сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P5-80-259

Е.П.Жидков, Нгуен Монг, Б.Н.Хоромский

УТОЧНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ И ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ $\pi\pi$-РАССЕЯНИЯ

1980

Система уравнений $\pi\pi$-рассеяния с одним вычитанием, рассмотренная в /1/, имеет вид

$$\mathcal{V}(x) = \rho(x)\left[\mathcal{V}^2(x) + u^2(x)\right], \tag{I}$$

где $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3)$ – искомая вектор-функция,

$$u(x) = \lambda + F\mathcal{V}(x) - a F_2 \mathcal{V}(1),$$

$$\rho(x) = (1-x)^{1/2}(1+x)^{-1/2}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Здесь под квадратом вектора понимается вектор, составленный из квадратов соответствующих компонент;

$$\lambda = (5, 0, 2)\lambda_0, \quad \lambda_0 = const, \quad a = (3, 1, 3);$$

$$F\mathcal{V}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathcal{V}(y)\,dy}{y-x} - B\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathcal{V}(y)\,dy}{y+x},$$

$$B = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 6 & -54 & 30 \\ -2 & 9 & 5 \\ 6 & 27 & 3 \end{pmatrix},$$

а $F_2\mathcal{V}(1)$ – вторая компонента вектора $F\mathcal{V}(x)$ при $x = 1$.

К настоящему времени не удалось получить точных решений этого уравнения, поэтому единственную возможность расчетов таких решений с высокой точностью дают численные методы. Кроме решений этой системы для различных λ_0, представляет интерес величина верхней границы константы связи λ_0^{max}, которая определяет область изменения параметра λ_0 $(0 \le \lambda_0 < \lambda_0^{max})$, в которой существует положительное решение $\mathcal{V}^*(x)$; $\mathcal{V}^*(x) \ge 0$, $0 \le x \le 1$. Величина λ_0^{max} является важной характеристикой физических моделей, описываемых уравнениями типа Чу-Лоу.

В настоящей работе строится численный алгоритм, использующий экстраполяцию на последовательности сеток и позволяющий получать приближенные решения уравнения (I) с повышенной точностью.

Далее предлагается метод численного определения величины λ_0^{max}. Он сводится к нахождению корня некоторой функции параметра λ, которая строится с помощью полученных приближенных решений. Значения этой функции в окрестности точки λ_0^{max} численно найти не удается, и они строятся при помощи экстраполяции с использованием найденных ранее значений.

§ I. Повышение точности

Функция $\rho(x)$ имеет особенность типа квадратного корня, поэтому, как следует из /I/, точность приближенных решений системы уравнений (I) имеет порядок $o(n^{-\frac{1}{2}})$. Аналогично уравнениям типа Чу-Лоу, рассматриваемые уравнения заменой переменных $x = \cos t$, $y = \cos\tau$ приведем к виду

$$v(t) = \rho(t)\left[v^2(t) + u^2(t)\right], \qquad (2)$$

где
$$\rho(t) = tg\frac{t}{2}, \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \equiv \Gamma,$$

$$u(t) = \lambda + F v(t) - a F_2 v(0),$$

$$Fv(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} v(\tau)\,d\tau\left[ctg\frac{\tau-t}{2} + ctg\frac{\tau-t}{2}\right] - B\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} v(\tau)\,d\tau\left[tg\frac{\tau-t}{2} + tg\frac{\tau+t}{2}\right],$$

$$F_2 v(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} v_2(\tau)\,ctg\frac{\tau}{2}\,d\tau - \sum_{\beta=1}^{3} b_{2\beta}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} v_\beta(\tau)\,tg\frac{\tau}{2}\,d\tau,$$

$b_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ – элементы матрицы B.

Представим теперь оператор $Fv(t)$ в виде

$$Fv(t) = K_1 v(t) - BK_2 v(t) + (E - B)\,\ell(t)\,v(t),$$

где E – единичная матрица порядка 3,

$$\ell(t) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\cos t}{1+\sin t}, \qquad t \in \Gamma,$$

$$K_1 v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} [v(\tau) - v(t)] \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} [v(\tau) + v(t)] \operatorname{ctg} \frac{\tau + t}{2} d\tau,$$

$$K_2 v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} [v(\tau) - v(t)] \operatorname{tg} \frac{\tau - t}{2} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} [v(\tau) + v(t)] \operatorname{tg} \frac{\tau + t}{2} d\tau.$$

Для приближенного решения уравнения (2) рассмотрим разностную задачу

$$v_n(t_j) = b_j [v_n^2(t_j) + u_n^2(t_j)], \tag{3}$$

где $v_n(t_j)$ – сеточная функция на сетке Ω_n.
Здесь

$$\Omega_n = \{ t_j = jh; \quad j = 0, 1, \ldots, n; \quad h = \frac{\pi}{2n} \},$$

$$u_n(t_j) = \lambda + F_n v_n(t_j) - a F_{n,2} v_n(0) + (E - B) \ell(t_j) v_n(t_j),$$

$$F_n v_n(t_j) = B_n^1 v_n(t_j) - B B_n^2 v_n(t_j); \quad t_j \in \Omega, \ j \neq 0, n,$$

$$B_n^1 v_n(t_j) = \frac{h}{2\pi} \Big\{ v_n(t_j)(a_j + \tfrac{1}{2} a_{n+j} - \tfrac{1}{2} a_{n-j}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} [v_n(t_k) - v_n(t_j)] a_{k-j} + \sum_{k=1}^{n-1} [v_n(t_k) + v_n(t_j)] a_{k+j} \Big\};$$

(4)

$$B_n^2 v_n(t_j) = \frac{h}{2\pi}\Big\{ v_n(t_j)\left(b_j + \frac{1}{2} b_{n+j} - \frac{1}{2} b_{n-j}\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \left[v_n(t_k) - v_n(t_j)\right] b_{k-j} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[v_n(t_k) + v_n(t_j)\right] b_{k+j} \Big\}; \tag{5}$$

$$a_i = \operatorname{ctg} \frac{i}{2} h \;, \quad b_i = a_i^{-1} = \operatorname{tg} \frac{h}{2} i \;, \qquad i = \pm 1, \ldots, \pm (2n-1) .$$

Следует отметить, что правые части выражений (4) и (5) есть квадратурные формулы типа трапеций, заменяющие интегралы $K_1 v(t)$ и $K_2 v(t)$ соответственно. Для вычисления функционала $F_2 v(0)$ также применяем формулу трапеций, в результате получим

$$F_{n,2} v_n(0) = \frac{h}{\pi} \Big\{ \sum_{k=1}^{n-1} v_{n2}(t_k) a_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_k v_{n\beta}(t_k) \sum_{\beta=1}^{3} b_{2\beta} \Big\} .$$

Пусть $v^*(t)$ - решение системы (2), а $v_n^*(t_j)$ - решение разностной задачи (3). Тогда, согласно /1/, имеет место оценка

$$\| v^*(t_j) - v_n^*(t_j) \|_{C, \Omega_n} \le M h^2 \;, \quad M = const.$$

Такой порядок точности следует из разложения остатка квадратурных формул трапеций:

$$\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt = \frac{h}{2}\left[f(t_0) + f(t_n)\right] + h \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k) + \sum_{k=1}^{m-1} C_k h^{2k} + \rho_{2m}(f) , \tag{6}$$

где $\rho_{2m}(f)$ $(f(t) \in C^{2m}[0, \frac{\pi}{2}]$ имеет порядок $O(h^{2m+1})$; C_k - определенные константы.

Для дальнейшего потребуется рассмотрение следующего линейного интегрального уравнения

$$\varphi(t) + 2\rho(t)\left[v^* \varphi(t) + (\lambda + F v^* - a F_2 v^*(0)) \times \right.$$

$$\left. \times (F\varphi(t) - a F_2 \varphi(0))\right] + y(t) = 0 \tag{7}$$

$$t \in [0, \pi/2] ,$$

для произвольной функции $y(t) \in H_{3,0}^{2m+\nu-1}$. Напомним, что через

$H^{\ell+\nu}_{N,0}(\Gamma)$ обозначается пространство вектор-функций $v(t)=(v_1,\dots,v_N)$, имеющих непрерывную по Гельдеру с показателем ν $(0<\nu\le 1)$ производную ℓ-ого порядка.

При тех же условиях, что и в теореме I из /I/, можно показать, что уравнение (7) для любой функции $y(t)\in H^{2m+\nu-1}_{3,0}(\Gamma)$, $m\geq 2$ однозначно разрешимо, а его решение $\varphi^*(t)$ принадлежит также пространству $H^{2m+\nu-1}_{3,0}(\Gamma)$.

Для краткости вместо $t_j\in\Omega_n$, $j=1,2,\dots,n-1$ будем писать просто $t\in\Omega_n$. Пусть F_n - оператор простого сноса, A - оператор, определенный правой частью уравнения (2), а A_n - оператор правой части разностной задачи (3).

Рассмотрим следующие сеточные функции:

$$\rho_n(v^*) = P_n F v^*(t) - F_n P_n v^*(t)$$
$$\gamma_n(v^*) = P_n A v^*(t) - A_n P_n v^*(t)\ , \quad t\in\Omega_n\ ,$$

$v^*(t)$ - решение уравнения (2).

Теперь, используя разложение Эйлера-Маклорена (6), можно доказать следующую лемму.

Лемма I. Существуют такие не зависящие от h функции

$$a_k(t)\in H^{2m-k+1+\nu}_{3,0}(\Gamma)\ ,\quad m\geq 2,$$

что

$$\gamma_n(v^*) = \sum_{k=2}^{2m-1} a_k(t)h^k + \eta_n\ ,\quad t\in\Omega_n\ .$$

Здесь величина η_n имеет порядок $O(h^{2m})$.

Доказательство этой леммы получается простой подстановкой формулы Эйлера-Маклорена в выражение для $\rho_n(v^*)$, а также из следующего представления:

$$\gamma_n(v^*) = 2\rho(\lambda + P_n F v^*)\rho_n(v^*) - \rho\rho_n^2(v^*)\ ,\quad t\in\Omega_n$$

если учесть, что сеточная функция $\rho_n(v^*)$ разлагается в сумму степеней h с помощью квадратурной формулы трапеций.

Аналогично случаю уравнения типа Чу-Лоу доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. Существуют функции $\varphi_k(t) \in H^{2m-k+1+\nu}_{3,0}(\Gamma)$, не зависящие от h, и такие, что справедливо разложение

$$v_n^*(t) = P_n v^*(t) + \sum_{k=2}^{2m-2} \varphi_k(t) h^k + w_n, \quad t \in \Omega_n, \qquad (8)$$

где $\| w_n \|_{e,\Omega_n} = o(h^{2m})$, а $\varphi_k(t)$ – определяются из уравнения (7) известным из /2/ способом.

Теорема 2. При выполнении условий Леммы I итерационный процесс

$$v_{2n}^{(k+1)}(t) = \rho(t)\left\{\left[v_{2n}^{(k)}(t)\right]^2 + \chi_k\left[u_{2n}^{(k)}(t)\right]^2\right\}, \qquad (9)$$

$$k = 0, 1, \ldots; \qquad v_{2n}^{0}(t) = 0,$$

где

$$u_n^{(k)}(t) = \lambda + F_n v_n^{(k)}(t) - a F_{n,2} v_n^{(k)}(0),$$

$$\chi_k = \frac{4r_k - r_k^2}{4r_k - 1}, \qquad r_k = \frac{u_n^{(k)}}{u_{2n}^{(k)}}$$

сходится к сеточной функции $v_{2n}^*(t)$, для которой справедливо разложение

$$v_{2n}^*(t) = P_{2n} v^*(t) + w_{2n}, \quad t \in \Omega_{2n},$$

где w_{2n} имеет порядок $o(h^4)$.

Доказательство этих теорем ничем не отличается от доказательства аналогичных теорем из /2/, поэтому мы его не приводим.

Следует отметить, что ускорение сходимости (или повышение точности), основывающееся на разложении типа (8), подробно рассмотрено в /3/. В данном случае мы проводили расчеты на сетках Ω_{10}, Ω_{20}, Ω_{40}, Ω_{80}.

Решение, полученное на каждой сетке Ω_n, обозначено через $V(n)$. После того, как были получены решения $V(n)$ и $V(2n)$, на сетках Ω_n и Ω_{2n} соответственно вычислялась их комбинация $V(n, 2n)$ по формуле

$$V(n, 2n) = \frac{4}{3} V(2n) - \frac{1}{3} V(n).$$

В качестве начального приближения для решения на сетке Ω_{4n} бралось уточненное решение $V(n, 2n)$ на Ω_{2n}, после его интерполирования на Ω_{4n} . Затем с помощью решений $V(n)$, $V(2n)$, $V(4n)$ вычислялось экстраполированное решение

$$V(n,2n,4n)=\frac{1}{45}\left[64\,V(4n)-20\,V(2n)+V(n)\right].$$

Эти решения $V(n)$, $V(n,2n)$, $V(n,2n,4n)$ (n =I0,20,40,80) приводятся в таблице I для двух различных значений константы связи.

Для контроля за правильностью вычислений рассчитывалась ошибка

$$\Delta(n,2n)=\|V(n)-V(2n)\|_{C,\,\Omega_n}\ ,$$

которая в данном случае должна быть величиной порядка $O(h^2)$ ($h=\frac{\pi}{2n}$) . Эта ошибка помещена в таблице I и соответствует теоретической оценке.

§ 2. Численное определение верхней границы константы связи

Решение $v^*(x)$ уравнения (I) обращается в нуль на концах отрезка [0,I]. Поэтому $\max\limits_{0\le x\le 1} v^*(x)$ достигается во внутренней точке отрезка [0,I] для каждой компоненты $v^*_\alpha(x)$ (α =I,2,3). Рассмотрим, например, компоненту $v^*_1(x)$. Обозначим точку, в которой достигается максимум $\max\limits_{0\le x\le 1} v^*_1(x)$ через x^* и предположим, не умаляя общности, что эта точка единственна. Рассмотрим случай, когда $\max\limits_{0\le x\le 1} v^*_1(x)\to\infty$, при $\lambda_0\to\lambda_0^{max}$, что, по-видимому, является следствием того, что при $\lambda_0\to\lambda_0^{max}$ некоторые полюса на втором листе римановой поверхности, аналитической в плоскости с разрезом [0,I] функции $u(z)+i\,v(z)$, движутся к точке $z=1$.

Из уравнения (I) легко следует, что

$$v^*(x)<\rho^{-1}(x)\ ,\quad 0\le x\le 1\ , \tag{I0}$$

поэтому $\lim x(\lambda_0)=1$ при $\lambda_0\to\lambda_0^{max}$. Поскольку правая часть уравнения (I) бесконечно дифференцируема по λ_0 , то нетрудно показать, что для всякого n при достаточно малых λ_0 , функция $x=x(\lambda_0)$ n раз дифференцируема по λ_0 . Это видно из равенства

$$\dot v^*_\lambda(x)=\rho(x)\left[2\dot v^*_\lambda v^*+2\dot u^*_\lambda u^*\right],\ \dot u^*_\lambda=1+F\dot v^*_\lambda-\alpha F_2\dot v^*_\lambda(1), \tag{II}$$

которое однозначно разрешимо относительно $\dot v^*_\lambda$ при малых по модулю $v^*(x)$ в силу теоремы о сжатом отображении. Нетрудно убедиться в разрешимости уравнений для производных по λ, более высокого порядка функции $v^*(x)$, так как они отличаются от (II) лишь свободным членом.

Как было показано в [4], условия однозначной разрешимости уравнения (II), а также уравнения (I) определяются частными и суммарным индексами производной Фреше оператора (I), определенной на точном решении $v^*(x,\lambda_o)$. Очевидно, что при малых λ_o (а следовательно, и $|v^*_\alpha(x)|$), упомянутые индексы равны нулю. Так как решение $v^*(x)$ непрерывно зависит от λ_o, а коэффициенты системы (II) непрерывно зависят от $v^*(x)$, то, используя известный результат об устойчивости частных и суммарного индексов краевой задачи Римана-Гильберта [5], приходим к выводу, что решение $v^*(x,\lambda_o)$ можно непрерывно продолжить по параметру λ_o до тех пор, пока $\|v^*(\lambda_o,x)\|_{C_N}\to\infty$ при $\lambda_o\to\lambda_o^{max}$. При этом уравнение (I4), так же как и уравнения для производных от $v^*(\lambda_o,x)$ более высокого порядка, будут однозначно разрешимы при всех $0\leqslant\lambda_o<\lambda_o^{max}$. Из всего сказанного следует, что число λ_o^{max} является корнем уравнения

$$f(\lambda)\equiv x(\lambda_o)-1=0.$$

Используя приближенные решения $v^*_n(\lambda_o,x)$, находим значение $x(\lambda_o)$ для тех λ_o, для которых удается численно получить решение $v^*_n(\lambda_o,x)$. Пусть значения функции $x(\lambda_o)$ известны в точках $\lambda^1_o,\ \ldots,\lambda^k_o$.

Строим интерполяционный полином $P_k(\lambda_o)$ степени $k-1$, проходящий через точки $x(\lambda^1_o),\ldots x(\lambda^k_o)$, и находим корень уравнения

$$P_k(\lambda)=1.$$

Точность описанного метода проверялась на модели уравнений типа Чу-Лоу, рассмотренной в [2], для которой известно точное значение $\lambda_o^{max}=2$. С помощью величин $\lambda^1_o=0,5$; $\lambda^2_o=1$; $\lambda^3_o=1,35$ и соответствующих им $x(\lambda^1_o), x(\lambda^2_o)$ и $x(\lambda^3_o)$ для λ_o^{max} получено значение I,9I, которое отличается от точного значения $\lambda_o^{max}=2$ на величину 0,09. Решения $v^*_n(\lambda_o,x)$ получены для $n=20$.

Для модели $\pi\pi$-рассеяния, описываемой уравнением (I), величина λ_o^{max} неизвестна. Применяя описанный метод, мы использовали величины x_1,x_2,x_3,x_4, полученные для решений $\sigma^*_n(\lambda_o,t)$, уточненных с помощью экстраполяции Ричардсона на трех сетках и имеющих точность $o(h^5)$. Получено следующее значение

$$\lambda_{o,n}^{max}=0.2245. \tag{I2}$$

Для сравнения напомним, что в книге/6/ приводится лишь оценка $\lambda_0^{max} \ll 0,4$. По аналогии с тестовым вариантом можно ожидать, что величина (I2) отличается от точного значения на $O(h^2)$. Отметим, что максимальное значение, для которого удалось численно решить систему (2), равно 0,2, и отличается от $\lambda_{0,n}^{max}$ (I2) на величину $O(h^2)$.

В заключение отметим, что все расчеты были проведены на ЭВМ CDC-6500 с помощью программ, составленных нами на языке ФОРТРАН. Все данные, приведенные в таблице I, были получены примерно за 5 минут машинного времени.

Таблица I.

Приближенные и экстраполированные решения уравнений $\pi\pi$-рассеяния

$H = \pi/20$	$\lambda_0 = .05$			
	$V_1(10)$	$V_1(20)$	$V_1(40)$	$V_1(80)$
I H	.006002577I	.006014I727	.006018931б	.0060209863
2-	.0II9627898	.0II9872987	.0II9973822	.0I200I7398
3-	.0I7828I498	.0I78684922	.0I78851425	.0I78923456
4-	.023523200I	.0235845842	.0236099924	.0236209906
5-	.0289296739	.02902I0553	.0290589495	.0290753404
6-	.033854394I	.0339879I48	.03404490I9	.0340694746
7-	.037989I366	.038I478468	.0382370244	.038275I927
8-	.0405868645	.04083I2349	.0409792070	.04I04400I3
9-	.0365495404	.0403474929	.0405682986	.0407I54675
	$\Delta(n,2n)$	.0037979525	.0002308057	.000I37I689

Продолжение табл.I.

$H = \pi/20$	$\lambda_0 = .05$				
	$V_1(10,20)$	$V_1(20,40)$	$V_1(40,80)$	$V_1(10,20,40)$	$V_1(20,40,80)$
I H	.006018O379	.006020517 9	.00602I67I2	.006I206832	.0[illegible]02I748I
2-	.0II9954683	.0I20007434	.0I2003I923	.0I2I0I0950	.0I20033556
3-	.0I788I9397	.0I78906926	.0I78947466	.0I789I276I	.0I78950I69
4-	.0236050456	.023бI846I8	.0236246567	.023бI93562	.0236250697
5-	.02905I5I58	.02907I5809	.0290808040	.029I729I86	.029081[illegible]I89
6-	.0340322550	.0340638976	.0340776655	.034I66007I	.0340785834
7-	.0382007502	.0382667503	.0382879I55	.03827II503	.0382893265
8-	.0409I269I7	.04I02853I0	.04I0655994	.04II362537	.04I0630706
9-	.04I6I3477I	.0406552338	.04076II905	.04059I35I0	.0407682542

Продолжение табл.I.

$H = \pi/20$	$\lambda_0 = 0,10$			
	$V_1(10)$	$V_1(20)$	$V_1(40)$	$V_1(80)$
I H	.0299252995	.0300600803	.0301097554	.0301237125
2-	.0587030491	.0589801466	.0590823836	.0591111131
3-	.0851826859	.0856182504	.0857791504	.0858243581
4-	.1082001221	.1088216957	.1090514576	.1091159492
5-	.1265504011	.1274001958	.1277152165	.1278033975
6-	.1389315602	.14[illegible]61037	.1404841480	.1406032792
7-	.1437450872	.1452017580	.14579[illegible]72	.1459598935
8-	.1375089450	.1404340193	.14129[illegible]789	.1415364467
9-	.1052558933	.1196313782	.1216587857	.1220857541
	$\Delta(n,2n)$	.0143754849	.0020264975	.0004278784

Продолжение табл.I.

$H = \pi/20$	$\lambda_0 = 0,10$				
	$V_1(10,20)$	$V_1(20,40)$	$V_1(40,80)$	$V_1(10,20,40)$	$V_1(20,40,80)$
I H	.0301050071	.0301263138	.0301283649	.0301277342	.0301285016
2-	.0590725124	.0591164626	.0591206896	.0591193926	.0591209714
3-	.0857634386	.0858327837	.0858394279	.0853374067	.0858398706
4-	.1090288869	.1091280449	.1091374464	.1091346554	.1091380732
5-	.1276834607	.1278202234	.1278327912	.1273293409	.1278336290
6-	.1404309515	.1406268294	.1406429896	.1405398880	.1406440669
7-	.1456873149	.1459943169	.1460144556	.1461447837	.1460158088
8-	.1414090441	.1415827654	.1416167360	.1415943469	.1416190007
9-	.1244232065	.1223333749	.1222283802	.1221940528	.1222213806

Литература

1. Жидков Е.П., Нгуен Монг, Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р5-12602, Дубна, 1979.
2. Жидков Е.П., Нгуен Монг, Хоромский Б.Н. ОИЯИ, Р5-12916, Дубна, 1979.

3. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решения разностных схем. М., "Наука", 1979.

4. Жидков Е.П., Нгуен Монг, Недялков И.П., Хоромский Б.Н. ЖВМ и МФ, 1979, 4, 998.

5. Векуа И.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М., "Наука", 1970.

6. Ширков Д.В. и др. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. М., "Наука", 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 апреля 1980 года.