объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-80-4

С.И.Сердюкова

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ С УЧЕТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Направлено в "ЖВМ и МФ"

1980

Сердюкова С.И.

P5-80-4

Исследование устойчивости разностной краевой задачи, аппроксимирующей систему уравнений акустики с учетом теплопроводности

Исследуется устойчивость разностной краевой задачи, аппроксимирующей систему уравнений акустики с учетом теплопроводности. Для разностной схемы, аналогичной схеме "крест" для уравнения акустики, доказана устойчивость задачи с нулевыми граничными условиями. Предполагается, что соответствующая задача Коши устойчива. Кроме того, исследована устойчивость численного алгоритма, использующего разные шаги для "гиперболического" и "параболического" переменных. Установлено, что используемый на практике критерий устойчивости неточен. На самом деле, условия устойчивости более жесткие.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1980

Serdyukova S.I.

P5-80-4

Следуя /1/, рассмотрим систему уравнений акустики с учетом теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(v - (\gamma-1)\,w\right), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = c\,\dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = \varkappa\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c\,\dfrac{\partial u}{\partial x}. \end{cases}$$

$c, \varkappa, \gamma$ - постоянные, $c>0$, $\varkappa \geqslant 0$, $\gamma>1$. Строится разностная схема, аналогичная схеме "крест" для уравнения акустики:

$$\begin{cases} u_l^{n+1} = u_l^n + c\alpha\left(v_{l+1}^n - v_l^n - (\gamma-1)(w_{l+1}^n - w_l^n)\right), \\ v_l^{n+1} - c\alpha\,(u_l^{n+1} - u_{l-1}^{n+1}) = v_l^n, \\ w_l^{n+1} - \sigma\,\dfrac{\varkappa\alpha}{h}\,(w_{l+1}^{n+1} - 2w_l^{n+1} + w_{l-1}^{n+1}) + c\alpha\,(u_l^{n+1} - u_{l-1}^{n+1}) = \\ = w_l^n + (1-\sigma)\,\dfrac{\varkappa\alpha}{h}\,(w_{l+1}^n - 2w_l^n + w_{l-1}^n), \end{cases}$$

$\alpha = \frac{\tau}{h}$, τ , h - шаги сетки соответственно по t , x .
В/I/ получены условия устойчивости задачи Коши. В предлагаемой работе доказывается, что при тех же условиях устойчива задача с нулевыми граничными условиями. При этом используется общий подход, развитый в/2,3,4/. Кроме того, исследуется устойчивость численного алгоритма, использующего разные шаги для "гиперболического" и "параболического" переменных/5/. Установлено, что используемый на практике критерий устойчивости неточен.

Последовательно рассматриваются чисто явная ($\sigma = 0$), чисто неявная ($\sigma = 1$) схемы и смешанный случай $(0 < \sigma < 1)$. В случае $\sigma = 0$ характеристическая матрица имеет вид

$$
\mathcal{D}(\ell^{i\varphi}) = \begin{bmatrix} 1 & c\alpha \ell^{i\frac{\varphi}{2}} 2i\sin\frac{\varphi}{2} & -c\alpha(\gamma-1)\ell^{i\frac{\varphi}{2}} 2i\sin\frac{\varphi}{2} \\ c\alpha \ell^{-i\frac{\varphi}{2}} 2i\sin\frac{\varphi}{2} & 1-4c^2\alpha^2\sin^2\frac{\varphi}{2} & c^2\alpha^2(\gamma-1)4\sin^2\frac{\varphi}{2} \\ -c\alpha \ell^{-i\frac{\varphi}{2}} 2i\sin\frac{\varphi}{2} & 4c^2\alpha^2\sin^2\frac{\varphi}{2} & 1-\left(\frac{\varkappa\alpha}{h}+c^2\alpha^2(\gamma-1)\right)4\sin^2\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}.
$$

Чтобы понять, как ведут себя собственные значения характеристической матрицы, удобно сделать замену $\lambda = 1 + \omega \sin\frac{\varphi}{2}$.
Характеристическое уравнение принимает вид:

$$
\omega^3 + \omega^2\left(\frac{4\varkappa\alpha}{h} + 4c^2\alpha^2\gamma\right)\sin\frac{\varphi}{2} + \omega\, 4c^2\alpha^2\left(\gamma + 4\frac{\varkappa\alpha}{h}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) +
$$

$$
+ 4c^2\alpha^2 \cdot 4\frac{\varkappa\alpha}{h}\sin\frac{\varphi}{2} = 0 .
$$

Элементарные рассуждения показывают, что при

$$
\mu = \frac{\varkappa\alpha}{h} \le \frac{1}{2} , \qquad \nu^2 = c^2\alpha^2 \le \frac{1-2\mu}{\gamma-2\mu}
$$

собственные значения по модулю не превосходят I для всех $0 \le \varphi < 2\pi$. При этом есть две определяющие точки: $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.
В окрестности $\varphi = 0$ собственные значения допускают разложение:

$$
\lambda_1 = exp\left\{-\frac{\mu}{\gamma}\varphi^2 + O(\varphi^3)\right\} , \quad \lambda_{2,3} = exp\left\{\mp i\nu\sqrt{\gamma}\,\varphi - \frac{\mu}{2}\frac{\gamma-1}{\gamma}\varphi^2 + O(\varphi^3)\right\} .
$$

Точка $\varphi = \pi$ является определяющей лишь при $\nu^2 = \frac{1-2\mu}{\gamma-2\mu}$.В этой точке одно собственное значение по модулю равно I и в окрестности $\varphi = \pi$ справедливо разложение

$$
\lambda = -1 + \frac{(\varphi-\pi)^2}{4} \; \frac{\gamma + 4\mu(\mu-1)}{\mu(\gamma-1)} + \ldots .
$$

Чтобы не удлинять и без того утомительную цепочку выкладок, избавимся от этого случая, положив $\nu^2 < \frac{1-2\mu}{\gamma-2\mu}$. Хотя ясно, что в окрестности $\varphi = 0$ оператор резольвенты имеет более сложную структуру, чем в окрестности $\varphi = \pi$. Так что включение $\varphi = \pi$ не приведет к дополнительным принципиальным трудностям. Зная асимптотику собственных значений характеристической матрицы, получаем асимптотику собственных значений резольвентной матрицы $\mathcal{U}(z)$ в окрестности $\psi = 0$, $z = \ell^{i\psi}$. Речь идет о собственных значениях, равных по модулю I при $\psi = 0$:

$$
\varkappa_1 = exp\left\{-\frac{i\psi}{\nu\sqrt{\gamma}} - \frac{\mu}{2\nu^3}\frac{\gamma-1}{\gamma^{5/2}}\psi^2 + \ldots\right\} ,
$$

$$
\varkappa_2 = exp\left\{-\sqrt{\frac{\gamma}{\mu}}\,\ell^{i\frac{\pi}{4}}\psi^{\frac{1}{2}} + \ldots\right\} ,
$$

$$
\varkappa_3 = exp\left\{\sqrt{\frac{\gamma}{\mu}}\,\ell^{i\frac{\pi}{4}}\psi^{\frac{1}{2}} + \ldots\right\} ,
$$

$$
\varkappa_4 = exp\left\{\frac{i\psi}{\nu\sqrt{\gamma}} + \frac{\mu}{2\nu^3}\frac{\gamma-1}{\gamma^{5/2}}\psi^2 + \ldots\right\} .
$$

Вне единичного круга $(|z| > 1 , \psi = \rho \cdot \ell^{i\omega} , -\pi < \omega < 0)$

$$
|\varkappa_1| < 1 , \; |\varkappa_2| < 1 , \; |\varkappa_3| > 1 , \; |\varkappa_4| > 1 .
$$

Разберемся, как устроен оператор резольвенты. Здесь $Det\, A_1 = 0$, так что стандартный метод построения резольвенты не проходит/2/. По переменному u разностная схема одношаговая, поэтому естественно сделать такую замену переменных :

$$
y = (u_\ell , v_{\ell+1} , v_\ell , w_{\ell+1} , w_\ell)^* .
$$

Соответственно находим резольвентную матрицу:

$$
\mathcal{U}(z) = A^{-1} \cdot B ,
$$ где

$$A(z)=\begin{bmatrix} 1-z & \nu & -\nu & -\nu(\gamma-1) & \nu(\gamma-1) \\ \nu & \nu^2 & -\nu^2 & -\nu^2(\gamma-1) & \nu^2(\gamma-1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu^2 & \nu^2 & \mu+\nu^2(\gamma-1) & -\mu-\nu^2(\gamma-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B(z)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & z-1+\nu^2 & -\nu^2 & -\nu^2(\gamma-1) & \nu^2(\gamma-1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu^2 & \nu^2 & z-1+\mu+\nu^2(\gamma-1) & -\mu-\nu^2(\gamma-1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathrm{Det}\,A(z)=-z\nu^2\mu\neq 0 .$$

Резольвентная матрица определена для всех $z\neq 0$. Матрица $B(z)$, а следовательно, и $\mathcal{M}(z)$,имеет нулевое собственное значение, которому отвечает собственный вектор $(\nu,0,1,0,0)^*$. Остальные собственные значения при $z=1$ равны I. Им отвечают три собственных и один присоединенный векторы. Эти векторы строятся исходя из собственных векторов характеристической матрицы. Покажем, что собственные значения и собственные векторы разлагаются в ряды по целым степеням φ . В самом деле, если собственному значению $\lambda=1+\omega\sin\frac{\varphi}{2}$ отвечает собственный вектор $E(\varphi)$, то этот вектор одновременно является собственным вектором матрицы

$$\frac{D(e^{i\varphi})-I}{\sin\frac{\varphi}{2}} .$$

Из представления ее характеристического многочлена в виде

$$\omega(\omega-i2\nu\sqrt{\gamma})(\omega+i2\nu\sqrt{\gamma})+\sin\frac{\varphi}{2}(\omega^2(4\mu+4\nu^2\gamma)+4\nu^2\cdot 4\mu)+$$
$$+\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\omega\cdot 4\nu^2\cdot 4\mu=0$$

следует[6], что собственные значения и собственные векторы разлагаются в ряды по целым степеням φ . Пусть $\lambda(\varphi)$ отвечает собственный вектор $E(\varphi)$ и $\varkappa(\varphi)$ - отвечающее $\lambda(\varphi)$ собственное значение резольвентной матрицы, тогда вектор

$$(E_1(\varkappa),\varkappa E_2(\varkappa),\varkappa E_3(\varkappa),E_2(\varkappa),E_3(\varkappa))^*=\mathcal{E}(\varkappa)$$

является[2] собственным вектором резольвентной матрицы. Паре $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, рожденной λ_1 , отвечают собственный вектор $\mathcal{E}(\varkappa_2)$ и присоединенный вектор, который определяется формулой

$$\frac{\mathcal{E}(\varkappa_2)-\mathcal{E}(\varkappa_3)}{(\varkappa_2-\varkappa_3)} .$$

Базис собственных и присоединенных векторов построен. Тем самым установлено существование невырожденного аналитического преобразования подобия, которое приводит $\mathcal{M}(z)$ к нормальному жорданову виду

$$T(z)\mathcal{M}(z)T^{-1}(z)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varkappa_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varkappa_4 \end{bmatrix}, T^{-1}(1)=\begin{bmatrix} \nu & \sqrt{\gamma} & 0 & \frac{\mu}{\nu}\frac{\gamma-1}{\gamma} & \sqrt{\gamma} \\ 0 & -1 & (\gamma-1) & 0 & 1 \\ 1 & -1 & (\gamma-1) & (1-\gamma) & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Элементы $T(z)$ в окрестности $\psi=0$ разлагаются в ряды по степеням $\psi^{\frac{1}{2}}$, $T^{-1}(z)=T^{-1}(1)+O(\sqrt{z-1})$. В дальнейших выкладках вместо $T(z)$ будет участвовать $T(1)$. Заметим сразу, что учет членов порядка $O(\sqrt{z-1})$ не меняет полученных оценок. Переходим непосредственно к исследованию устойчивости краевой задачи. На левой границе обращаются в ноль v и w :

$$v_0=w_0=0 .$$

Тогда из основной системы, определяющей резольвенту, получаем

$$u_0+\nu(v_1-(\gamma-1)w_1)=zu_0+f_0^1 .$$

Соответственно, на правом конце имеем

$$v_N=w_N=0 \quad , -\nu(u_N-u_{N-1})=f_N^2 .$$

После замены переменных краевые условия преобразуются к виду

$$\begin{pmatrix} 1-z & \nu & 0 & -\nu(\gamma-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y_0 = \begin{pmatrix} f_0^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = g_0 ,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Еще одна замена переменных $w = Ty$ – и мы получаем краевые матрицы

$$K_1 = \begin{pmatrix} \nu(1-z) & \sqrt{\gamma}(1-z)-\nu\gamma & 0 \\ 1 & -1 & \gamma-1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\nu}\frac{\gamma-1}{\gamma}(1-z) & -\sqrt{\gamma}(1-z)-\nu\gamma \\ \gamma-1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \gamma-1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_4 = \begin{pmatrix} \gamma-1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_1^{-1} K_2 \mathcal{M}_{22}^{-N} K_4^{-1} K_3 \mathcal{M}_{11}^{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_1^{2N} & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa_2^{2N} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathcal{M}_{11}$, $\mathcal{M}_{22}$ – основные блоки жордановой нормальной формы. Блоку $\mathcal{M}_{11}$ отвечают собственные значения, меньшие по модулю I, $\mathcal{M}_{22}$ отвечают собственные значения, большие по модулю I. Заметим, что $\mathrm{Det}\, K_1 = \nu\gamma \neq 0$, $\mathrm{Det}\, K_4 = \gamma \neq 0$. Отсюда следует устойчивость левой и правой краевых задач. Чтобы исследовать устойчивость задачи с двумя границами, выписываем в явном виде оператор резольвенты:

$$w_\ell^{I} = \sum_{s=1}^{\ell} \mathcal{M}_{11}^{\ell-s} (Tg_s)^{I} - \sum_{s=1}^{\ell-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \varkappa_2^{\ell}(\varkappa_2^{s}-\varkappa_2^{s})/(\varkappa_2-\varkappa_2^{-1}) & 0 \end{pmatrix} (Tg_s)^{II} - \sum_{s=\ell}^{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \varkappa_2^{s} \frac{\varkappa_2^{\ell}-\varkappa_2^{-\ell}}{\varkappa_2-\varkappa_2^{-1}} & 0 \end{pmatrix} (Tg_s)^{II} -$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_1^{N+\ell-s}(\varkappa_1^{N}-\varkappa_1^{-N}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varkappa_2^{N-s}(\varkappa_2^{\ell}(1+\varkappa_2-\varkappa_2^{-1})-\varkappa_2^{-\ell})}{(\varkappa_2^{N}-\varkappa_2^{-N})} \end{pmatrix} (Tg_s)^{I} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varkappa_1^{\ell+s-N}}{\varkappa_1^{N}-\varkappa_1^{-N}} \\ \varkappa_2^{N}\left(\frac{\varkappa_2^{\ell}-\varkappa_2^{-\ell}+\varkappa_2^{\ell}(\varkappa_2-\varkappa_2^{-1})}{\varkappa_2^{N}-\varkappa_2^{-N}}\right)\left(\varkappa_2^{s}+\frac{\varkappa_2^{s}-\varkappa_2^{-s}}{\varkappa_2-\varkappa_2^{-1}}\right) & 0 \end{pmatrix} (Tg_s)^{II}, \quad (\ell=1,\dots,N),$$

$$w_\ell^{II} = -\sum_{s=\ell+1}^{N} \begin{pmatrix} \varkappa_2^{s-\ell} & 0 \\ 0 & \varkappa_1^{s-\ell} \end{pmatrix} (Tg_s)^{II} - \sum_{s=1}^{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varkappa_2^{-s-\ell}(\varkappa_2-\varkappa_2^{-1})(\varkappa_2^{N}-\varkappa_2^{-N})^{-1} \\ 0 & \varkappa_1^{-s-\ell}(\varkappa_1^{N}-\varkappa_1^{-N})^{-1} & 0 \end{pmatrix} (Tg_s)^{I} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{N} \begin{pmatrix} \varkappa_2^{N-\ell} \frac{\varkappa_2-\varkappa_2^{-1}}{\varkappa_2^{N}-\varkappa_2^{-N}} \left(\varkappa_2^{s}+\frac{\varkappa_2^{s}-\varkappa_2^{-s}}{\varkappa_2-\varkappa_2^{-1}}\right) & 0 \\ 0 & \frac{\varkappa_1^{s+\ell}}{\varkappa_1^{2N}-1} \end{pmatrix} (Tg_s)^{II}, \quad (\ell=0,\dots,N-1).$$

Здесь мы не останавливаемся подробно на оценке интегралов и сумм. Заметим лишь, что оценка "самого плохого" слагаемого, содержащего под знаком суммы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varkappa_2^{N} \frac{\varkappa_2^{\ell}-\varkappa_2^{-\ell}}{\varkappa_2^{N}-\varkappa_2^{-N}} \left(\varkappa_2^{s}+\frac{\varkappa_2^{s}-\varkappa_2^{-s}}{\varkappa_2-\varkappa_2^{-1}}\right) d\varphi ,$$

сводится к оценке коэффициентов Фурье функции

$$e^{-n\varphi^2}\left(\sum_{\ell=1}^{N} c_\ell \sin \ell\varphi\right).$$

При этом $\|C_\ell\|_{L_2}$ оценивается сверху через норму начальных данных. Подробнее об оценке интегралов и сумм такого рода сказано в /4,7/.

Случай чисто неявной схемы, $\sigma = 1$

Условие устойчивости задачи Коши здесь такое :

$$\nu^2 \le \frac{1+2\mu}{\gamma + 2\mu} .$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\omega^3 + \omega^2\left(4\nu^2 + \frac{4\mu + 4\nu^2(\gamma-1)}{1+4\mu\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right)\sin\frac{\varphi}{2} + \omega\cdot 4\nu^2\,\frac{\gamma + 8\mu\sin^2\frac{\varphi}{2}}{1+4\mu\sin^2\frac{\varphi}{2}} +$$

$$+ \frac{4\nu^2\cdot 4\mu}{1+4\mu\sin^2\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\varphi}{2} = 0 .$$

Отсюда следует, что линейные члены асимптотики собственных значений остаются теми же, что и в случае явной схемы. Меняется собственный вектор, отвечающий нулевому собственному значению резольвентной матрицы. Но главные члены краевых матриц переходят в себя. Поэтому остаются в силе рассуждения, проведенные в случае чисто явной схемы.

Смешанный случай, $0 < \sigma < 1$

Главные члены асимптотики собственных значений и краевых матриц те же, что и в предыдущих случаях. Меняется только условие устойчивости задачи Коши:

$$\mu < \frac{1}{2(1-2\sigma)} , \quad \sigma < \frac{1}{2} ; \quad \nu^2 \le \frac{1-2\mu(1-2\sigma)}{\gamma - 2\mu(1-2\sigma)} .$$

Счет с различными шагами для "гиперболического" и "параболического" переменных

В книге Р.Рихтмайера, К.Мортона /5/ обсуждается счет по явной схеме, при этом третье уравнение решается по t с более мелким шагом τ/κ . Предполагается, что в этом случае условие устойчивости определяется неравенствами

$$\nu = c\frac{\tau}{h} < 1 , \qquad \mu = \frac{\varkappa\tau}{\kappa h^2} < \frac{1}{2} .$$

Покажем, что на самом деле условия устойчивости более жесткие. Вводим в рассмотрение переменные $w_\ell^{n1}, \dots, w_\ell^{n\kappa}$.

Тогда система разностных уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} u_\ell^{n+1} = u_\ell^n + c\alpha\left(v_{\ell+1}^n - v_\ell^n - (\gamma-1)(w_{\ell+1}^{n1} - w_\ell^{n1})\right) , \\ v_\ell^{n+1} - c\alpha\left(u_\ell^{n+1} - u_{\ell-1}^{n+1}\right) = v_\ell^n , \\ w_\ell^{n+11} + c\frac{\alpha}{\kappa}\left(u_\ell^{n+1} - u_{\ell-1}^{n+1}\right) = w_\ell^{n\kappa} + \frac{\varkappa\tau}{\kappa h^2}\left(w_{\ell+1}^{n\kappa} - 2w_\ell^{n\kappa} + w_{\ell-1}^{n\kappa}\right) , \\ w_\ell^{n+1j} - w_\ell^{n+1j-1} - \frac{\varkappa\tau}{\kappa h^2}\left(w_{\ell+1}^{n+1j-1} - 2w_\ell^{n+1j-1} + w_{\ell-1}^{n+1j-1}\right) + \\ + c\frac{\alpha}{\kappa}\left(u_\ell^{n+1} - u_{\ell-1}^{n+1}\right) = 0 , \qquad j = 2, \dots, \kappa . \end{cases}$$

Характеристическая матрица имеет размерность К+2, ее характеристический многочлен имеет вид:

$$\mathcal{P}(\varkappa) = (-\varkappa)^{\kappa-1}\Big[-\varkappa^3 + \left(\beta^\kappa + 2 - 4\nu^2\sin^2\frac{\varphi}{2} - \frac{4\nu^2}{\kappa}(\gamma-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\varkappa^2 +$$

$$+ \left(-1 - \beta^\kappa\left(2 - 4\nu^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{4\nu^2}{\kappa}(\gamma-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(\frac{\beta^\kappa - 1}{\beta - 1}\right)\right)\varkappa +$$

$$+ \beta^\kappa - \frac{4\nu^2}{\kappa}(\gamma-1)\sin^2\frac{\varphi}{2}\,\frac{\beta^\kappa - \beta}{\beta - 1}\Big] , \qquad \beta = 1 - \frac{4\mu}{\kappa}\sin^2\frac{\varphi}{2} .$$

Для того чтобы свободный член по модулю не превосходил I, необходимо, чтобы $|\beta^\kappa| \le 1$. Отсюда следует соотношение $\frac{\mu}{\kappa} \le \frac{1}{2}$. При $\varphi = 0$ все три отличные от 0 корня равны I. Найдем их асимптотику в окрестности 0. Как и ранее, делаем замену переменных

$$\varkappa = 1 + \omega\sin\frac{\varphi}{2} .$$

Тогда получим

$$\omega^3 + \omega^2 \left[4\nu^2 + \frac{4\mu}{\kappa} \frac{\beta^\kappa - 1}{\beta - 1} + \frac{4\nu^2}{\kappa}(\gamma - 1) \right] \sin\frac{\varphi}{2} +$$

$$+ \omega \cdot 4\nu^2 \left(2 - \beta^\kappa + \frac{2(\gamma-1)}{\kappa} - \frac{(\gamma-1)}{\kappa} \frac{\beta^\kappa - 1}{\beta - 1} \right) + 4\nu^2 \frac{1-\beta^\kappa}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 0 .$$

При $\varphi = 0$ уравнение принимает вид

$$\omega^3 + \omega \left(8\nu^2 \frac{(\gamma-1)}{\kappa} - 4\nu^2(\gamma - 2) \right) = 0 .$$

При $\kappa > 2$, $\gamma > 2$ получаем положительный корень, которому отвечает $\varkappa > 1$. Так что алгоритм неустойчив при $\gamma > 2$. Далее рассматриваем $\gamma \le 2$. В окрестности $\varphi = 0$ возникает комплексно- сопряженная пара корней. Найдем следующие члены разложений:

$$\varkappa_{1,2} = 1 \pm i 2\nu \sqrt{2 - \gamma + 2\frac{(\gamma-1)}{\kappa}} \sin\frac{\varphi}{2} - \left(4\nu^2 + 4\mu - \frac{4\mu}{2-\gamma+2(\gamma-1)/\kappa} \right) \sin^2\frac{\varphi}{2} + \ldots ,$$

$$|\varkappa_{1,2}|^2 = 1 - \left(4\nu^2(3-\gamma) + 4\mu + \frac{4\nu^2(\gamma-1)}{\kappa} + \frac{8\nu^2(\gamma-1)}{\kappa} - \frac{4\mu}{2-\gamma+2(\gamma-1)/\kappa} \right) \sin^2\frac{\varphi}{2} + \ldots =$$

$$= 1 - \left(4\nu^2(3-\gamma) + 12\nu^2(\gamma-1)/\kappa - 4\mu \frac{1-\gamma+2(\gamma-1)/\kappa}{2-\gamma+2(\gamma-1)/\kappa} \right) \sin^2\frac{\varphi}{2} + \ldots .$$

Таким образом, для малых φ при $1 < \gamma \le 2$ $|\varkappa_i| < 1$. Рассмотрение предельного случая $\varkappa = -1$ при $\varphi = \pi$ приводит к следующему ограничению:

$$\nu^2 \le \frac{1}{1 - \frac{(\gamma-1)}{2\mu} \frac{\beta_0^\kappa - 1}{\beta_0^\kappa + 1}} < 1 , \quad \beta_0 = 1 - \frac{4\mu}{\kappa} , \quad 1 < \gamma \le 2 .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М., "Наука", 304-307, 1973.
2. Kreiss H.O. Stabiliti Theory of Difference Approximations of Mixed Initial Boundary Value Problems. I, Math. of Comp., 22, 104, 1968, 703-714.
3. Сердюкова С.И. Необходимое и достаточное условие устойчивости одного класса разностных краевых задач. ДАН СССР, т.208, № 1, 52-55, 1973.
4. Сердюкова С.И. Об асимптотической устойчивости одной разностной краевой задачи. ЖВМ и МФ, т.18, № 3, 653-659, 1978.
5. Рихтмайер Р.,Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М., "Мир", 263-268, 1972.
6. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. т.II, М., "Наука", 520-543, 1968.
7. Сердюкова С.И. Об оценке последовательностей интегралов, содержащих псевдоряды Фурье. ОИЯИ 5-8247, Дубна, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 января 1980 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники