ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



P5-80-381

Е.Х.Христов

# О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДАЮЩИХ УРАВНЕНИЯ ТИПА КдФ

Направлено в журнал "Дифференциальные уравнения"

1980

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим два уравнения Шредингера

$$\ell_n y \equiv [-D^2 + v_n(x)]y = k^2 y \qquad -\infty < x < \infty\ ,\ D = \frac{d}{dx},\ n = 1,2, \qquad /0.1/$$

где вещественные, непрерывные потенциалы $v_n(x)$ таковы, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)\,|v_n(x)|\,dx < \infty\ . \qquad /0.2/$$

Обозначим через $f_n^+(x,k)$ и $f_n^-(x,k)$ решения Йоста уравнений /0.1/, определяемые условиями

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_n^{\pm}(x,k)\exp(\mp ikx) = 1 \qquad \mathrm{Im}\,k \geq 0. \qquad /0.3/$$

Известно /см., напр., [1,2] /, что если $D v_n(x) = v_{n,x}(x) \in L_1(R) = L_1$, то функции

$$F^+(x,k) = f_1^+(x,k) f_2^+(x,k),\ F^-(x,k) = f_1^-(x,k) f_2^-(x,k) \qquad /0.4/$$

удовлетворяют интегро-дифференциальным уравнениям

$$\Lambda_+ F^+(x,k) = k^2 F^+(x,k),\ \ \Lambda_- F^-(x,k) = k^2 F^-(x,k),\ \ \mathrm{Im}\,k \geq 0, \qquad /0.5/$$

где

$$\Lambda_{\pm} = \frac{1}{4}\{-D^2 + 2s(x) - \int_{\pm\infty}^{x} dy\, s\ (y) - \int_{\pm\infty}^{x} dy\, \Delta(y) \int_{\pm\infty}^{y} dz\, \Delta(z)\}, \qquad /0.6/$$

$$s(x) = v_1(x) + v_2(x),\ \ \Delta(x) = v_1(x) - v_2(x).$$

В §1 настоящей работы, по аналогии с [3], получены формулы разложения по решениям $F^{\pm}(x,k)$. На их основе в §2 построены резольвенты операторов $\Lambda_{\pm} - \lambda I$ и спектральные разложения для рациональных функций от $\Lambda_{\pm}$.

Отметим, что в терминах операторных функций от $\Lambda_{\pm}$ /при условии $v_1 = v_2$ /, как было показано в известной работе [4], можно найти общий вид нелинейных эволюционных уравнений /в частности, уравнения КдФ: $v_t - 6vv_x + v_{xxx} = 0$ /, решаемых методом обратной задачи рассеяния для /0.1/. Операторы $\Lambda_{\pm}$ играют важную роль в теории [2,5] обобщенных преобразований

Беклунда для этих уравнений. В качестве приложения результатов §§1,2 в §3 получены некоторые основные утверждения из [2,5], причем в необходимой и достаточной форме.

Наряду с неравенствами /0.2/, всюду в дальнейшем, не оговаривая этого особо, будем предполагать для характеристических функций

$$a_n(k)=(2ik)^{-1}W(f_n^-(x,k),\ f_n^+(x,k))\equiv f_n^- f_{n,x}^+ - f_{n,x}^- f_n^+ \qquad /0.7/$$

уравнений /0.1/ выполненным условие:

$$\lim_{k\to 0}(k a_1(k)\ a_2(k))^{-1}=\alpha<\infty,$$

что несколько упрощает формулировки и доказательства. Случай, когда $\alpha_0=\infty$, можно рассматривать, как и в [3].

## §1. ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ

Введем основную в наших построениях функцию

$$R_-(x,y,k)=\alpha^{-1}(k)\{F^-(x,k)F^+(y,k)\theta(y-x)+$$
$$+[\sum_{n=1,2} f_n^+(x,k)f_{3-n}^-(x,k)f_n^-(y,k)f_{3-n}^+(y,k)-F^+(x,k)F^-(y,k)]\theta(x-y)\}, \qquad /1.1/$$

где $\theta(x)=1$ при $x>0$, $\theta(x)=0$ при $x<0$,

$$\alpha(k)=k a_1(k)a_2(k). \qquad /1.2/$$

Из имеющихся в [6] аналитических и асимптотических свойств решений $f^\pm(x,k)$ и функции $a(k)$ /которыми в дальнейшем пользуемся без ссылок/ нетрудно получить, что функция $R_-$ обладает следующими свойствами:

1. При любых $x$ и $y$ $R_-(x,y,k)$, $\partial R_-(x_1,x_2,k)/\partial x_\ell$, $\ell=1,2$ являются аналитическими функциями от $k$ при $\operatorname{Im} k>0$, непрерывными при $k\in R$, и имеют полюсы не более второго порядка в точках

$$k_{n,j}\in\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2,\ \sigma_n=\{k_{n,j}=i\kappa_{n,j},\kappa_{n,j}>0\,|\,a_n(k_{n,j})=0\}_{j=1}^{N_n}. \qquad /1.3/$$

2. При $\operatorname{Im} k\geq 0$ справедлива оценка

$$|R_-(x,y,k)|<K|\alpha(k)|^{-1}\{\theta(x-y)+\exp(-2\operatorname{Im} k|x-y|)\}, \qquad /1.4/$$



где здесь и в дальнейшем $K>0$ - постоянная, зависящая лишь от значений интегралов /0.2/; при этом равномерно по $-\infty<x,y<\infty$ при $|k|\to\infty$, $\operatorname{Im} k\geq 0$

$$R_-(x,y,k)=[2k^{-1}+O(k^{-3})]\theta(x-y)+O(k^{-1}\exp(-2\operatorname{Im} k|x-y|)),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell}R_-(x_1,x_2,k)=2i(-1)^\ell\{e^{-2ik(x_1-x_2)}\theta(x_2-x_1)+\{e^{2ik(x_1-x_2)}$$

$$+\frac{(-1)^\ell}{2ik}H(x_\ell)+O(\frac{1}{k^2})\}\theta(x_1-x_2)+O(\frac{1}{k}e^{-2\operatorname{Im} k|x_1-x_2|})\},\quad \ell=1,2,$$

где

$$H(x)=H_+(x)+H_-(x),\quad H_\pm(x)=\int_{\pm\infty}^{x}s(t)e^{\pm 2ik(t-x)}\,dt.$$

3. Если $s_n(x,k)$ и $c_n(x,k)$ - решения /0.1/, для которых $s_n(0,k)=0$, $s_{n,x}(0,k)=1$; $c_n(0,k)=1$, $c_{n,x}(0,k)=0$, то при $x\geq y$

$$R_-(x,y,k)=$$
$$=4k\prod_{n=1,2}\{s_n(x,k)c_n(y,k)-c_n(x,k)s_n(y,k)\}+\alpha^{-1}(k)F^-(x,k)F^+(y,k), \qquad /1.5/$$

где первое слагаемое - целая нечетная функция от $k$.

Теорема 1.1. Пусть по уравнениям /0.1/ построены системы функций $\{F^+\}$ и $\{F^-\}$:

$$F^\pm(x,k),\ k\in R\cup\sigma;\ \dot F_j^\pm(x)=\frac{\partial}{\partial k}F^\pm(x,k)|_{k=k_j},\ k_j\in\sigma'=\sigma_1\cap\sigma_2. \qquad /1.6/$$

Тогда:

А. Всякая функция $f(x)\in L_1$ восстанавливается по коэффициентам разложения

$$(f,F^+(k))=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)F^+(x,k)dx,\ k\in R\cup\sigma;\ (f,\dot F_j^+)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\dot F_j^+(x)dx \qquad /1.7/$$

формулой

$$\int_{-\infty}^{x}f(y)dy=\lim_{R\to\infty}\frac{-1}{2\pi i}\int_{-R}^{R}F^-(x,k)(f,F^+(k))\frac{dk}{\alpha(k)}+\Sigma''\dot\alpha_{n,j}^{-1}F_{n,j}^-(x)(f,F_{n,j}^+) \qquad /1.8/$$

$$+\Sigma' 2\ddot\alpha_j^{-1}\{\dot F_j^-(x)(f,F_j^+)+F_j^-(x)[(f,\dot F_j^+)-\dddot\alpha_j(3\ddot\alpha_j)^{-1}(f,F_j^+)]\},$$

где $\dot{a}_{n,j} = \dot{a}(k_{n,j})$, $F^-_{n,j}(x) = F^-(x,k_{n,j})$ и т.д.; суммирование в $\Sigma''$ ведется по всем $k_{n,j} \in \sigma'' = \sigma \setminus \sigma'$, в $\Sigma'$ – по $k_j \in \sigma'$. Интегралы в /1.7/ сходятся абсолютно, а сходимость в /1.8/ равномерна по $-\infty < x < \infty$, при этом, если $f \in L_1 \cap L_2$, предел является абсолютно сходящимся интегралом.

Б. Если $f_1(R,x)$ – выражение, полученное почленным дифференцированием по $x$ в правой части /1.8/ при $R < \infty$, т.е.

$$f_1(R,x) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} F^-_x(x,k)(f,F^+(k))\frac{dk}{a(k)} + \ldots \qquad /1.9/$$

и

$$f_2(R,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} F^-(x,k)[f,F^+(k)]\frac{dk}{a(k)} + \ldots, \qquad /1.10/$$

где $[f,F^+(k)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)F^+_x(x,k)\,dx$ и т.д., то имеют место формулы равносходимости:

$$\lim_{R\to\infty} \sup_x \left| \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{2ik(y-x)}dy\right\}dk - f_\ell(R,x)\right| = 0, \quad \ell = 1,2. \qquad /1.11/$$

Доказательство. Пусть $\gamma_R$ – контур в $k$-плоскости, состоящий из отрезка $[-R,R]$ и полуокружности $k = R\exp(i\phi)$, $0 \le \phi \le \pi$, $R > \max \kappa_{n,j}$, $\gamma_R$ обходится против часовой стрелки. Принимая во внимание перечисленные в начале свойства функции $R_-$ /1.1/, формулу разложения /1.8/ получаем, сравнив значение интеграла

$$I_R(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} R_-(x,y,k)f(y)\,dy\right\}dk, \qquad /1.12/$$

найденного с помощью равенств

$$f^+_n(x,k_{n,j}) = b_{n,j} f^-_n(x,k_{n,j}), \quad k_{n,j} \in \sigma, \qquad /1.13/$$

по теореме о вычетах со значением $I_R(x)$, непосредственно подсчитанным по контуру $\gamma_R$ при $R \to \infty$. Точно так же, заменяя в /1.12/ $R_-$ на $\partial R_-(x,y,k)/\partial x$ и $\partial R_-(x,y,k)/\partial y$, получаем утверждение Б. Подробности этих выкладок, которые вполне аналогичны изложенным в [3], здесь опускаем. Теорема доказана.

Теорема 1.1'. В обозначениях теоремы 1.1 для любой $f \in L_1$ справедливо разложение

$$-\int_x^{\infty} f(y)\,dy = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} F^+(x,k)(f,F^-(k))\frac{dk}{a(k)} - \Sigma''\,\dot{a}^{-1}_{n,j}F^+_{n,j}(x)(f,F^-_{n,j}) -$$

$$-\Sigma'\,2\ddot{a}^{-1}_j\{\dot{F}^+_j(x)(f,F^-_j) + F^+_j(x)[(f,\dot{F}^-_j) - \dddot{a}_j(3\ddot{a}_j)^{-1}(f,F^-_j)]\} \qquad /1.14/$$

и аналогичные /1.9/-/1.11/ формулы равносходимости.

Доказательство получаем, как и выше с помощью функции $R_+(x,y,k) = -R_-(x,y,k)$.

## §2. ОПЕРАТОРЫ $(\Lambda_\pm - \lambda I)^{-1}$

Обозначим, как обычно, через $\mathcal{G}$ пространство Шварца быстро убывающих функций, и пусть

$$\mathcal{G}^\pm = \{f(x) \mid \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,\ Df \in \mathcal{G}\}. \qquad /2.1/$$

Введем, наряду с $\Lambda_\pm$ /0.6/, и операторы

$$\Lambda^*_\pm = \frac{1}{4}\left\{-D^2 + 2s(x) + s_x(x)\int_{\mp\infty}^{x} dy - \Delta(x)\int_{\mp\infty}^{x} dy\,\Delta(y)\int_{\mp\infty}^{y} dz\right\}, \qquad /2.2/$$

$$\bar{\Lambda}_\pm = D\Lambda_\pm = \frac{1}{4}\left\{-D^3 + s_x(x) + 2s(x)D - \Delta(x)\int_{\pm\infty}^{x} dy\,\Delta(y)\right\}, \qquad /2.3/$$

где здесь и в дальнейшем $v_n(x) \in \mathcal{G}$. В этом параграфе мы изучаем, в основном, операторы $\Lambda_\pm$, $\Lambda^*_\pm$ и $\bar{\Lambda}_\pm$, как определенные на $\mathcal{G}$ либо $\mathcal{G}^\pm$. В такой постановке задача естественно возникает в теории эволюционных уравнений, решаемых методом обратной задачи. Сформулированные ниже основные утверждения, как явствует из приведенных доказательств, остаются справедливыми при гораздо менее ограничительных условиях на $v_n(x)$ и областях определения $\Lambda_\pm$ и т.д., уточнение которых опускаем, желая сохранить разумный объем изложения. Очевидно,

$$\Lambda^*_\mp f,\ \bar{\Lambda}_\pm f \in \mathcal{G},\ \Lambda_\pm f \in \mathcal{G}^\pm \qquad \forall f \in \mathcal{G}^\pm. \qquad /2.4/$$

Непосредственно проверяется следующая

Лемма 2.1. Операторы $\Lambda^*_\pm$ сопряжены к операторам $\Lambda_\pm$ относительно скалярного произведения

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx, \qquad /2.5/$$

т.е.

$$(f,\Lambda_\pm g) = (\Lambda^*_\pm f, g), \qquad \forall f,g \in \mathcal{G}, \qquad /2.6/$$

а оператор $\Lambda_+$ сопряжен к оператору $\Lambda_-$ относительно кососкалярного произведения

$$[f,g]=(f,Dg)=-[g,f],\qquad /2.7/$$

т.е.

$$[f,\Lambda_- g]=[\Lambda_+ f,g].\qquad /2.8/$$

При этом

$$D\Lambda_\pm^n f=(\Lambda_\mp^*)^n Df,\quad f\in\mathcal{G}^\pm,\quad n=1,2,\dots\qquad /2.9/$$

Из уравнений /0.5/ и

$$\tilde\Lambda_+ F^+(x,k)=k^2DF^+(x,k),\quad \tilde\Lambda_- F^-(x,k)=k^2DF^-(x,k)\qquad /2.10/$$

получаем, в силу /2.6/ и /2.9/,

<u>Следствие</u>. При $k\in R$ и $n=1,2,\dots$ имеем для всякой $f\in\mathcal{G}$

$$k^{2n}(f,F^\pm(k))=(\Lambda_\pm^{*n}f,F^\pm(k)),\ k^{2n}[f,F^\pm(k)]=-[F^\pm(k),\Lambda_\mp^n f].\qquad /2.11/$$

<u>Теорема 2.1</u>. Интегральный оператор

$$\tilde R_-(\lambda)f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde R_-(x,y,\lambda)f(y)dy,\quad f\in L_1,\qquad /2.12/$$

где $\tilde R_-$ выражается посредством $R_-$ /1.1/ формулой

$$\tilde R_-(x,y,\lambda)=-(2\sqrt\lambda)^{-1}R_-(x,y,k),\qquad (k=\sqrt\lambda,\ \ \mathrm{Im}\,k>0),\qquad /2.13/$$

определяет при

$$\lambda\in\rho(\Lambda_-)=\mathbf{C}\setminus(R^+\cup\{\lambda_{n,j}=k^2_{n,j}\}_{j=1}^{N_n}),\quad (k_{n,j}\in\sigma)\qquad /2.14/$$

резольвенту операторного пучка $\tilde\Lambda_- -\lambda D$, т.е.

$$(\tilde\Lambda_- -\lambda D)\tilde R_-(\lambda)f=\tilde R_-(\lambda)(\tilde\Lambda_- -\lambda D)f=f,\quad \forall f\in\mathcal{G}.\qquad /2.15/$$

При этом $R(\lambda)f(x)\to 0$ при $x\to-\infty$ и

$$\|D\tilde R_-(\lambda)f\|_{L_1}\le K\frac{1+|k|}{|ka(k)|}\max\Big(\frac{1}{\mathrm{Im}\,k},\frac{1}{(\mathrm{Im}\,k)^2}\Big)\|f\|_{L_1},\ \forall f\in L_1.\qquad /2.16/$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся две вспомогательные леммы.



<u>Лемма 2.2</u>. В обозначениях теоремы 1.1 при каждом $z\,(z^2=\lambda)$, для которого $\mathrm{Im}\,z>0$, $z\neq k_{n,j}\in\sigma$, функция

$$\tilde R_-(x,y,z^2)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F^-(x,k)F^+(y,k)}{(k^2-z^2)a(k)}dk+\Sigma''\frac{F^-_{n,j}(x)F^+_{n,j}(y)}{\dot a_{n,j}(k^2_{n,j}-z^2)}$$

$$+\Sigma'\frac{2}{\ddot a_j}\Big\{\frac{\partial}{\partial k}\frac{F^-(x,k)}{k^2-z^2}\Big|_{k=k_j}F_j^+(y)+\frac{F_j^-(x)}{k_j^2-z^2}\Big\{\dot F_j^+(y)-\frac{\dddot\sigma_j}{3\ddot a_j}F_j^+(y)\Big\}\Big\}.\qquad /2.17/$$

<u>Доказательство</u> получаем подсчитав, как и в доказательстве теоремы 1.1, интеграл $(-2\pi i)^{-1}\int_{\gamma_R}R_-(x,y,k)(k^2-z^2)^{-1}dk$. Лемма доказана.

<u>Лемма 2.3</u>. При $\mathrm{Im}\,k=\kappa>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\frac{d}{dx}f_1^+(x,k)f_2^-(x,k)\Big|dx\le K\max\Big(\frac{1}{\kappa},\frac{1}{\kappa^2}\Big).\qquad /2.18/$$

<u>Доказательство</u>. Напомним [6], что для решений $f^\pm(x,k)$ справедливы представления

$$f^\pm(x,k)=e^{\pm ikx}\pm\int_x^{\pm\infty}A^\pm(x,t)e^{\pm ikt}dt,\ A^\pm(x,x)=\frac{\pm1}{2}\int_x^{\pm\infty}v(t)dt,\qquad /2.19/$$

где

$$|A^\pm(x,t)|\le K\xi^\pm\Big(\frac{x+t}{2}\Big),\qquad \xi^\pm(x)=\pm\int_x^{\pm\infty}|v(t)|dt,\qquad /2.20/$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x_\ell}A^\pm(x_1,x_2)\Big|\le\frac14\Big|v\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big)\Big|+K\xi^\pm(x_1)\xi^\pm\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big),\quad \ell=1,2.\qquad /2.21/$$

С помощью известных интегральных уравнений для $A^\pm(x,t)$ [6] нетрудно получить и оценку

$$|A^\pm_x(x,t)+A^\pm_t(x,t)|\le\frac12\Big|v\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\Big|+K\xi^\pm\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\int_x^{(x+t)/2}|v(s)|ds.\qquad /2.22/$$

Из /2.19/ имеем

$$\frac{d}{dx}f_1^+(x,k)f_2^-(x,k)=\int_x^{\infty}(A^+_{1,x}(x,t)+A^+_{1,t}(x,t))e^{ik(t-x)}dt+$$

$$+\frac12\int_{-\infty}^{x}v(t)dt\int_x^{\infty}A_1^+(x,t)e^{ik(t-x)}dt+\int_{-\infty}^{x}A_2^-(x,t)e^{-ikt}dt\int_x^{\infty}A^+_{1,x}(x,t)e^{ikt}dt$$

$$+\{\dots\}=I_1+I_2+I_3+\{\dots\},$$

где через $\{\dots\}$ обозначены слагаемые, получающиеся из выписанных заменой 1 на 2 и + на −. Отсюда, вследствие оценок /2.20/-/2.22/ и равенства

$$\int_x^{\infty}\Big(\int_x^{(x+t)/2}|v(s)|ds\Big)e^{-\kappa(t-x)}dt=\frac{1}{\kappa}\int_x^{\infty}|v(t)|\,e^{-2\kappa(t-x)}dt$$

получаем, что

$$|I_1(x,k)|\le K\max(1,\kappa^{-1})M_1^+(x,\kappa),\quad |I_2(x,k)|\le K\,\xi_2^-(x)N_1^+(x,\kappa),$$

$$|I_3(x,k)|\le KN_2^-(x,\kappa)(M_1^+(x,\kappa)+N_1^+(x,\kappa)),$$

где

$$M_n^{\pm}(x,\kappa)=\pm\int_x^{\pm\infty}|v_n(t)|e^{-2\kappa|t-x|}dt,\quad N_n^{\pm}(x,\kappa)=\pm\int_x^{\pm\infty}\xi_n^{\pm}(t)e^{-2\kappa|t-x|}dt. \qquad /2.23/$$

Теперь для того, чтобы получить /2.18/, достаточно воспользоваться следующими, легко проверяемыми соотношениями:

$$M_n^{\pm}(x,\kappa)\to 0\quad(|x|\to\infty),\quad \|M_n^{\pm}\|_{L_1}=(2\kappa)^{-1}\|v_n\|_{L_1},$$

/2.24/

$$\|N_n^{\pm}\|_{L_1(0,\pm\infty)}\le\frac{\pm 1}{2\kappa}\int_0^{\pm\infty}|xv_n(x)|dx,\quad \sup_x N_n^{\pm}(x,\kappa)\le\frac{1}{2\kappa}\|v_n\|_{L_1}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Равенства /2.15/, вследствие /2.17/, вытекают из формул разложения /1.9/-/1.11/, уравнений /0.5/, /2.10/ и равенства /2.8/. Из /1.4/ и /2.24/ (с $v_n=f\in L_1$) следует, что $\tilde R_-(\lambda)f(x)\to 0$ при $x\to-\infty$. Далее, так как из /1.5/ имеем

$$D\tilde R_-(\lambda)f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\tilde R_-(x,y,\lambda)f(y)dy,$$

то в силу оценок

$$|f_n^{\pm}(x,k)|\le K\exp(\mp\kappa x),\quad |f_{n,x}^{\pm}(x,k)|\le K(1+|k|)\exp(\mp\kappa x) \qquad /2.25/$$

получаем

$$|D\tilde R_-(\lambda)f(x)|\le\frac{K(1+|k|)}{|k\,a(k)|}\Big\{\int_x^{\infty}|f(t)|e^{-2\kappa(t-x)}dt+\int_{-\infty}^{x}|f(t)|e^{2\kappa(t-x)}dt+\sum_{n=1,2}\Big|\frac{d}{dx}f_n^+(x,k)f_{3-n}^-(x,k)\Big|\int_{-\infty}^{x}|f(t)|dt\Big\},$$

что вместе с /2.18/ и /2.24/ дает /2.16/. Теорема доказана. Из этой теоремы и леммы 2.1 /см. также теорему 1.1'/ имеем



Следствие 1. При $\lambda\in\rho(\Lambda_-)$ /2.14/ оператор

$$(\tilde\Lambda_+-\lambda D)^{-1}=\tilde R_+(\lambda),\quad \tilde R_+(\lambda)f(x)=-\int_{-\infty}^{\infty}\tilde R_-(y,x,\lambda)f(y)\,dy, \qquad /2.26/$$

при этом

$$(\Lambda_{\pm}-\lambda I)^{-1}=\tilde R_{\pm}(\lambda)D\overset{def.}{=}R_{\pm}(\lambda), \qquad /2.27/$$

$$(\Lambda^*_{\mp}-\lambda I)^{-1}=D\tilde R_{\pm}(\lambda)\overset{def.}{=}R^*_{\mp}(\lambda). \qquad /2.28/$$

Далее, замечая, что из /2.15/ и /2.16/ вытекает /см., например,[7]/ тождество Гильберта

$$\tilde R_-(\lambda)-\tilde R_-(\mu)=(\lambda-\mu)\tilde R_-(\lambda)D\tilde R_-(\mu)\qquad \lambda,\mu\in\rho(\Lambda_-),$$

получаем стандартным образом

Следствие 2. Оператор $\tilde R_-(\lambda)$ является аналитической функцией от $\lambda\in\rho(\Lambda_-)$, для которой

$$d^n\tilde R_-(\lambda)/d\lambda^n=n!\,\tilde R_-(\lambda)(D\tilde R_-(\lambda))^n\qquad n=1,2,\dots, \qquad /2.29/$$

причем отсюда, в силу /2.27/, /2.28/,

$$d^nR_{\pm}(\lambda)/d\lambda^n=n!\,R_{\pm}^{n+1}(\lambda),\quad d^nR^*_{\pm}(\lambda)/d\lambda^n=n!\,(R^*_{\pm}(\lambda))^{n+1}. \qquad /2.30/$$

Имеет место также следующее

Следствие 3. Функция

$$\tilde R_-(\lambda)f\in\mathcal{G}^-\quad\forall f\in\mathcal{G},\quad\lambda\in\rho(\Lambda_-). \qquad /2.31/$$

Доказательство. С помощью изложенной выше схемы доказательства оценки /2.16/ и вытекающего из /1.5/, /2.13/ равенства

$$D^2\tilde R_-(\lambda)f(x)=-4f(x)+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}R_-(x,y,\lambda)f(y)\,dy$$

нетрудно вывести, что

$$\sup_x|x|^p|D^{\ell}\tilde R_-(\lambda)f(x)|<\infty\qquad\forall f\in\mathcal{G},\ \ell=1,2;\ p=0,1,\dots\ .$$

Теперь, для того чтобы получить /2.31/, остается заметить, что из /2.3/ и /2.15/ имеем

$$D^3\tilde R_-(\lambda)f=\{s_x(x)+2s(x)D-\Delta(x)\int_{-\infty}^{x}dy\,\Delta(y)\}\tilde R_-(\lambda)f-4f.$$

Следствие доказано.

Наконец, отметим, что с учетом формулы разложения /1.8/ получаем

Следствие 4. Спектр операторного пучка $\tilde{\Lambda}_- - \lambda D$, который определяется как дополнение в $\lambda$-плоскости к резольвентному множеству $\rho(\Lambda_-)$ /2.14/, является двукратным и непрерывным при $\lambda \in R^+$, где собственные функции есть ограниченные решения $F^-(x, \pm k)$ уравнения $(\tilde{\Lambda}_- - k^2 D)F^-(x, \pm k) = 0$ и состоит из конечного числа простых собственных значений $\lambda_{n,j} = k^2_{n,j}$, $k_{n,j} \in \sigma''$, где собственные функции $F^-_{n,j}(x) \in \mathcal{G}^-$, и двукратных собственных значений $\lambda_j = k_j^2$, $k_j \in \sigma'$, где собственные функции $F_j^-(x) \in \mathcal{G}$ и присоединенные $\dot{F}_j^-(x) \in \mathcal{G}^-$.

Теорема 2.2. Рациональной функции

$$\Omega(\lambda) = P(\lambda) + \sum_{m,s} c_{m,s}(\lambda - \mu_m)^{-s}, \quad \mu_m \in \rho(\Lambda_-), \qquad /2.32/$$

где $P(\lambda)$ - полином, сумма имеет конечное число слагаемых, поставим в соответствие оператор

$$\Omega(\Lambda_-) = P(\Lambda_-) + \sum_{m,s} c_{m,s}(\Lambda_- - \mu_m I)^{-s}. \qquad /2.33/$$

Тогда для любой $f \in \mathcal{G}^-$ имеем представление

$$\Omega(\Lambda_-)f = \frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\Omega(k^2)F^-(x,k)[F^+(k), f]\frac{dk}{a(k)} + $$
$$+ \Sigma''\Omega(k^2_{n,j})F^-_{n,j}(x)\frac{[F^+_{n,j}, f]}{\dot{a}_{n,j}} + $$
$$+ \Sigma'\frac{2}{\ddot{a}_j}\{\frac{\partial}{\partial k}\Omega(k^2)F^-(x,k)|_{k=k_j}[F_j^+, f] + \qquad /2.34/$$
$$+ \Omega(k_j^2)F_j^-(x)\{[\dot{F}_j^+, f] - \frac{\dddot{a}_j}{3\ddot{a}_j}[F_j^+, f]\}\},$$

где обозначения те же, что и в теореме 1.1, при этом

$$D\Omega(\Lambda_-)f = P(\Lambda_+^*)Df + \sum_{m,s} c_{m,s}(\Lambda_+^* - \mu_m I)^{-s} Df \in \mathcal{G}, \qquad /2.35/$$

и для всякой $f \in \mathcal{G}$ справедливы равенства

$$(\Omega(\Lambda_+^*)f, F^+(k)) = \Omega(k^2)(f, F^+(k)), \quad k \in R \cup \sigma,$$
$$(\Omega(\Lambda_+^*)f, \dot{F}_j^+) = (f, \frac{\partial}{\partial k}\Omega(k^2)F^+(k)|_{k=k_j}), \quad k_j \in \sigma'. \qquad /2.36/$$

Доказательство. Так как из /2.11/, /2.25/ и $a(k) \neq 0$ при $k \in R$, $a(k) = k^{-1}(1 + o(1)))$, $|k| \to \infty$ следует, что подынтегральное выражение в /1.8/ является бесконечно дифференцируемой функцией от $x$, которая равномерно по $-\infty < x < \infty$ убывает при $|k| \to \infty$ быстрее $|k|^{-n}$, $n = 1,2,\ldots$, то, применяя оператор $\Lambda_-^s$ к обеим сторонам формулы разложения /1.8/, получаем /2.34/ для $\Omega(\Lambda_-) = \Lambda_-^s$. Дифференцируя $s-1$ раз /2.12/, с учетом /2.17/, /2.27/ и /2.30/, получаем /2.34/ для $\Omega(\Lambda_-) = (\Lambda_- - \mu I)^{-s}$. Соотношения /2.35/ для $\Omega(\Lambda_-) = P(\Lambda_-)$ очевидны вследствие /2.4/ и /2.9/, а в общем случае вытекают из /2.28/, /2.30/ и /2.31/. Равенства /2.36/ являются простым следствием /0.5/, /2.6/ и /2.28/. Теорема доказана.

## §3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Отнесем к уравнениям /0.1/, как в [6] данные рассеяния

$$S_n^+ = \{r_n^+(k) = b_n(k)\, a_n^{-1}(k),\ k \in R;\ k_{n,j},\ c^+_{n,j} = -ib_{n,j}\,\dot{a}^{-1}_{n,j},\ j = 1,\ldots,N_n\},$$

где $b_n(k) = (2ik)^{-1}W(f_n^+(x,k),\ f_n^-(x,-k))$, $a_n(k)$ определяется /0.7/, $b_{n,j}$ - /1.13/, $\dot{a}_{n,j} = \dot{a}(k_{n,j})$. Отметим, что /3.1/

$$a_n(-k) = \overline{a_n(k)},\quad b_n(-k) = \overline{b_n(k)},\quad |a_n(k)|^2 = 1 + |b_n(k)|^2. \qquad /3.2/$$

Теорема 3.1. Для функции

$$\Delta(x) = v_1(x) - v_2(x),\quad w(x) = s_x(x) - \Lambda(x)\int_{-\infty}^{x}\Lambda(y)\,dy \qquad /3.3/$$

справедливы разложения

$$\int_{-\infty}^{x}\Delta(y)\,dy = \frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^+(k)F^-(x,k)\,dk + 2\Sigma''(-1)^n c^+_{n,j}F^-_{n,j}(x) + \qquad /3.4/$$
$$+ 2\Sigma'\Delta_j^+F_j^-(x),$$

$$\int_{-\infty}^{x} w(y)\,dy = \frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k\,s^+(k)F^-(x,k) + 4i\Sigma''k_{n,j}c^+_{n,j}F^-_{n,j}(x) + \qquad /3.5/$$
$$+ 4i\Sigma'k_j s_j^+F_j^-(x),$$

где

$$\Delta^+(k) = r_1^+(k) - r_2^+(k),\quad s^+(k) = r_1^+(k) + r_2^+(k),$$
$$\Delta_j^+ = c^+_{2,j} - c^+_{1,j},\quad s_j^+ = c^+_{2,j} + c^+_{1,j}. \qquad /3.6/$$

Доказательство вытекает непосредственно из формулы разложения /1.8/, если воспользоваться следующей известной леммой.

Лемма 3.1./См., напр., [1,2] /. Коэффициенты разложения /1.7/ для функции $\Delta(x)$ и $w(x)$ /3.2/ выражаются посредством $S_n^+$ следующим образом:

$$\Delta^+(k) = (2i a(k))^{-1}(\Delta, F^+(k)), \; (-1)^n 2c_{n,j}^+ = \dot{a}^{-1}(\Delta, F_{n,j}^+),$$
$$(\Delta, F_j^+) = 0, \quad \Delta_j^+ = \ddot{a}_j^{-1}(\Delta, \dot{F}_j^+), \quad k_j \in \sigma'; \qquad /3.7/$$

$$-2ik\, s^+(k) = (2i a(k))^{-1}(w, F^+(k)), \quad 4ik_{n,j} c_{n,j}^+ = \dot{a}_{n,j}^{-1}(w, F_{n,j}^+),$$
$$(w, F_j^+) = 0, \quad 2ik_j s_j^+ = \ddot{a}_j^{-1}(w, \dot{F}_j^+), \quad k_j \in \sigma'. \qquad /3.8/$$

Из разложения /3.4/ получаем сразу следующее

Следствие 1 /теорема единственности в обратной задаче рассеяния/. Набор величин $S_n^+$ /3.1/ определяет однозначно потенциал $v_n(x)$ в уравнении /0.1/.

Далее из /3.3/, /3.4/ в силу теоремы 2.2 имеем

Следствие 2. Справедливо равенство

$$\Delta(x) + \Omega(\Lambda_+^*) w(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\Delta^+(k) - 2ik\,\Omega(k^2)\, s^+(k)\} F_x^-(x,k)\, dk +$$
$$+ \Sigma' \{(-1)^n + 2ik_{n,j}\Omega(k_{n,j}^2)\} c_{n,j}^+ F_{n,j,x}^-(x) + \qquad /3.9/$$
$$\Sigma' \{2\Delta_j^+ + 4ik_j \Omega(k_j^2) s_j^+\} F_{j,x}^-(x).$$

где $\Omega(\lambda)$ - рациональная функция /2.32/, оператор $\Omega(\Lambda_+^*)$ определяется заменой в /2.33/ $\Lambda_-$ на $\Lambda_+^*$ /2.2/.

Теорема 3.2. Для того чтобы потенциалы $v_n(x)$ в уравнениях /0.1/ удовлетворяли уравнению

$$\Delta(x) + \Omega(\Lambda_+^*) w(x) = 0 \qquad -\infty < x < \infty, \qquad /3.10/$$

необходимы и достаточны следующие условия:

$$\Delta^+(k) - 2ik\,\Omega(k^2) S^+(k) = 0, \quad \overline{\Omega(k^2)} = \Omega(k^2), \quad k \in R; \qquad /3.11/$$

$$(-1)^n + 2ik_{n,j}\Omega(k_{n,j}^2) = 0, \quad k_{n,j} \in \sigma'';$$
$$\Delta_j^+ + 2ik_j\,\Omega(k_j^2) s_j^+ = 0, \quad k_j \in \sigma', \qquad /3.12/$$

где обозначения те же, что в теореме 3.1 и следствии 2.

Доказательство достаточности очевидно в силу /3.9/. Отметим, что второе равенство в /3.11/ следует из первого в /3.2/.



Необходимость /см. также [1,2] / вытекает, вследствие /3.7/, /3.8/, из равенств /2.36/. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА


1. Calogero F. Studies in Mathematical Physics (Essays in Honour of V.Bargman), Princeton, N.Y., 1976.
2. Dodd R.K., Bullough. Phys.Lett., 1977, v.62A, N.2.
3. Христов Е.Х. ОИЯИ, Р5-11754, Дубна, 1978.
4. Ablowitz M.J. et al. Studies in Applied Mathematics, 1974, v.53, No.4.
5. Calogero F., Degasperis A. Nuovo Cimento, 1976, 32B. Calogero F.Lettere Nuovo Cimento, 1975, 14.
6. Фаддеев Л.Д. Современные проблемы математики. Изд-во ВИНИТИ, М., 1974, т.3.
7. Диткин В.В. Математические заметки, 1977, т.22, вып.6.


Рукопись поступила в издательский отдел
2 июня 1980 года.