9/VI-80

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-80-136

Е.П.Жидков, К.П.Кирчев

УСТОЙЧИВОСТЬ БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫХ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН

Направлено в ТМФ

1980

Джефрей и Какутани в [1] рассмотрели вопрос об устойчивости уединенной волны для уравнения Кортевега де Фриза в рамках линейного приближения. Бенжамин в [2] отмечает, что работа Джефрея и Какутани не дает удовлетворительного решения вопроса, так как нет гарантии, что из устойчивости в рамках линейного приближения вытекает устойчивость уединенной волны для полного нелинейного уравнения. В этой же статье Бенжамин, используя спектральную теорию, дает полное решение вопроса об устойчивости уединенной волны для уравнения Кортевега де Фриза. Используя идеи Бенжамина, Бона в [3] дает улучшенное доказательство этой же проблемы, в котором устранены некоторые неточности, допущенные Бенжамином. Отметим, что для применения метода Бенжамина достаточно наличия двух нелинейных функционалов, инвариантных относительно времени. Таким образом, можно исследовать и уравнения, не интегрируемые методом обратной задачи рассеяния.

Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости "формы" уединенных волн $\Phi(y)=\mathrm{th}(2^{-1/2}cy)$, где $0<c<\infty$, $y=x-c^{-2}\epsilon t$, для уравнения

$$u_{xt}=\epsilon(u-u^3), \quad \epsilon=\pm 1, \qquad /1/$$

и $\Psi(y)=\mathrm{cth}(cy)$, где $0<c<\infty$, $y=x+2c^2t$, для уравнения

$$u_t-6u^2u_x+u_{xxx}=0. \qquad /2/$$

При исследовании используется метод Бенжамина.

Определение устойчивости. Решение Φ /соответственно Ψ/ уравнения /1/ /соответственно /2// устойчиво относительно метрик d_1 и d_{11}, если для каждого $\epsilon>0$ существует такое δ, что из $[d_1(u,\Phi)]_{t=0}\le\delta$ ($[d_1(u,\Psi)]_{t=0}\le\delta$) следует $d_{11}(u,\Phi)\le\epsilon$, ($d_{11}(u,\Psi)\le\epsilon$), $\forall t\ge 0$. Здесь u - решение уравнения /1/ /соответственно /2//, удовлетворяющее некоторым естественным дополнительным требованиям.

§1. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ $\Phi(y)$ УРАВНЕНИЯ $u_{xt}=\epsilon(u-u^3)$, $\epsilon=\pm1$

1. Пусть $u=\Phi+h$ является решением /1/, удовлетворяющим следующим условиям:

/а/ $h(x,t)$ для любого $t \geq 0$ как функция от $x \in W_2^1(R)$ /пространство Соболева с нормой

$$\|h\|_1 = \{ \int_{-\infty}^{\infty} (h^2 + h'^2)\, dx \}^{1/2} / .$$

/б/ Соответствие $t \to h(\cdot, t)$ непрерывно отображает $[0, \infty)$ в $L_2(R)$.

/в/ $\lim u_x = 0$ при $x \to \pm\infty$.

/г/ $\lim u_t = 0$ при $x \to \pm\infty$.

Пусть τ – группа сдвигов на оси x, $\tau f(x) = f(x - \xi)$, $\zeta \in R$. Зафиксируем ζ и покажем, что из условия /а/ вытекает, что

$$\tau u(x,t) - \Phi \in W_2^1(R) . \qquad /3/$$

Действительно, $\tau u(x,t) - \Phi(y) = h(x - \zeta, t) + \Phi(y - \zeta) - \Phi(y)$, где $y = x - c^{-2}\epsilon t$. Из /а/ следует, что

$h(x - \zeta, t) \in W_2^1(R)$.

А для второго члена имеем

$$\Phi(y-\zeta) - \Phi(y) = - \frac{\operatorname{sh}(2^{-1/2}\, c\zeta)}{\operatorname{ch}(2^{-1/2}\, c(y-\zeta))\, \operatorname{ch}(2^{-1/2}\, cy)} \in W_2^1(R) .$$

В дальнейшем

$$d_I(u, \Phi) = \|u - \Phi\|_1 = \|h\|_1 = \{ \int_{-\infty}^{\infty} (h^2 + h'^2)\, dx \}^{1/2} .$$

Метрику d_{II} зададим формулой

$$d_{II}(u, \Phi) = \inf_{\tau} \|\tau u - \Phi\|_1 . \qquad /4/$$

Это имеет смысл в силу /3/. Отметим известный факт, что W_2^1 вкладывается непрерывно в C_0 /пространство непрерывных функций, исчезающих при $x \to \pm\infty$ /. При этом выполняется оценка

$$\sup_{x \in R} |f(x)| \leq 2^{-1/2} \|f\|_1 , \quad f \in W_2^1(R) . \qquad /5/$$

Мы покажем, что решение $\Phi(y)$ устойчиво относительно метрик d_I и d_{II}. В частности, как видно из /4/ и /5/, это означает, что малое начальное возмущение мало меняет форму $\Phi(y)$. Существенную роль в доказательстве устойчивости $\Phi(y)$ будут играть нелинейные функционалы

$$E(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2\, dx , \quad M(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 - 1)^2\, dx .$$

Условие /а/ гарантирует существование $E(u)$ и $M(u)$. Используя /1/ и условия /а/, /в/ и /г/, нетрудно показать, что $E(u)$ и $M(u)$ инвариантны относительно времени t.

Обозначим $[d_I(u, \Phi)]_{t=0} = \delta$ и получим оценки для $\Delta M = M(u) - M(\Phi)$ при дополнительном условии

$$\Delta E = E(u) - E(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} (2\Phi_x h_x + h_x^2)\, dx = 0 . \qquad /6/$$

В дальнейшем освободимся от этого ограничения. Интегрируя по частям и используя /6/, получим

$$\Delta M = \underbrace{\frac{2}{c^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (h_x^2 + c^2 (3\Phi^2 - 1) h^2)\, dx}_{\delta^2 M} + \underbrace{4 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi h^3 dx}_{\delta^3 M} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h^4 dx}_{\delta^4 M} . \qquad /7/$$

Так как $\Phi^2 \leq 1$, в силу /5/ имеем

$$\Delta M \leq 2m \|h\|_1^2 + 2\sqrt{2} \|h\|_1^3 + 2^{-1} \|h\|_1^4 , \qquad /8/$$

где $m = \max(c^{-2}, 3)$. Отсюда в силу инвариантности ΔM относительно t вытекает

$$\Delta M \leq 2m\delta^2 + 2\sqrt{2}\,\delta^3 + 2^{-1}\delta^4 = \gamma(\delta) = \gamma . \qquad /9/$$

Покажем, что существует такое конечное $a = a(t)$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x - a, t) - \Phi(x)|^2 = \inf_{\zeta \in R} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x - \zeta, t) - \Phi(x)|^2 dx = \Lambda . \qquad /10/$$

Обозначим

$S_\zeta(x) = u(x - \zeta, t) - \Phi(x)$, $\quad \theta(x) = \Phi(x) - \operatorname{sgn} x$,

$W_\zeta(x) = S_\zeta(x) + \theta(x)$.

Так как $S_\zeta(x) \in W_2^1(R)$ /согласно /3// и

$$\theta(x) = -2 \operatorname{sgn} x \cdot \exp[-|x| \frac{c}{\sqrt{2}}] / \operatorname{ch} \frac{xc}{\sqrt{2}} \in L_2(R),$$

то $W_\zeta(x) \in L_2(R)$.

Выберем последовательность $\{\zeta_n\}$ такую, что

$$\Lambda = \lim_n \int_{-\infty}^{\infty} |u(x - \zeta_n, t) - \Phi(x)|^2 dx = \lim_n \int_{-\infty}^{\infty} |W_{\zeta_n} - \theta|^2 dx .$$

Отсюда, так как $w_{\zeta_n} \in L_2(R)$, следует, что существует $w_0 \in L_2(R)$ и $\lim_n \int_{-\infty}^{\infty} |w_{\zeta_n} - w_0|^2 dx = 0$, $\quad \int_{-\infty}^{\infty} |w_0 - \theta|^2 dx = \Lambda$.

Допустим, что $\{\zeta_n\}$ не имеет конечных точек сгущения. Тогда существует подпоследовательность $\zeta_{n_k} \to +\infty$ /или $\zeta_{n_k} \to -\infty$ /, и так как $\lim_{x \to \pm\infty} u(x,t) = \pm 1$ /в силу условия /а//, получаем

$$w_0(x) = \begin{cases} -2, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad (\lim \zeta_{n_k} = +\infty),$$

$$w_0(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases} \qquad (\lim \zeta_{n_k} = -\infty).$$

Это противоречит тому, что $w_0 \in L_2(R)$. Следовательно, $\{\zeta_n\}$ имеет конечную точку сгущения a и $w_0 = u(x-a,t) - \operatorname{sgn} x$. Отсюда получаем

$$\Lambda = \int_{-\infty}^{\infty} |w_0 - \theta|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \{u(x-a,t) - \Phi(x)\}^2 dx$$

и т.д. На основании того, что интеграл в правой стороне /10/ стационарен относительно ζ в т. $\zeta = a$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x,t) = \pm 1$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x-a,t)\,\Phi^1(x)\,dx = 0. \qquad /11/$$

Мы хотим получить оценки снизу для ΛM. Из определения ΛM и метрики d_{II} видно, что, не уменьшая общности, можно считать $u(x-a,t) = \Phi(x) + h(x,t)$. Такой выбор будет достаточным, так как

$$||h||_1 \geq d_{II}(u,\Phi). \qquad /12/$$

Тогда /11/ запишется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} h\Phi^1(x)\,dx = 0. \qquad /13/$$

2. ОЦЕНКА СНИЗУ ДЛЯ $\delta^2 M(h)$

Разложим h на четную и нечетную части $h(x) = f(x) + g(x)$, $h(-x) = f(x) - g(x)$. Так как $\operatorname{ch}^{-2}(2^{-1/2}cx)$ является четной функцией, имеем $\delta^2 M(h) = \delta^2 M(f) + \delta^2 M(g)$.

Для того, чтобы оценить

$$\delta^2 M(g) = \frac{4}{c^2}\int_0^{\infty}\{g_x^2 + c^2(2 - 3\operatorname{ch}^{-2}(\frac{c}{\sqrt{2}}x))\,g^2\}dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{c}\int_0^{\infty}(g'^2 + 2(2 - 3\operatorname{ch}^{-2}z)g^2)\,dz, \qquad z = 2^{-1/2}cx, \ (\frac{dg}{dz} = g'),$$

введем интеграл

$$J(g) = \int_0^{\infty}\{g'^2 + (\mu - 12\operatorname{ch}^{-2}z)\,g^2\}dz.$$

Теперь рассмотрим задачу на собственные значения

$$\psi'' + (12\operatorname{ch}^{-2}z + \lambda)\psi = 0, \quad \psi(0) = 0. \qquad /14/$$

Для действительных λ $\psi(z;\lambda)$ определена на $[0,\infty)$ и ограничена при $z\to\infty$. Поведение $12\operatorname{ch}^{-2}z$ при $z\to\infty$ показывает, что имеем случай "предельной точки" [4]. Таким образом, существует конечное число отрицательных собственных значений, а $[0,\infty)$ является

непрерывным спектром. Для $g \in L_2(0,\infty)$ существует преобразование

$$G(\lambda) = \int_0^{\infty}\psi(z;\lambda)\,g(z)\,dz, \quad g(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(z;\lambda)\,G(\lambda)\,d\rho(\lambda),$$

где $\rho(\lambda)$ - неубывающая функция. Если, кроме того, $g \in W_2^1[0,\infty)$ и g' стремится к нулю при $z\to\infty$, из /14/ и равенства Парсеваля вытекает

$$\int_0^{\infty}(g'^2 - 12\operatorname{ch}^{-2}z\,g^2)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda G^2(\lambda)\,d\rho(\lambda). \qquad /15/$$

Задача /14/ имеет ровно одно собственное значение /[4], §4 /19// $\lambda_1 = -4$ с соответствующей собственной функцией $\psi_1(z) = (15/2)^{1/2}\operatorname{sh}z\cdot\operatorname{ch}^{-3}z$. Тогда из /15/ следует, что $J(g) = (\mu-4)\,G_1^2 + \int_0^{\infty}\lambda G^2(\lambda)\,d\rho(\lambda)$, где $G_1 = \int_0^{\infty}\psi_1(z)\,g(z)\,dz$.

Полагая $\mu = 4$ и сравнивая $\delta^2 M(g)$ с $J(g)$, получаем оценку

$$\delta^2 M(g) = \frac{\sqrt{2}}{c}J(g) + 2\int_0^{\infty}(\frac{1}{c^2}g_x^2 + 2g^2)\,dx \geq \int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{c^2}g_x^2 + 2g^2)\,dx. \qquad /16/$$

Для того, чтобы оценить $\delta^2 M(f)$, мы опять используем спектральную теорию, введя интеграл

$$K(f) = \int_0^{\infty}(f'^2 - 6\operatorname{ch}^{-2}z.\,f^2)\,dz$$

и рассматривая задачу

$$\phi'' + (6\operatorname{ch}^{-2}z + \lambda)\phi = 0, \quad \phi'(0) = 0, \quad 0 \leq z < \infty. \qquad /17/$$

Задача /17/ имеет ровно одно собственное значение /[4], §4 /19// $\lambda_1 = -4$ с соответствующей собственной функцией $\phi_1(z) = (3/2)^{1/2}\operatorname{ch}^{-2}z$. Так как из /13/ вытекает, что $\int_0^{\infty}f(z)\,\phi_1(z)\,dz = 0$, то

$$K(f) = \int_0^{\infty}(f'^2 - 6\operatorname{ch}^{-2}z.\,f^2)\,dz = \int_0^{\infty}\lambda F^2(\lambda)\,d\sigma(\lambda) \geq 0,$$

где

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty}\phi(z;\lambda)\,f(z)\,dz, \quad f(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(z;\lambda)\,F(\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

$\sigma(\lambda)$ - неубывающая функция. Тогда

$$\delta^2 M(f) = \frac{\sqrt{2}}{c}K(f) + \int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{c^2}f_x^2 + f^2)\,dx + 6\int_0^{\infty}(1 - \operatorname{ch}^{-2}(\frac{c}{\sqrt{2}}x))\,f^2 dx,$$

$$\delta^2 M(f) \geq \int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{c^2}f_x^2 + f^2)\,dx. \qquad /18/$$

Объединяя /16/ и /18/, получим оценку для $\delta^2 M(h)$:

$$\delta^2 M(h) \geq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{c^2} h_x^2 + h^2 \right) dx \,. \qquad /19/$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УСЛОВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Используя опять /5/, имеем

$$\delta^3 M > -4 \sup |h| \int_{-\infty}^{\infty} h^2 dx \geq -2\sqrt{2}\, ||h||_1 \, ||h||^2.$$

Отсюда, обозначая $p = p(t) = ||h_x||$, $q = q(t) = ||h||$, в силу /7/ и /19/ получим

$$\Delta M \geq \ell\,(p^2 + q^2) - 2\sqrt{2}(p+q)\, q^2 \,, \qquad /20/$$

где $\ell = \min(1/c^2, 1)$.

Покажем, что

$$q(t) = \inf_{\zeta \in R} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [\, u(x-\zeta, t) - \Phi(x)\,]^2 dx \right\}^{1/2} =$$

$$= \inf_{\zeta \in R} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [\, u(x,t) - \Phi(x+\zeta)]^2 dx \right\}^{1/2}$$

является непрерывной функцией при $t > 0$.

Действительно, пусть для определенности $q(t_1) \geq q(t_2)$, и так как по определению функции $a = a(t)$

$$||u(x,t) - \Phi(x + a(t))|| = \inf_{\zeta \in R} ||u(x,t) - \Phi(x+\zeta)||,$$

получаем

$$|q(t_1) - q(t_2)| = q(t_1) - q(t_2) = ||u(x,t_1) - \Phi(x + a(t_1))||$$

$$- ||u(x,t_2) - \Phi(x + a(t_2))|| \leq ||u(x,t_1) - \Phi(x + a(t_2))||$$

$$- ||u(x,t_2) - \Phi(x + a(t_2))|| \leq ||u(\cdot, t_1) - u(\cdot, t_2)||\,.$$

Отсюда, в силу условия /6/, вытекает непрерывность функции $q(t)$.

Перепишем условие /6/ в виде

$$p^2 = -2c^2 \int_{-\infty}^{\infty} h \,.\, \mathrm{sh}\left(\frac{c}{\sqrt{2}} x\right) \cdot \mathrm{ch}^{-3}\left(\frac{c}{\sqrt{2}} x\right) dx \,,$$

и тогда в силу неравенства Коши-Буняковского имеем $p^2 \leq c_1 v^2$, где

$$v^2 = q = ||h||, \quad v > 0\,, \qquad c_1 = 4c^{3/2} \left(\frac{\sqrt{2}}{15} \right)^{1/2}. \qquad /21/$$

Подставляя /21/ в /20/, получим

$$\Delta M \geq \ell\, p^2 + H(v), \qquad /22/$$

где $H(v) = \ell v^4 - (8c_1)^{1/2} v^5 - 8^{1/2} v^6$.

Функция $H'(v) = v^3 (4\ell - 5(8c_1)^{1/2} v - 6 \cdot 8^{1/2} v^2)$ имеет три различных корня: отрицательный, ноль и положительный; $v_0 > 0$, $H'(v_0) = 0$ и функция $H(v)$ на интервале $[0, v_0]$ растет от нуля до $H(v_0) > 0$. В точке $v = v_0$ $H(v)$ имеет максимум.

Обозначим через v_γ наименьший положительный корень уравнения $H(v) = \gamma(\delta)$. Так как $v_\gamma \to 0$ при $\delta \to 0$, то выберем δ_1 таким образом, чтобы при $\delta < \delta_1$ выполнялось $v_\gamma < v_0$. Тогда в силу непрерывности функции $v = v(t) = (q(t))^{1/2}$ из /9/ и /22/ вытекает, что при $\delta < \delta_1$ имеем $q(t) = v^2(t) < v_\gamma^2$. Отсюда, используя /21/, получаем оценку

$$||h||_1^2 = p^2(t) + q^2(t) < c_1 v_\gamma^2 + v_\gamma^4\,, \quad \forall t \geq 0\,. \qquad /23/$$

Для $\epsilon > 0$ выберем δ_2 таким образом, чтобы при $\delta < \delta_2$ выполнялось $c_1 v_\gamma^2 + v_\gamma^4 \leq \epsilon^2$. Тогда из /23/ вытекает, что при $\delta < \bar{\delta} = \min(\delta_1, \delta_2)$ имеет место

$$d_{II}(u, \Phi) \leq ||h||_1 < \epsilon, \quad \forall t \geq 0\,.$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УСТОЙЧИВОСТИ

Теперь освободимся от ограничения $E(u) = E(\Phi)$. Напомним, что $E(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x^2 dx = 2c\sqrt{2}/3$. Полагая $u = \Phi + h$, $[d_I(u, \Phi)]_{t=0} = \delta$, определим Φ_δ с соответствующей c_δ так, чтобы $E(\Phi_\delta) = E(u)$, и обозначим $b(\delta) = 2^{-1/2} c_\delta$, $b(0) = 2^{-1/2} c$. Тогда

$$\frac{4}{3} |b(\delta) - b(0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (2\Phi_x h_x + h_x^2) \right| \leq 4(b(0)/3)^{1/2} ||h||_1 + ||h||_1^2\,.$$

В частности, при $t = 0$

$$\frac{4}{3} |b(\delta) - b(0)| \leq 4(b(0)/3)^{1/2} \delta + \delta^2\,. \qquad /24/$$

Нетрудно подсчитать, что имеют место оценки

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\Phi - \Phi_\delta)^2 dx \leq \frac{8(\ln 4 - 1)}{b(0)\, b(\delta)} |b(\delta) - b(0)|\,, \qquad /25/$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\Phi' - \Phi'_\delta)^2 dx \leq \frac{4}{3} | b(\delta) - b(0)|\,. \qquad /26/$$

Далее, так как $d_{II}(\Phi,\Phi_\delta)$ не зависит от t, имеем

$$d_{II}(\Phi,\Phi_\delta) \le [d_I(\Phi,\Phi_\delta)]_{t=0} \quad . \qquad /27/$$

Пусть $\epsilon > 0$. Покажем, что существует такое δ_3, что если $\delta < \delta_3$, то $d_{II}(u,\Phi_\delta) < \epsilon/2$. Допустим противное. Это означает, что существуют $\delta_n \to 0$ и $d_{II}(u,\Phi_{\delta_n}) \ge \epsilon/2$. Но неравенство /24/ показывает, что $\lim\limits_n b(\delta_n) = b(0)$. Отсюда, используя рассуждения п.3, получим, что $v_{\gamma_n} < v_0^{(n)}$ при $n > N$ и $\lim\limits_n (c_1^{(n)} v_{\gamma_n}^2 + v_{\gamma_n}^4) = 0$. А это в силу /23/ противоречит нашему допущению.

Используя оценки /24/, /25/ и /26/, выберем δ_4 так, чтобы при $\delta < \delta_4$

$$[d_I(\Phi,\Phi_\delta)]_{t=0} < \epsilon/2. \qquad /28/$$

Тогда при $\delta < \tilde{\delta} = \min(\delta_3, \delta_4)$ из /27/, /28/ и неравенства треугольника получаем

$$d_{II}(u,\Phi) \le d_{II}(u,\Phi_\delta) + d_{II}(\Phi_\delta,\Phi) < \epsilon .$$

§2. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ $\Psi(y)$ УРАВНЕНИЯ $u_t - 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$

1. Пусть $u = \Psi + h$ является решением /2/, удовлетворяющим условиям:

/а′/ $h(x,t)$ для любого $t \ge 0$ принадлежит $W_2^1(R)$.

/б′/ Соответствие $t \to h(\cdot, t)$ непрерывно отображает $[0,\infty)$ в $L_2(R)$.

/в′/ $\lim u_x = \lim u_{xx} = 0$ при $x \to \pm\infty$.

/г′/ u_{xt} и $u_{xxx} \in L_2(R)$.

Из условия /а′/ вытекает, что $u(x,t) - \Psi \in W_2^1(R)$, и, таким образом, мы можем, как раньше, ввести метрики $d_I(u,\Psi)$ и $d_{II}(u,\Psi)$ по формуле /4/. Условие /а′/ гарантирует существование нелинейного функционала

$$T(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (u_x^2 + (u^2 - c^2)^2)\, dx.$$

В силу /2/, /а′/, /в′/ и /г′/ $T(u)$ не зависит от времени. Обозначим $[d_I(u,\Psi)]_{t=0} = \delta$ и получим оценки для

$$\Delta T = T(u) - T(\Psi) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (h_x^2 + 2(2 - 3\,\mathrm{ch}^{-2}(cy))\, c^2h^2 + 4\int_{-\infty}^{\infty} \Psi h^3 dx + \int_{-\infty}^{\infty} h^4 dx , \qquad /29/$$

$$\Delta T \le m\delta^2 + 2c\sqrt{2}\,\delta^3 + 2^{-1}\delta^4 = \gamma(\delta) = \gamma , \qquad /30/$$

где $m = \max(1, 4c^2)$.

Так же, как и раньше, можно показать, что существует такое конечное $a = a(t)$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} | u(x-a,t) - \Psi(x) |^2 dx = \inf_{\zeta \in R} \int_{-\infty}^{\infty} | u(x-\zeta,t) - \Psi(x) |^2 dx,$$

и, не уменьшая общности, можно считать

$$u(x-a,t) = \Psi(x) + h(x,t).$$

Таким образом, получаем условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} h\Psi'(x)\, dx = 0. \qquad /31/$$

Аналогично тому, что делалось раньше, из /29/ и /31/ вытекает оценка снизу для

$$\Delta T \ge \ell(p^2 + q^2) - c_1(p+q)q^2 , \qquad /32/$$

где $\ell = \mathrm{miu}(\tfrac{1}{2}, c^2)$, $p = p(t) = \|h_x\|$, $q = q(t) = \|h\|$, $c_1 = 2^{3/2}c$.
Отметим, что

$$q(t) = \inf_{\zeta \in R} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [u(x-\zeta,t) - \Psi(x)]^2 dx \right\}^{1/2}$$

является непрерывной функцией для $t \ge 0$.

2. <u>Доказательство устойчивости</u>

Из /29/ и /30/ вытекает следующее неравенство:

$$p^2 = \int_{-\infty}^{\infty} h^2 dx \le \gamma + 2c^2q^2 + 4c(p+q)q^2.$$

Решая это неравенство относительно p, получаем

$$p \le 2cq + [\gamma + 2c(cq^2 + 2q^3 + 2cq^4)]^{1/2} = X(q) . \qquad /33/$$

Подставляя /33/ в /32/, получим

$$\gamma \ge \Delta T \ge \ell(p^2+q^2) - c_1(q + X(q))\, q^2,$$
$$\ge q^2(\ell - c_1X(q)) - c_1q^3 = Y(q) . \qquad /34/$$

Выберем δ_1 так, чтобы $X(0)=(\gamma(\delta))^{1/2} < \ell / c_1$ при $\delta<\delta_1$. Тогда $Y'(q) > 0$ на некотором интервале $(0,q_0)$ и функция $Y(q)$ будет расти от нуля до $Y_m = Y(q_0)$. Так как Y_m растет при $\gamma \to 0$, то существует такое δ_2, что $\gamma(\delta) < Y_m$ при $\delta < \delta_2$. Тогда в силу непрерывности функции $q(t)$ из /34/ вытекает

$$q(t) \le q_\gamma , \qquad /35/$$

где q_γ - наименьший положительный корень $Y(q)=\gamma$. Отметим, что q_γ не зависит от t. Отсюда, возвращаясь к /34/, получим

$$\ell p^2 \le \gamma + c_1(q+X(q))q^2 \le \gamma + c_1(q_\gamma + X(q_\gamma))q_\gamma^2 ,$$

$$||h||_1^2 = p^2 + q^2 \le q_\gamma^2 + (1/\ell)[\gamma + c_1(q_\gamma + X(q_\gamma))\, q_\gamma^2] .$$

Так как $q_\gamma \to 0$ при $\gamma \to 0$, то для $\epsilon > 0$ выберем δ_3 таким образом, чтобы при $\delta < \delta_3$ выполнялось

$$q_\gamma^2 + (1/\ell)[\gamma + c_1(q_\gamma + X(q_\gamma))q_\gamma^2] < \epsilon^2 .$$

Тогда при $\delta < \bar{\delta} = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ получим окончательно: $d_{II}(u,\Psi) \le ||h||_1 < \epsilon$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jeffrey A., Kakutani T. Stability of the Burger's Shoch Wave and the Korteweg-de Vries Soliton. Indiana Univ. Math. J., 1970, 20, p.463.
2. Benjamin T.B. The Stability of Solitary Waves. Proc. R.Soc. Lond., 1972, A328, p.153.
3. Bona J. On the Rtability Theory of Solitary Waves. Proc. R. Soc.Lond., 1975, A344, p.363.
4. Titchmarsh E.C. Eigenfunction Expansions (2 nd ed.). Oxford University Press, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 февраля 1980 года.