, x_3, \dots, x_{\pi-1}, x_1, x_{\pi+1}, \dots, x_n)$, поэтому в силу /2.8/ получаем:

$$\Pi K_\Lambda = e^{-\beta \hat{W}_1(X_\Lambda)} \hat{\chi}_\Lambda \Pi K . \qquad /3.4/$$

Следовательно, вторая часть предложения есть простое следствие регулярности граничных условий /1.5/ и оценки /3.3/:

$$||\Pi K_\Lambda||_{E_\xi} \le e^{\beta(2B + D(\bar{X}_\Lambda))} \xi^{-1} e^{\xi C_\Phi(\beta)} . \quad \square \qquad /3.5/$$

Следствие 3.1. Пусть $\phi \in E_\xi^s$, тогда $\Pi\phi = \phi$, поэтому в пространстве БХ уравнение /2.9/ можно переписать в виде уравнения Кирквуда-Рюэля /КР/:

$$\phi = z e^{-\beta \hat{W}_\pi(\bar{X}_\Lambda)} \hat{\chi}_\Lambda \alpha + z \Pi K_\Lambda \phi . \qquad /3.6/$$

Поскольку $\Pi K_\Lambda: E_\xi \to E_\xi$ /оператор Кирквуда-Рюэля с областью определения $D(\Pi K_\Lambda) = E_\xi$ /, то уравнение /3.6/ можно формально рассматривать во всем пространстве E_ξ.

Экспоненциальная форма оператора КЗ в конечном объеме и проблема собственных значений

Очевидно, что задача решения уравнений КЗ и КР связана с проблемой собственных векторов для соответствующих операторов. Здесь мы изложим решение этой проблемы в конечном объеме, основываясь на одной идее Пастура /см. [7] /.

Предложение 3.2. Пусть $f \in L^1(R^\nu)$ и $\hat{d}(f): E_\xi \to E_\xi$ - оператор "сдвига":

$$(\hat{d}(f)\phi)(X_n) = \int_{R^\nu} dy\, f(y)\, \phi(X_n \cup y) . \qquad /3.7/$$

Тогда оператор $\hat{d}(f)$ является генератором однопараметрической $||\cdot||_\xi$ - голоморфной группы $\mathcal{P}_f(\zeta): E_\xi \to E_\xi$, где

$$\mathcal{P}_f(\zeta) = \exp(\zeta \hat{d}(f)), \quad \zeta \in \mathbf{C}. \qquad /3.7/$$

Доказательство: Согласно определениям /2.6/ и /3.7/ имеем:

$$||\hat{d}(f)||_{E_\xi} \le \xi ||f||_{L^1(R^\nu)} . \qquad /3.8/$$

Следовательно, операторнозначную функцию /3.7/ можно определить, как абсолютно $||\cdot||_\xi$ -сходящийся в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ ряд

$$\mathcal{P}_f(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^m}{m!} (\hat{d}(f))^m, \qquad ||\mathcal{P}_f(\zeta)||_{E_\xi} \le \exp(\xi|\zeta|\, ||f||_{L^1(R^\nu)}) . \qquad /3.9/$$

Выражение /3.9/ и определяет $||\cdot||_\xi$ -голоморфную группу с генератором $\hat{d}(f)$. $\square$

Замечание 3.3. В случае $f(x) = \chi_\Lambda(x)$ мы будем использовать обозначения $\hat{d}_\Lambda$, $\mathcal{P}_\Lambda(\zeta)$, наконец, $\mathcal{P}_\Lambda = \mathcal{P}_\Lambda(\zeta = 1)$ /преобразование Мебиуса в конечном объеме Λ, см. [7, 15, 24] /.

Определим в пространстве E_ξ два следующих оператора:

$$(\hat{\chi}_\Lambda^1 \phi)(X_n) = \chi_\Lambda(x_1)\, \phi(X'_{n-1}),$$

$$(P_1 \phi)(X_n) = \delta_{1,n}\, \phi(X_n) = \begin{cases} \phi(x_1), & n = 1, \\ 0, & n \ge 2. \end{cases} \qquad /3.10/$$

Тогда, используя условие $\phi(\emptyset) = 1$, оператор КЗ /2.7/ можно записать в виде

$$K = K' - P_1 \hat{\chi}^1_{R^\nu},$$

$$(K'\phi)(X_n) = e^{-\beta W(x_1, X'_{n-1})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{R^{m\nu}} dY_m K_\Phi(x_1, Y_m)\, \phi(X'_{n-1} \cup Y_m), \qquad /3.11/$$

а оператор K' представить в "экспоненциальной" форме:

$$K' = \exp(-\beta\hat{W})\exp\{\exp(-\beta\hat{\Phi}) - \hat{d}(1)\}\hat{\chi}^{1}_{R^\nu}\,. \qquad /3.12/$$

Здесь мы полагаем, что для $\phi \in E_\xi$

$$(\hat{W}\phi)(X_n) = W(x_1, X'_{n-1})\phi(X_n)\,, \qquad /3.13/$$

$$(\{\exp(-\beta\hat{\Phi}) - \hat{d}(1)\}\phi)(X_n) = \int_{R^\nu} dy\,(e^{-\beta\Phi(x-y)} - 1)\phi(X_n \cup y)\,. \qquad /3.14/$$

Следует подчеркнуть, что $\|(\exp(-\beta\hat{\Phi}) - \hat{d}(1))\phi\|_\xi \le \xi C_\Phi(\beta)\|\phi\|_\xi$, однако по отдельности операторы, входящие в /3.14/, не являются ограниченными в пространстве E_ξ. В пространстве БХ: $E^s_\xi(\Lambda) = \hat{\chi}_\Lambda E^s_\xi$ ситуация более благоприятна.

Лемма 3.1. Оператор КЗ в конечном объеме /2.8/ с $D(K_\Lambda) = E^s_\xi(\Lambda)$ можно привести к "каноническому" виду с помощью преобразования Мебиуса $\mathcal{P}_\Lambda$. Это означает, что для $\phi \in E^s_\xi(\Lambda)$ мы имеем:

$$(\mathcal{P}^{-1}_\Lambda K_\Lambda \mathcal{P}_\Lambda \phi)(x_1) = -e^{-\beta W(x_1, \bar{X}_\Lambda)}\chi_\Lambda(x_1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\int_{\Lambda^m} dY_m\,\phi(Y_m)\,,$$
$$(\mathcal{P}^{-1}_\Lambda K_\Lambda \mathcal{P}_\Lambda \phi)(X_n) = e^{-\beta W(x_1, \bar{X}_\Lambda)}e^{-\beta W(x_1, X'_{n-1})}\chi_\Lambda(x_1)\phi(X'_{n-1}),\ n \ge 2. \qquad /3.15/$$

Доказательство. Сужение оператора K_Λ на пространство $E^s_\xi(\Lambda)$ имеет следующий вид /см. /3.11/, /3.12//:

$$K_\Lambda \restriction E^s_\xi(\Lambda) = K'_\Lambda - e^{-\beta\hat{W}_1(\bar{X}_\Lambda)}\hat{\chi}_\Lambda P_1\hat{\chi}^1_\Lambda\,,$$
$$K'_\Lambda = e^{-\beta\hat{W}_1(\bar{X}_\Lambda)}\hat{\chi}_\Lambda e^{-\beta\hat{W}} e^{\{\exp(-\beta\hat{\Phi}) - \hat{d}_\Lambda\}}\hat{\chi}^1_\Lambda\,. \qquad /3.16/$$

Пусть $\phi \in E^s_\xi(\Lambda)$, тогда в силу того, что $\operatorname{supp}\phi(X_n) \subset \Lambda^n$, имеем: $\|\exp(-\beta\hat{\Phi})\phi\|_\xi \le \|\phi\|_\xi |\Lambda|\exp(2\beta B)$, а используя симметрию функций $\{\phi(X_n)\}_{n\ge1}$, получаем

$$[\exp(-\beta\hat{\Phi}), \hat{d}_\Lambda] = 0\,. \qquad /3.17/$$

Нетрудно проверить также, что

$$[\exp(-\hat{d}_\Lambda), \hat{\chi}^1_\Lambda] = 0, \quad [\hat{d}_\Lambda, \hat{W}_1(\bar{X}_\Lambda)] = 0\,. \qquad /3.18/$$

Следовательно, оператор $K'_\Lambda \restriction E^s_\xi(\Lambda)$ может быть представлен в виде:

$$K'_\Lambda = e^{-\beta\hat{W}_1(\bar{X}_\Lambda)}\hat{\chi}_\Lambda e^{-\beta\hat{W}} e^{\exp(-\beta\hat{\Phi})}\hat{\chi}^1_\Lambda e^{-\hat{d}_\Lambda}\,.$$

Поэтому, если заметить, что $\mathcal{P}_\Lambda : E^s_\xi(\Lambda) \to E^s_\xi(\Lambda)$,

$$\mathcal{P}^{-1}_\Lambda K'_\Lambda \mathcal{P}_\Lambda = e^{-\beta\hat{W}_1(\bar{X}_\Lambda)}\hat{\chi}_\Lambda e^{-\hat{d}_\Lambda} e^{-\beta\hat{W}} e^{\exp(-\beta\hat{\Phi})}\hat{\chi}^1_\Lambda\,. \qquad /3.19/$$

Пусть $\phi \in E^s_\xi(\Lambda)$, тогда прямые вычисления показывают, что, следовательно /см. /3.19//, мы имеем:

$$\mathcal{P}^{-1}_\Lambda K'_\Lambda \mathcal{P}_\Lambda = \hat{\chi}_\Lambda e^{-\beta\hat{W}_1(\bar{X}_\Lambda)} e^{-\beta\hat{W}}\hat{\chi}^1_\Lambda\,. \qquad /3.20/$$

Определение /3.10/ и соотношение /3.18/ означают, что

$$(\mathcal{P}^{-1}_\Lambda e^{-\beta\hat{W}_1(\bar{X}_\Lambda)} P_1\hat{\chi}^1_\Lambda \mathcal{P}_\Lambda \phi)(X_n) =$$
$$= \delta_{1,n}\chi_\Lambda(x_1)e^{-\beta W(x_1, \bar{X}_\Lambda)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\int_{\Lambda^m} dY_m\,\phi(Y_m) \qquad /3.21/$$

для $\phi \in E^s_\xi(\Lambda)$. Собирая вместе соотношения /3.20/, /3.21/ и /3.16/, получаем /3.15/. □

Замечание 3.4. Для $X_{\bar{\Lambda}} \in \bar{\Omega}_\Lambda$ и устойчивого взаимодействия /1.2/ имеем:

$$\left|\int_{\Lambda^n} dX_n\, e^{-\beta U(X_n) - \beta W(X_n, \bar{X}_\Lambda)}\right| \le |\Lambda|^n e^{n\beta(B + D(\bar{X}_\Lambda))}\,.$$

Следовательно, большая статистическая сумма /1.7/ может быть продолжена из физической области $z \ge 0$ до целой функции в плоскости $\mathbf{C}$, порядок которой - не более единицы /для /СУ/-взаимодействия порядок функции нулевой/. Таким образом, нули $N(\Xi) = \{z_i \in \mathbf{C} : \Xi(\beta, z_i, \Lambda | \bar{X}_\Lambda) = 0\}$ образуют дискретное множество с точкой сгущения в бесконечности.

Теорема 3.1. Пусть $C(\gamma) = \{z \in \mathbf{C} : |z| < \gamma\}$. Тогда существует такое $\xi > 0$, что в конечном объеме операторы КЗ /2.8/ и КР /3.4/ в случае устойчивого парного взаимодействия Φ и регулярных граничных условий $\bar{X}_\Lambda$ /1.5/ имеют в пространстве БХ $E^s_\xi(\Lambda)$ общее конечное множество собственных векторов $\{r_\Lambda(z_i)\}_{i\geq 0}\in E^s_\xi(\Lambda)$, $r_\Lambda(z_{i=0})=\{\emptyset\}$ /см. /1.8//, соответствующих собственным значениям $\{\lambda_i=z_i^{-1}: z_i\in N(\Xi)\cap C(\gamma)(=\emptyset : i=0)\}$, которые полностью исчерпывают собственные векторы в этом пространстве.

Доказательство. Чтобы решить проблему собственных значений и собственных векторов для некоторого $\xi>0$:

$$K_\Lambda \phi=\lambda\phi,\quad \phi\in E^s_\xi(\Lambda), \qquad /3.22/$$

заметим, что она сводится к задаче

$$\mathcal{P}^{-1}_\Lambda K_\Lambda \mathcal{P}_\Lambda\psi=\lambda\psi,\quad \psi\in E^s_\xi(\Lambda), \qquad /3.23/$$

где $\psi=\mathcal{P}^{-1}_\Lambda\phi$. Пусть /см. /3.15//

$$\psi_0=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\int_{\Lambda^m} dY_m\,\psi(Y_m), \qquad /3.24/$$

тогда, используя /3.15/, получаем явное решение задачи /3.23/:

$$\psi(x_1)=\lambda^{-1}e^{-\beta W(x_1,\bar X_\Lambda)}\chi_\Lambda(x_1)\psi_0,$$
$$\psi(X_n)=\lambda^{-n}e^{-\beta W(X_n,\bar X_\Lambda)}\chi_\Lambda(X_n)\,e^{-\beta U(X_n)}\psi_0,\quad n\geq 2, \qquad /3.25/$$

поскольку /3.25/ и определение /3.24/ приводят к "секулярному уравнению" /см. /1.7//

$$\psi_0\,\Xi(\beta,\lambda^{-1},\Lambda|\bar X_\Lambda)=0. \qquad /3.26/$$

Возвращаясь к проблеме /3.22/, получаем /см. /1.8// собственные векторы

$$\phi_i=\mathcal{P}_\Lambda\psi_i=r_\Lambda(\lambda_i^{-1}) \qquad /3.27/$$

и собственные значения $\{\lambda_i=z_i^{-1}: z_i\in N(\Xi), r_\Lambda(z_i)\in E^s_\xi(\Lambda)\}$.Оценка

$$\|r_\Lambda(z)\|_\xi\leq \sup_{n\geq 1}\xi^{-n}|z|^n e^{n\beta(B+D(\bar X_\Lambda))}\exp(|z|\,|\Lambda|\,e^{\beta(B+D(\bar X_\Lambda))}) \qquad /3.28/$$

и замечание 3.4 доказывают теорему для оператора КЗ. Наконец,

замечания о том, что сужение $\Pi\upharpoonright E^s_\xi=1$ и $\operatorname{Ker}\Pi=\{0\}$, доказывают теорему полностью. □

Решение уравнений КЗ и КР методом аналитического продолжения

Наша цель - найти достаточные условия того, чтобы уравнения типа Кирквуда в конечном объеме имели единственное решение. Уравнение КР /3.6/, так же как и Теорема 3.1, будут служить нам для этого в качестве важного вспомогательного средства.

Лемма 3.2. Пусть $X_{\bar\Lambda}\in\bar\Omega_\Lambda$ и взаимодействие является устойчивым /1.2/. Тогда для комплексных значений активности z и каждого фиксированного $\xi>0$ вектор $\rho_\Lambda(z)=\{\rho_\Lambda(z,X_n|\bar X_\Lambda)\}_{n\geq 1}$ является $\|\cdot\|_\xi$ -мероморфной векторнозначной функцией $\rho_\Lambda: \mathbf{C}_+(\xi)\to E^s_\xi$ в области /круг мероморфности/

$$C_+(\xi)=\{z\in\mathbf{C}: |z|<\xi e^{-\beta(B+D(\bar X_\Lambda))}\}. \qquad /3.29/$$

Доказательство. Используя условия устойчивости и регулярности /1.5/ для вектора $r_\Lambda(z)=\{r_\Lambda(z,X_n|\bar X_\Lambda)\}_{n\geq 1}$ /см. /1.8//, представленного в виде

$$r_\Lambda(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}a_m(z), \qquad /3.30/$$
$$(a_m(z))(X_n)=z^{n+m}\int_{\Lambda^m}dY_m\,e^{-\beta U(X_n\cup Y_m|\bar X_\Lambda)},$$

получаем для фиксированного $\xi>0$, что

$$\|a_m(z)\|_\xi\leq\sup_{n\geq 1}\xi^{-n}(|z|e^{\beta(B+D(\bar X_\Lambda))})^n(|z|\,|\Lambda|e^{\beta(B+D(\bar X_\Lambda))})^m. \qquad /3.31/$$

Более того, для $z,z'\in C_+(\xi)$ и некоторого $\theta\in\mathbf{C}$, $|\theta|<1$, имеем

$$\|(a_m(z')-a_m(z))(z'-z)^{-1}-\frac{d}{dz}a_m(z)\|_\xi\leq|z'-z||z+\theta(z'-z)|^m|\Lambda|^m\times \qquad /3.32/$$
$$\times e^{m\beta(B+D(\bar X_\Lambda))}\sup_{n\geq 1}\xi^{-n}\frac{(m+n)(m+n-1)}{2!}|z+\theta(z'-z)|^{n-2}e^{n\beta(B+D(\bar X_\Lambda))},$$

где /ср. /3.30//

$$\left(\frac{d}{dz} a_m(z)\right)(X_n) = (n+m)\, z^{n+m-1} \int_{\Lambda^m} dY_m\, e^{-\beta U(X_n \cup Y_m | \bar{X}_\Lambda)},$$

$$\left\| \frac{d}{dz} a_m(z) \right\|_\xi \le |\Lambda|\, |z|^{m-1}\, e^{m\beta(B+D(\bar{X}_\Lambda))} \sup_{n \ge 1} \xi^{-n} \left(|z|\, e^{\beta(B+D(\bar{X}_\Lambda))}\right)^n . \qquad /3.33/$$

Оценки /3.31/-/3.33/ показывают, что $a_m : C_+(\xi) \to E_\xi$ является $\|\cdot\|_\xi$-аналитической векторнозначной функцией для любого $m \ge 0$ и что для $z \in C_+(\xi)$ имеем $\|a_m(z)\|_\xi \le (|z|\, |\Lambda|\, e^{\beta(B+D(\bar{X}_\Lambda))})^m$. Итак, ряд /3.30/ является равномерно $\|\cdot\|_\xi$-сходящимся в $C_+(\xi)$, и, следовательно, он определяет в этой области $\|\cdot\|_\xi$-аналитическую векторнозначную функцию $r_\Lambda(z)$. Поэтому определение /1.8/ и замечание 3.4 завершают доказательство леммы. □

Теорема 3.2. Пусть $\bar{X}_\Lambda \in \bar{\Omega}_\Lambda$, а парный потенциал взаимодействия Φ является устойчивым и регулярным. Тогда для каждого $\xi > 0$ уравнение КР /3.6/ в конечном объеме имеет единственное решение в пространстве $E^s_\xi(\Lambda)$, которое:
/а/ $\|\cdot\|_\xi$ -аналитично в области $C_-(\xi)$ /круг аналитичности/:

$$C_-(\xi) = \{ z \in \mathbf{C} : |z| < \xi e^{-\xi C_\Phi(\beta)}\, e^{-\beta(2B+D(\bar{X}_\Lambda))} \} \subset C_+(\xi), \qquad /3.34/$$

/б/ $\|\cdot\|_\xi$-мероморфно в $C_+(\xi)$ и совпадает в этой области с $\rho_\Lambda(z) \restriction C_+(\xi)$.

Доказательство. /а/ Пусть $\bar{X}_\Lambda \in \bar{\Omega}_\Lambda$, тогда оценка /3.5/ дает:

$$\| z \Pi K_\Lambda \|_{E^s_\xi(\Lambda)} \le \| z \Pi K_\Lambda \|_{E_\xi} \le |z| \xi^{-1} e^{\xi C_\Phi(\beta)}\, e^{\beta(2B+D(\bar{X}_\Lambda))} . \qquad /3.35/$$

Следовательно, для $z \in C_-(\xi)$ уравнение КР /3.6/ имеет единственное решение:

$$\phi(z|\bar{X}_\Lambda) = (\mathbb{1} - z \Pi K_\Lambda)^{-1} z e^{-\beta \hat{W}_\pi(\bar{X}_\Lambda)} \hat{\chi}_\Lambda \alpha . \qquad /3.36/$$

Это аналитическая векторнозначная функция $\phi : C_-(\xi) \to E^s_\xi(\Lambda)$, поскольку: /1/ ряд Лиувилля-Неймана для резольвенты: $R_{z^{-1}}(\Pi K_\Lambda) = (z^{-1} - \Pi K_\Lambda)^{-1}$ дает в силу /3.35/ равномерно сходящееся в $C_-(\xi)$ разложение функции $\phi(z|\bar{X}_\Lambda)$ в ряд по степеням z и /2/ вектор $\rho_\Lambda(z)$, состоящий из симметричных функций, является по определению решением уравнения КР в конечном объеме. Следовательно: $\phi(z|\bar{X}_\Lambda) = \rho_\Lambda(z) \restriction C_-(\xi) \in E^s_\xi(\Lambda)$.
/в/ Последнее равенство и результаты леммы 3.2 означают, что решение /3.36/ имеет единственное аналитическое продолжение из области $C_-(\xi)$ в область $C'_+(\xi) = C_+(\xi) \setminus (N(\Xi) \cap C_+(\xi))$, где оно

определяет функцию $\tilde{\phi}(z|\bar{X}_\Lambda) \in E^s_\xi(\Lambda) : \tilde{\phi}(z|\bar{X}_\Lambda) = \rho_\Lambda(z) \restriction C'_+(\xi)$. Следовательно, это продолжение является решением уравнения /3.6/. Наконец, предположение о том, что для некоторых $z \in C'_+(\xi)$ в пространстве $E^s_\xi(\Lambda)$ имеются решения, отличные от $\tilde{\phi}(z|\bar{X}_\Lambda)$, противоречит Теореме 3.1. Это означает, что аналитическое продолжение выражения /3.36/ дает единственное решение уравнения КР /3.6/ в пространстве $E^s_\xi(\Lambda)$ для $z \in C'_+(\xi)$. Поскольку оно совпадает с $\rho_\Lambda(z) \restriction C_+(\xi)$, то, следовательно, является $\|\cdot\|_\xi$-мероморфным в этой области. □

Следствие 3.1. Уравнение КЗ /2.9/ имеет в пространстве $E^s_\xi(\Lambda)$ единственное решение, которое:
/а/ $\|\cdot\|_\xi$ -аналитично в области $C_-(\xi)$,
/б/ $\|\cdot\|_\xi$ -мероморфно в $C_+(\xi)$ и совпадает в этой области с $\rho_\Lambda(z) \restriction C_+(\xi)$.

Доказательство. Заметим, что $\Pi \restriction E^s_\xi = \mathbb{1}$, $\operatorname{Ker} \Pi = \{0\}$. Поэтому, если предположить, что для $z \in C'_+(\xi)$ существует некоторое другое решение $\tilde{\phi}'(z|\bar{X}_\Lambda) \in E^s_\xi(\Lambda)$, тогда это противоречит только что доказанной теореме. □

Сверхустойчивые взаимодействия

Здесь мы рассмотрим сверхустойчивые взаимодействия, чтобы показать, что в этом случае ситуация существенно отличается от той, которая имеет место для устойчивых взаимодействий, рассмотренных выше.

Лемма 3.3. Пусть $\bar{X}_\Lambda \in \bar{\Omega}_\Lambda$ и потенциал взаимодействия сверхустойчив /1.3/. Тогда $\rho_\Lambda(z) \in \bigcap_{\xi > 0} E_\xi$ для $z \in \mathbf{C} \setminus N(\Xi)$ и является $\|\cdot\|_\xi$ -мероморфной векторнозначной функцией $\rho_\Lambda : \mathbf{C} \to E_\xi$ для любого $\xi > 0$.

Доказательство. Рассуждения почти полностью совпадают с доказательствами леммы 3.2. /СУ/ - свойство /1.3/ и регулярность конфигурации $\bar{X}_\Lambda$ /1.5/ приводят к оценкам, которые показывают, что $\Xi(\beta, z, \Lambda | \bar{X}_\Lambda)$ является для $z \in \mathbf{C}$ целой функцией нулевого порядка и $a_m : \mathbf{C} \to E_\xi$ является $\|\cdot\|_\xi$ -голоморфной функцией для любого $m \ge 0$ и $\xi > 0$ /см. /3.30//. Более того, имеем /ср. /3.31//:

$$\|a_m(z)\|_\xi \le \sup_{n \ge 1} \xi^{-n} \left(|z| e^{\beta(B_n(\Lambda)+D(\bar{X}_\Lambda))}\right)^n \left(|z|\, |\Lambda|\, e^{\beta(B_m(\Lambda)+D(\bar{X}_\Lambda))}\right)^m \qquad /3.37/$$

Следовательно, $r_\Lambda(z)$, см. /3.30/, для любого $\xi > 0$ также является целой векторнозначной функцией $r_\Lambda : \mathbb{C} \to E_\xi$ нулевого порядка. Ссылка на выражение /1.8/ завершает доказательство. □

В качестве следствия получаем аналог теоремы 3.2, а именно:

Теорема 3.3. Пусть $X_{\bar\Lambda} \in \bar\Omega_\Lambda$ и парный потенциал взаимодействия Φ является сверхустойчивым и регулярным. Тогда для любого $\xi > 0$ уравнение КР /3.6/ имеет в пространстве БХ $\bigcap_{\xi>0} E^s_\xi(\Lambda)$ единственное решение $\phi(z|\bar X_\Lambda)$, которое является:

/а/ $\|\cdot\|_\xi$ -аналитичным в области $\tilde C_-$:

$$\tilde C_- = \{z \in \mathbf{C} : |z| < e^{-1} C_\Phi(\beta) e^{-\beta(2B + D(\bar X_\Lambda) - 4A/|\Lambda|)}\} \supset C_-(\xi), \qquad /3.38/$$

/б/ $\|\cdot\|_\xi$ -мероморфным в плоскости $\mathbf{C}$ и $\phi(z|\bar X_\Lambda) = \rho_\Lambda(z)$.

Доказательство. Из определения оператора Π /см. Предложение 3.1/ имеем:

$$(\hat\chi_\Lambda \Pi \hat W)(X_n) \geq -2B_n(\Lambda). \qquad /3.39/$$

Поэтому вместо /3.35/ получаем:

$$\|z \Pi K_\Lambda\|_{E^s_\xi(\Lambda)} \leq |z| \xi^{-1} e^{\xi C_\Phi(\beta)} , e^{\beta(2B_2(\Lambda) + D(\bar X_\Lambda))} . \qquad /3.40/$$

Из неравенства /3.40/ следует, что для активностей $z \in \tilde C_-$ уравнение КР /3.6/ имеет единственное решение. Доказательство завершается ссылкой на лемму 3.3 и метод аналитического продолжения и почти дословно повторяет заключительную часть доказательства Теоремы 3.2. □

Следствие 3.2. В конечном объеме уравнение КЗ /2.9/ для любого $\xi > 0$ имеет в пространстве БХ $E^s_\xi(\Lambda)$ единственное решение $\phi : \mathbf{C} \setminus N(\Xi) \to E^s_\xi(\Lambda)$, которое является $\|\cdot\|_\xi$ -мероморфным и совпадает с $\rho_\Lambda(z)$.

4. НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ И ПОТЕНЦИАЛЫ С ТВЕРДОЙ СЕРДЦЕВИНОЙ. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОПЕРАТОРА КЗ

Как указано в замечании 1.2, имеется по крайней мере два типа парных потенциалов, которые следует выделить в связи с определением 1.1. Ниже мы покажем, что то же следует сделать в связи со свойствами операторов КЗ и ММ.

Предложение 4.1. Пусть парный потенциал Φ является регулярным /1.4/ и /а/ неотрицательным, либо /б/ имеет твердую сердцевину. Тогда для любого $\xi > 0$ КЗ-оператор /2.7/ ограничен в пространстве E_ξ; КЗ-оператор в конечном объеме /2.3/ ограничен в пространстве E_ξ для любой конфигурации $X_{\bar\Lambda} \in \Omega_{\bar\Lambda}$.

Доказательство. Для случая /а/ оно является немедленным следствием равенств $B = 0$, $D(X_{\bar\Lambda}) = 0$ и неравенства /3.1/. В случае /б/ достаточно заметить, что регулярность потенциала и наличие твердой сердцевины приводит к тому, что существует

$$\inf_{X \in \Omega} W(x\ , X) \equiv -D_\Phi . \qquad /4.1/$$

Поэтому мы получаем следующую оценку:

$$\|K_\Lambda\|_{E_\xi} \leq e^{\beta D_\Phi} \|K\|_{E_\xi} \leq e^{2\beta D_\Phi}\ \xi^{-1}\ e^{\xi C_\Phi(\beta)} , \qquad /4.2/$$

которая и завершает доказательство. □

Замечание 4.1. Пусть $\Lambda \subset \boldsymbol{R}^\nu$ - некоторый фиксированный сосуд, тогда из-за твердых сердцевин существует такой номер $n(\Lambda)$, что $\exp(-\beta W(x_1, X'_{n-1})) = 0$ для $n > n(\Lambda)$ и $X_n \in \Lambda^n$. Следовательно, $(K_\Lambda \phi)(X_n) = 0$ для $n > n(\Lambda)$ и $\phi \in E_\xi$, т.е. $\mathrm{Ran}\, K_\Lambda$ является "конечномерным" подпространством $E_{0,n(\Lambda)} \subset \bigcap_{\xi>0} E_\xi$.

В этом смысле оператор КР ΠK_Λ для сверхустойчивого потенциала соответствует некоторому "предельному" случаю: используя /3.39/ нетрудно показать, что

$$\Pi K_\Lambda = \|\cdot\|_{E_\xi} - \lim_{m \to \infty} P_m \Pi K_\Lambda , \qquad /4.3/$$

где $P_m : E_\xi \to E_{0,m} = \{\phi \in E_\xi : \phi(X_n) = 0, n > m\}$ является " m-мерным" проектором.

Суммируя обсуждение в конце раздела 4 и предложение 4.1, получаем следующий аналог теоремы 3.3 для операторов КЗ:

Теорема 4.1. Пусть регулярный парный потенциал взаимодействия Φ является /а/ неотрицательным и $\Phi(x) \geq \Phi_+(x)$ *, либо /б/ имеет твердую сердцевину. Тогда для любого $\xi > 0$ и произвольной конфигурации $X_{\bar\Lambda} \in \Omega_{\bar\Lambda}$ уравнение КЗ в конечном объеме /2.9/ имеет в пространстве БХ $\bigcap_{\xi>0} E^s_\xi(\Lambda)$ единственное решение, которое является $\|\cdot\|_\xi$ -аналитическим в области $\tilde C_- = \{z \in \mathbf{C} : |z| < e^{-2\beta D_\Phi - 1} C_\Phi(\beta)\}$, $\|\cdot\|_\xi$ - мероморфным в плоскости $\mathbf{C}$ и совпадает там с $\rho_\Lambda(z)$.

Доказательство. Рассуждая так же, как при доказательстве теорем 3.2 и 3.3, и ссылаясь на предложение 4.1, получаем результаты настоящей теоремы. □

---

* $\Phi_+(x) \in C(\boldsymbol{R}^\nu)$, $\Phi_+(0) > 0$.

Замечание 4.2. В общем случае регулярного неотрицательного парного потенциала получаем /см. /3.37/ и /4.2//: $\tilde{C}_- = \{z\in C : |z| < C_\Phi(\beta)e^{-1}\}$ и $\phi(z|X_{\bar\Lambda}) = \rho_\Lambda(z) \upharpoonright C_+(\xi)$, где $C_+(\xi) = \{z\subset C: |z|<\xi\}$.

Уравнение Майера-Монтролла

Идеология, развитая выше для уравнений КЗ и КР, может быть распространена на случай тождеств ММ /2.4/. Вначале определим формально оператор ММ /см. /2.4/, /2.5//:

$$(M\phi)(X_n) = z^n e^{-\beta U(X_n)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{R^{m\nu}} dY_m M_\Phi(X_n, Y_m)\,\phi(Y_m)\,, \qquad /4.4/$$

и соответствующий оператор M_Λ в конечном объеме:

$$(M_\Lambda\phi)(X_n) = (e^{-\beta\hat{W}(\bar{X}_\Lambda)}\hat{\chi}_\Lambda M\phi)(X_n) = e^{-\beta W(x_n,\bar{X}_\Lambda)}\chi_\Lambda(X_n)(M\phi)(X_n)\,. \quad /4.5/$$

Тогда уравнение ММ в конечном объеме /в некотором векторном пространстве/ имеет вид:

$$\phi = e^{-\beta\hat{W}(\bar{X}_\Lambda)}\hat{\chi}_\Lambda e(z) + M_\Lambda\phi\,,$$
$$(e(z))(X_n) = z^n e^{-\beta U(X_n)}\,. \qquad /4.6/$$

Замечание 4.3. Для устойчивого взаимодействия вектор $e(z)\in E^s_\xi$ для $|z|<\xi e^{-\beta B}$, тогда $\exp(-\beta\hat{W}(\bar{X}_\Lambda))\hat{\chi}_\Lambda e(z)\in E^s_\xi$ для $X_{\bar\Lambda}\in\bar\Omega_\Lambda$ и $|z|<\xi e^{-\beta(B+D(\bar{X}_\Lambda))}$.

Теорема 4.2. Пусть Φ-регулярный потенциал парного взаимодействия, удовлетворяющий одному из следующих условий: /а/ потенциал является неотрицательным, /б/ потенциал является неотрицательным и сверхустойчивым /например, $\Phi(x)\geq\Phi_+(x)$ /, /в/ потенциал содержит твердую сердцевину. Тогда /1/ оператор ММ /4.4/ ограничен в пространстве E_ξ, если $|z|<\xi e^{-\beta B}\exp(-\xi C_\Phi(\beta)e^{\beta D_\Phi}$ в случае /в/, и, если $|z|<\xi\exp(-\xi C_\Phi(\beta))$, в случаях /а/ и /б/; /2/ оператор ММ в конечном объеме /4.5/ ограничен в пространстве E_ξ для любой конфигурации $X_{\bar\Lambda}\in\Omega_{\bar\Lambda}$, если $|z|<\xi e^{-\xi C_\Phi(\beta)}$ в случае /а/, и для $z\in C$ и произвольного $\xi>0$ в случаях /б/ и /в/; /3/ уравнение ММ в конечном объеме /4.6/ имеет в пространстве БХ $E^s_\xi(\Lambda)$ единственное $||\cdot||_\xi$ -мероморфное решение $\phi(z|X_{\bar\Lambda}) = \rho_\Lambda(z)$ для любого $\xi>0$ и конфигураций $X_{\bar\Lambda}$ в случаях /б/ и /в/, и единственное $||\cdot||_\xi$ -мероморфное решение $\phi(z|X_{\bar\Lambda}) = \rho_\Lambda(z)\upharpoonright\{z\in C : |z|<\xi\}$ в случае /а/.

Доказательство. /1/ В силу определения /4.4/ имеем:

$$|(M\phi)(X_n)| \leq ||\phi||_\xi |z|^n e^{n\beta B} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi^m}{m!} \int_{R^{m\nu}} dY_m |M_\Phi(X_n, Y_m)|\,,$$

здесь $\phi\in E_\xi$. Воспользуемся теперь оценкой [18]:

$$|M_\Phi(X_n, Y_m)| \leq \prod_{y\in Y_m} \{ \sum_{i=1}^{n} |e^{-\beta\Phi(x_i-y)} - 1| \prod_{1\leq j<i} e^{-\beta\Phi(x_j-y)}$$

и /4.1/, тогда получим, что

$$|(M\phi)(X_n)| \leq ||\phi||_\xi (|z|e^{\beta B})^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi^m}{m!} (nC_\Phi(\beta)e^{\beta D_\Phi})^m \leq$$
$$\leq ||\phi||_\xi (|z|e^{\beta B})^n \exp(n\xi C_\Phi(\beta)e^{\beta D_\Phi})\,.$$

Следовательно, мы получаем неравенство

$$||M||_{E_\xi} \leq \sup_{n\geq 1} \xi^{-n}(|z|e^{\beta B}e^{\xi C_\Phi(\beta)\exp(\beta D_\Phi)})^n\,, \qquad /4.7/$$

которое и приводит к доказательству в случае /в/. В случаях /а/ и /б/ в неравенстве /4.7/ необходимо положить $B=0$ и $D_\Phi=0$. Заметим, что $||M||_{E_\xi}<1$ для активностей из допустимых областей. /2/ Оценка /4.7/ при $B=0$, $D_\Phi=0$ не изменяется, если мы переходим к оператору в конечном объеме M_Λ /4.5/ в случае /а/, см. пример 3.1. Чтобы оценить $||M_\Lambda||_{E_\xi}$ в случаях /б/ и /в/, необходимо принять во внимание /СУ/-свойство и /4.1/, тогда

$$|(M_\Lambda\phi)(X_n)| \leq ||\phi||_\xi (|z|e^{\beta B_n(\Lambda)})^n e^{n\beta D_\Phi} e^{n\xi C_\Phi(\beta)\exp(\beta D_\Phi)}\,. \quad /4.8/$$

Поэтому оператор $M_\Lambda: E_\xi \to \bigcap_{\xi>0} E_\xi$ для произвольной конфигурации $X_{\bar\Lambda}$ и $z\in C$. В частном случае /б/ получаем: $D_\Phi=0$ и $B_n(\Lambda) = -nA/|\Lambda|$, см. /1.3/. /3/ В случае /а/ $\exp(-\beta\hat{W}(X_{\bar\Lambda}))\hat{\chi}_\Lambda e(z)\in E^s_\xi(\Lambda)$, для $|z|<\xi$ /см. замечание 4.3/ и $||M_\Lambda||_{E^s_\xi(\Lambda)}<1$ в области $\{z\in C: |z|<\xi e^{-\xi C_\Phi(\beta)}\}$, см. /4.8/. Следовательно:

$$\phi(z|X_{\bar\Lambda}) = (1 - M_\Lambda)^{-1} e^{-\beta\hat{W}(X_{\bar\Lambda})}\hat{\chi}_\Lambda e(z) \qquad /4.9/$$

является единственным $||\cdot||_\xi$ -аналитическим решением уравнения /4.6/, которое естественно совпадает с $\rho_\Lambda(z)\upharpoonright\{z\in C : |z|<\xi e^{-\xi C_\Phi(\beta)}\}$. Применяя теперь метод аналитического продолжения, /4.9/ можно продолжить до $||\cdot||_\xi$ -мероморфного решения $\phi(z|X_{\bar\Lambda}) = \rho_\Lambda(z)\upharpoonright\{z\in C:|z|<\xi\}$. Наконец, единственность решения является прямым следствием теоремы 3.1 и замечания о том, что уравнение ММ получается простым итерированием уравнения КЗ /см. раздел 2 и [7] /. Доказательство в случаях /б/ и /а/ является прямой адаптацией выше приведенных рассуждений и замечания о том, что теперь вектор $e^{-\beta \hat{W}(X_{\bar{\Lambda}})} \hat{\chi}_\Lambda e(z) \in \bigcap_{\xi>0} E^s_\xi$. □

Замечание 4.4. Результаты теорем 4.1, 4.2 и замечаний 4.2, 4.3 показывают, что уравнения КЗ и ММ в конечном объеме эквивалентны для парных потенциалов взаимодействия, удовлетворяющих одному из условий, /а/, /б/ или /в/, теоремы 4.2, а также, что уравнение ММ неудовлетворительно в других случаях, когда уравнение КЗ все еще "работает". По построению каждое решение уравнения КЗ удовлетворяет уравнению ММ, обратное, в общем случае, несправедливо, см. [19]. О других подходах к оценке оператора ММ /4.7/ см. [20,21].

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Уравнения равновесия

Так же, как это поясняется в разделе 2, такой подход основан на некоторых "уравнениях равновесия", которые постулируются из тождеств для гиббсовской меры в конечном объеме, а затем могут быть распространены для описания вероятностных гиббсовских мер /гиббсовских состояний/ для бесконечных систем, см. [22,23] и [13,15]. В связи с полученными выше результатами поучительно сравнить два этих подхода к описанию систем даже в конечном объеме /проблема сравнения этих подходов в бесконечном объеме обсуждается в [13,19,24]/.

Пусть $\sigma_\Lambda(z) = \{n!\, d\mu_\Lambda(X_n|\bar{X}_\Lambda)/dX_n\}_{n\geq 1}$ - векторнозначная плотность условной вероятностной меры в сосуде $\Lambda \subset R^\nu$ для регулярных граничных условий $\bar{X}_\Lambda \in \bar{\Omega}_\Lambda$. Тогда $\sigma_\Lambda(z)$ тождественно удовлетворяет "уравнениям равновесия" в конечном объеме [19,24]:

$$\sigma_\Lambda(X\cup Y|\bar{X}_\Lambda) = z^{N(X)} e^{-\beta U(X) - \beta W(X, Y\cup \bar{X}_\Lambda)} \chi_\Lambda(X)\, \sigma_\Lambda(Y|\bar{X}_\Lambda),\ Y\neq\emptyset, \quad /5.1/$$

которые эквивалентны хорошо известным уравнениям Добрушина-Ланфорда-Рюэля /ДЛР/ для меры $\{d\mu_\Lambda(X_n|\bar{X}_\Lambda)\}_{n\geq 1}$, см. [13,19,22-24]:

$$d\mu_\Lambda((X\subset\Delta)\cup(Y\subset\Lambda\setminus\Delta)|\bar{X}_\Lambda) = z^{N(X)} e^{-\beta U(X) - \beta W(X, Y\cup\bar{X}_\Lambda)} \frac{dX}{N(X)!} \times \quad /5.2/$$

$$\times\, d\mu_\Lambda(\emptyset \cup (Y\subset\Lambda\setminus\Delta)|\bar{X}_\Lambda), \qquad \Delta\subset\Lambda.$$

Если взаимодействие между частицами устойчиво /1.2/, тогда $\sigma_\Lambda(z) \in E_\cdot(\Lambda)$ для $0\leq z<\xi e^{-\beta(B+D(\bar{X}_\Lambda))}$. При этих значениях активности соотношения /5.1/ образуют в пространстве БХ $E^s_\xi(\Lambda)$ уравнения, решения которых связаны с корреляционными функциями с помощью преобразований Мебиуса: $\rho_\Lambda(z) = \mathcal{P}_\Lambda \sigma_\Lambda(z)$, см. замечание 3.3.

Для сравнения уравнений /5.1/ с уравнением КЗ в конечном объеме /2.9/ с областью определения $E^s_\xi(\Lambda)$ воспользуемся результатами леммы 3.1 и теоремы 3.1. Тогда вместо /2.9/ мы получим следующие уравнения для $\psi = \mathcal{P}_\Lambda^{-1}\phi$ /здесь $\phi \in E^s_\xi(\Lambda)$ и $\phi(\emptyset) = 1$ /:

$$\begin{aligned} \psi(x_1) &= z e^{-\beta W(x_1, \bar{X}_\Lambda)} \chi_\Lambda(x_1) + z e^{-\beta W(x_1, \bar{X}_\Lambda)} \chi_\Lambda(x_1)\, \psi_0, \\ \psi(X_n) &= z e^{-\beta W(x_1, X'_{n-1} \cup \bar{X}_\Lambda)} \chi_\Lambda(x_1)\, \psi(X'_{n-1}), \quad n\geq 2, \end{aligned} \quad /5.3/$$

где ψ_0 определяется равенством /3.24/. Итерируя /5.3/ для $n\geq 2$, получаем уравнения /5.1/. Таким образом, доказана эквивалентность описания гиббсовских состояний в конечном объеме для регулярных граничных условий с помощью уравнения КЗ и "уравнений равновесия". То же самое справедливо для сверхустойчивых взаимодействий при менее жестких условиях: $\sigma_\Lambda(z) \in \bigcap_{\xi>0} E^s_\xi(\Lambda)$, $0\leq z<\infty$, см. лемму 3.3 и раздел 4, а также работу [25], где этот факт был установлен с помощью метода производящего функционала, предложенного Боголюбовым.

Уравнения /5.3/ и условия $\phi(\emptyset) = 1$ в действительности достаточно для явного нахождения равновесного состояния в конечном объеме. Соотношение $\phi(\emptyset) = 1$ дает условие нормировки $(\mathcal{P}_\Lambda \psi)(\emptyset) = 1$ в точности такое, какое имеется для $\sigma_\Lambda(z)$, см. /5.1/. Поэтому, используя /3.24/ и /5.3/, мы получаем для $n = 1$, что:

$$\psi(x_1) = z e^{-\beta W(x_1, \bar{X}_\Lambda)} \chi_\Lambda(x_1)\, \psi(\emptyset),$$

$$\psi(\emptyset) = (\Xi(\beta, z, \Lambda|\bar{X}_\Lambda))^{-1}.$$

Таким образом, $\psi = \sigma_\Lambda(z)$. Однако доказательство того, что для регулярного граничного условия $\bar{X}_\Lambda$ решение "уравнения равновесия" принадлежит пространству БХ $E^s_\xi(\Lambda)$ и является единственным, требует техники раздела 3.

ОБСУЖДЕНИЕ

Впервые проблему решения уравнения КЗ в конечном объеме /для непрерывных и решетчатых систем/, а также ее связь с теорией Фредгольма рассмотрел Пастур [7]. В действительности он решил более общую задачу, когда свободный член в уравнении может быть произвольным вектором из некоторого, явно описываемого, подпространства $\mathfrak{D}_s \subset \bigcup_{\xi>0} E^s_\xi(\Lambda)$, однако при этом полагалось, что и область определения оператора K_Λ совпадает с $\mathfrak{D}_s$ /ср. замечание 3.2/. Подпространство $\mathfrak{D}_s$, как отмечается в [7], является минимальным многообразием, на котором тождества КЗ могут рассматриваться как содержательные уравнения.

Некоторый анализ подхода, предложенного Пастуром, является предметом работы [8], где учтено для непрерывных систем наличие внешнего потенциала, а также, отчасти, работ [19,24] /решеточные и непрерывные системы/, где, кроме того, рассматривается связь между различного типа корреляционными уравнениями и "уравнением равновесия". В частности, в [19] приведено несколько поучительных примеров, когда уравнение КЗ имеет решения, которые не описывают равновесных состояний системы.

В первую очередь я благодарен Л.А.Пастуру, под чьим непосредственным влиянием написана эта работа. Я признателен также Н.Ангелеску и Г.Ненчу, прочитавшим рукопись, за большое число полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. "Мир", М., 1971.
2. Ginibre J. Some Applications of Functional Integration in Statistical Mechanics. In: Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, ed. by C. De Witt and R.Stora. Gordon & Breach, N.Y., 1970.
3. Конструктивная теория поля /сборник статей/, вып.6, "Мир", М., 1977; Петрина Д.Я., Иванов С.С., Ребенко А.Л. Уравнения для коэффициентных функций матрицы рассеяния. "Наука", М., 1979.
4. Bogolubov N.N. J.Phys.USSR, 1946, 10, p.257,265; Боголюбов Н.Н., Хацет Б.И. ДАН СССР, 1949, 66, с.321.
5. Ruelle D. Ann.Phys.(NY), 1963, 25, p.209.
6. Боголюбов Н.Н., Петрина Д.Я., Хацет Б.И. ТМФ, 1969, 1, с.251.
7. Пастур Л.А. ТМФ, 1974, 18, с.233.
8. Moraal H. Physica, 1975, 81A, p.469.
9. Moraal H. Physica, 1977, 87A, p.331.
10. Klein W. J.Math.Phys., 1975, 16, p.1482.
11. Greenberg W. Comm.Math.Phys., 1971, 22, p.259.
12. Добрушин Р.Л. Теория вероятностей и ее применения, 1964, 9, с.626.
13. Ruelle D. Comm.Math.Phys., 1970, 18, p.127.
14. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. "Мир", М., 1967.
15. Престон К. Гиббсовские состояния на счетных множествах. "Мир", М., 1977.
16. Lenard A., Sherman S. Comm.Math.Phys., 1970, 17, p.91.
17. Angelescu N., Nenciu G., Protopopescu V. Comm.Math.Phys., 1971, 122, p.162.
18. Загребнов В.А., Пастур Л.А. ТМФ, 1978, 36, с.352.
19. Brascamp H.J. Commun.Math.Phys., 1975, 40, p.235.
20. Penrose O. J.Math.Phys., 1963, 4, p.1312.
21. Lebowitz J.L., Percus J.K. J.Math.Phys., 1963, 4, p.1495.
22. Добрушин Р.Л. Функциональный анализ и его приложения, 1968, 2, с.31,44; Теория вероятностей и ее применения, 1968, 13, с.197.
23. Lanford O.E., Ruelle D. Comm.Math.Phys., 1969, 13, p.194.
24. Gruber C., Lebowitz J.L. Comm.Math.Phys., 1975, 41, p.11.
25. Назин Г.И. ДАН СССР, 1979, 245, с.1352; ТМФ, 1980, 42, с.383.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 июля 1980 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники