объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-80-431

С.И.Сердюкова

О ДОСТИЖИМОСТИ МИНИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ

Направлено в "Доклады АН СССР"

1980

Сердюкова С.И. P5-80-431

О достижимости минимального порядка погрешности интегрирования гиперболических уравнений методом конечных разностей в равномерной метрике

Изучаются конечно-разностные методы решения задачи Коши для уравнения $u_t + u_x = 0$. Рассматриваются явные разностные схемы максимального при заданном наборе точек порядка точности $2k-1$. Накладывается естественное ограничение на отношение шагов сетки $0 < \gamma < 1$. Для начальных данных из $C_\alpha^N(\mathcal{T})$ и $k = O(\ln h^{-1})$ установлена оценка погрешности решения в равномерной метрике порядка $O(h^{N+\alpha}\ln\ln h^{-1})$. Получены асимптотические оценки разностной функции Грина и "разностной ступеньки". Число точек, на которые "размывается" разрыв, пропорционально $\ln h^{-1}$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1980

Serdyukova S.I. P5-80-431

On Attainability of Minimum Order of Error of Integration of Hyperbolic Equations by Difference

В работе [1] изучаются конечно-разностные методы решения задачи Коши для уравнения $u_t + u_x = 0$ при начальных условиях $u_0(x)$ из $\mathcal{P}_p(\mathcal{T})$. $\mathcal{P}_p(\mathcal{T})$ - класс периодических с периодом 2π функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{2\pi} |u_0^{(p)}(x)|^2 \, dx \le \mathcal{T}^2.$$

Уравнение интегрируется методом конечных разностей по сетке с шагами τ, h. Если известны значения решения при $t = t_n = n\cdot\tau$, $x = x_\nu = \nu\cdot h$, то можно определить решение с точностью до величины порядка $O(h^p)$. Поэтому имеется принципиальная возможность, интегрируя по такой сетке, получить решение с точностью $O(h^p)$. Показано, что в L_2 такая возможность реализуется, если используются разностные аппроксимации порядка точности $\ln h^{-1}$. Рассматриваются явные разностные схемы максимального при заданном наборе точек порядка точности. Накладывается естественное ограничение на отношение шагов сетки $(\tau/h) \le 1$.

В предлагаемой работе исследуется сходимость в равномерной метрике, в C. Рассматривается подкласс схем нечетного порядка точности $2k-1$. В случае конечного k эти схемы устойчивы в C [2,3]. При начальных данных из $C_\alpha^N(\mathcal{T})$ для схем порядка точности $\ln h^{-1}$ установлена оценка погрешности решения в C порядка точности $O(h^{N+\alpha}\ln\ln h^{-1})$. В процессе доказательства получены асимптотические оценки разностной функции Грина.

Кроме того, получены асимптотические оценки решения разностной задачи в окрестности изолированного разрыва. При счете разрывных решений важно, чтобы зона "размывания разрыва" была как можно уже. Показано, что число точек, на которые размывается разрыв, пропорционально порядку схемы. Зона размывания разрыва имеет ширину порядка $O(\ln h^{-1})$. Для схем конечного порядка точности q ширина зоны размывания разрыва имеет порядок $h^{-\frac{1}{q+1}}$ [4,5,6]. При доказательстве основных оценок используется метод перевала. Точки перевала, определяющие асимптотику, лежат вблизи окружности конечного радиуса. Число точек перевала пропорционально порядку схемы, и они сближаются при $h \to 0$. Основные оценки получаются суммированием асимптотических вычетов по множеству определяющих точек перевала. В случае схем конечного порядка точности асимптотика определяется двумя изолированными точками перевала.

Итак, обсуждается численное решение задачи Коши для уравнения $u_t+u_x=0$ с начальными данными $u_0(x)$ из $C_\alpha^N(\mathbb{R})$. Рассматриваются разностные аппроксимации порядка $2k-1$ по минимальному набору точек:

$$u_\nu^{n+1} = \sum_{\ell=-k}^{k-1} a_\ell u_{\nu+\ell}^n, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2 \dots,$$

$$a_\ell = a_{-k+r} = (-1)^{k+r} \frac{(k-\gamma)\dots(1-\gamma)\gamma(1+\gamma)\dots(k-1+\gamma)}{(2k-1)!}\cdot\frac{C_{2k-1}^r}{(-k+r+\gamma)}.$$

Через γ обозначено отношение шагов сетки τ/h. Обозначим через $f(\phi)$ характеристическую функцию

$$f(\phi) = \sum_{\ell=-k}^{k-1} a_\ell \cdot e^{i\ell\phi}.$$

При $\gamma \le 1$ задача Коши устойчива в L_2: $|f(\phi)| \le 1$, $0 \le \phi \le 2\pi$ /1,7/. В окрестности $\phi = 0$ характеристическая функция допускает представление

$$e^{i\gamma\phi}\cdot f(\phi) = 1 - \frac{\sin\gamma\pi}{\pi}\,\frac{\Gamma(k+1-\gamma)\Gamma(k+\gamma)}{\Gamma(2k+1)}\,\phi^{2k} + O(\phi^{2k+1}) =$$

$$= 1 - \frac{\sin\gamma\pi}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\left(\frac{\phi}{2}\right)^{2k}(1+O(k^{-1})) + O(\phi^{2k+1}).$$

Учитывая результаты работы /1/, получаем, что

$$|f(\phi)| \le \exp\left\{-\frac{\sin\gamma\pi}{4\pi}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\sin^{2k}\frac{\phi}{2}\right\}.$$

Характеристическая функция допускает представление

$$f(\phi) = e^{-i\gamma\phi}\left(1 - A\int_0^\phi \sin^{2k-1}\frac{u}{2}\exp i\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)u\,du\right),$$

$$A = \frac{(k-\gamma)\dots(1-\gamma)\gamma(1+\gamma)\dots(k-1+\gamma)}{(2k-1)!}\,2^{2k-1} = \frac{\sin\gamma\pi}{\pi}\sqrt{k\pi}\,(1+O(k^{-1})).$$

Разностная функция Грина Γ_ν^n и "разностная ступенька" G_ν^n – решения задачи Коши со следующими начальными данными:

$$\Gamma_\nu^0 = \begin{cases}1, & \nu = 0,\\ 0, & \nu \ne 0,\end{cases} \qquad G_\nu^0 = \begin{cases}0, & \nu < 0,\\ 1, & \nu \ge 0.\end{cases}$$

Положим $k = [\ln\tau/4\ln\sin\frac{3}{4}]$, $j = \nu - \gamma n$, $J_0 = \max(1, nAk)$,

$\Phi_j^n = G_j^n - (1+\mathrm{sgn}\,j)/2$, $t = n\cdot\tau \le 1$. Постоянные B и c не зависят ни от n, ни от k, ни от γ.

Лемма "локализации". Найдется постоянная B такая, что при $0<\gamma<1$ для всех $n \ge 1$

$$\sum_{|j|>J_0} |\Gamma_j^n| < B(k\exp(-nA\tau^{1/2}/4k) + J_0^{-1}).$$

Аналогичная оценка верна для Φ_j^n.

Заметим, что при $n \gg \tau^{-1/2}\cdot\sqrt{k}$ J_0 ограничивает зону, в которой "разностная ступенька" отличается от "ступеньки" на величину порядка 1. В таком смысле употребляется термин локализация. Для остальных n эта оценка является основной. Лемма локализации доказывается интегрированием по частям. Используются известные интегральные представления:

$$\Gamma_\nu^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^n(\phi)e^{i\nu\phi}\,d\phi, \quad G_\nu^n = \frac{1}{2\pi}\int_L f^n(\phi)\frac{e^{i\nu\phi}\,d\phi}{(1-e^{-i\phi})}.$$

Вне малой окрестности нуля L совпадает с отрезком $[-\pi, \pi]$. Полюс обходится по произвольному пути в нижней полуплоскости.

Нижеследующие лемма и теорема дают точную по порядку оценку зоны размывания изолированного разрыва при $n \gg \tau^{-1/2}\sqrt{k}$.

Теорема. При $3k < j \le J_0$, $0<\gamma<1$, $n \le \tau^{-1}$ асимптотика функций Γ_j^n, $G_j^n - 1$ определяется суммой асимптотических вычетов относительно точек перевала t_ℓ^* функции

$$f^n(2\arcsin t)\exp(2i\nu\arcsin t),$$

расположенных в верхней полуплоскости. Справедливо соотношение

$$\Gamma_j^n = \sum_{\ell=0}^{k-1}(-1)^\ell\sqrt{\frac{2t_\ell(1-t_\ell^2)^{-1/2}}{(2k-1)\pi i j}}\left(1+\rho_\ell\left(\sqrt{\frac{k}{j}}\right)\right)\exp\{\arcsin t_\ell -$$

$$-\frac{t_\ell}{2k}(1+O(k^{-1}))\} + R_j^n, \qquad |R_j^n| < \frac{c}{j}\exp(-nA\tau^{1/4}/4k),$$

$$t_\ell = \left(\frac{j}{nA}\right)^{\frac{1}{2k-1}} \exp i\,\frac{\pi/2 + 2\pi\ell}{2k-1}, \quad t_\ell^* = t_\ell(1+O(k^{-2})),$$

$$\sin^2\frac{3}{4}(1+O(k^{-1})) < |t_\ell^*| < \sin\frac{3}{4}(1+O(k^{-1})).$$

Асимптотика $G_j^n - 1$ отличается от асимптотики Γ_j^n множителем $(1+2it_\ell)^{-1}$ под знаком суммы. При $-J_0 \le j < -3k$ асимптотика определяется точками перевала, расположенными в нижней полуплоскости.

Следствие. Существует постоянная B такая, что

$$\sum_{3k<|j|\le J_0} |\Gamma_j^n| < B, \qquad \sum_{3k<|j|\le J_0} |\Phi_j^n| < B.$$

Суммируя асимптотические вычеты по методу Абеля, получаем

$$|\Gamma_j^n| < \frac{c}{|\sqrt{jk}|}\exp - \frac{1}{5k}(j^{2k}/An)^{\frac{1}{2k-1}}.$$

Аналогичная оценка верна для Φ_j^n.

Лемма. При $0<\gamma<1$, $\tau^{-1/2}(Ak)^{-1} \le n \le \tau^{-1}$

$$\sum_{|j|\le 3k} |\Gamma^n| \asymp \ln k, \qquad \sum_{|j|\le 3k} |\Phi_\gamma^n| \asymp \ln k.$$

Интегралы по $|t| > t_0 = \sqrt{\sin\frac{3}{4}}$, $t = \sin\frac{\phi}{2}$, экспоненциально малы. Если $|t| \le t_0$,

$$f^n(\phi)\cdot e^{i\gamma n\phi} = \exp\{-\frac{nA}{k}\,\frac{\sin^{2k}\frac{\phi}{2}}{\cos\frac{\phi}{2}}(1+O(\frac{\phi}{k}))\exp i(\gamma-\frac{1}{2})\phi\} = \exp n\theta(\gamma,t).$$

Положим $t_2 = t_1(1+bk^{-1})$, $t_1 = \sin\frac{\phi_1}{2}$, $nAk^{-1}t_1^{2k}/\sqrt{1-t_1^2} = \frac{1}{4}$.

Для $|t|<t_1$ $|n\theta(\gamma,t)| < \frac{1}{2}$; при $|t| \ge t_2$ $|f^n| < \exp - \frac{2b+1}{8}$.

Интегрируя по частям, получаем

$$\Gamma_j^n = \frac{\sin j\phi_1}{j\cdot\pi} + R_j^n + O(k^{-1}), \qquad |R_j^n| < \frac{3}{|j|}\exp - \frac{2b+1}{8}.$$

Φ_j^n имеет аналогичное представление. Оценки погрешности решения при начальных данных из $C_\alpha^N(\hat{\Pi})$ являются простым следствием полученных оценок Γ_j^n, G_j^n.

Приношу глубокую благодарность профессору Н.С.Бахвалову, который привлек мое внимание к этой задаче.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цинь Мэн-чжао. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1961, 1, №6, с.1117.
2. Thomee V. J.Differential Equations, 1965, 1,p.273.
3. Сердюкова С.И. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1967, 7, №3, с.497.
4. Thomee V. Numerical Solution of Partial Differential Equations /Ed.by J.H.Bramble/. Academic Press, New York, 1966, p.125.
5. Hedstrom G.H. J.SIAM Numer. Anal.,1968, 5, No. 2, p.363.
6. Сердюкова С.И. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1971, 11, №2, с.411.
7. Strang G. Journal of Mathematics and Physics, 1962, XLI, No.2,p.147.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 июня 1980 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники

Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
Р2-12462	Труды V Международного совещания по нелокальным теориям поля. Алушта, 1979.	2 р. 25 к.
Д-12831	Труды Международного симпозиума по фундаментальным проблемам теоретической и математической физики. Дубна, 1979.	4 р. 00 к.
Д-12965	Труды Международной школы молодых ученых по проблемам ускорителей заряженных частиц. Минск, 1979.	3 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1979.	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:

101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79,

издательский отдел Объединенного института ядерных исследований