ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р5 - 7817

В.М.Лебеденко

О СИСТЕМАХ ОБРАЗУЮЩИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P5 - 7817

В.М.Лебеденко

О СИСТЕМАХ ОБРАЗУЮЩИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Направлено в Сиб. математический журнал

ВВЕДЕНИЕ

1. Существуют тесные связи между строением абелевых групп и внутренними свойствами их систем образующих. Об этом свидетельствуют многие работы. Одно из направлений исследования таких связей развито В.Длабом [3–5]. Используя понятие неприводимой системы образующих и введенные им понятия сильно приводимой, наследственно приводимой и наследственно сильно приводимой системы образующих /см. п.2/, Длаб разделил все системы образующих абелевых групп на следующие шесть типов:

(I) - неприводимая система образующих;
(II) - приводимая, но не сильно приводимая и не наследственно приводимая система образующих;
(III) - сильно приводимая, но не наследственно приводимая система образующих; /1/
(IV) - наследственно приводимая система образующих, но не сильно приводимая;
(V) - наследственно и сильно приводимая система образующих, но не наследственно сильно приводимая;
(VI) - наследственно сильно приводимая система образующих.

Длаб показал, что существуют абелевы группы, обладающие всеми шестью типами систем образующих. Им установлено, какими вообще комбинациями типов /1/ могут обладать абелевы группы /см. [4]/.

Это следующие комбинации:

(I) ;
(I), (II) ;
(I), (II), (III) ;
(I), (II), (III), (IV), (V) ;
(I), (II), (III), (IV), (V), (VI) ; /1'/
(IV), (V) ;
(IV), (V), (VI) ;
(VI).

В соответствии с этим абелевы группы можно разделить на восемь непересекающихся классов, если поставить в соответствие каждой такой комбинации типов систем образующих все абелевы группы, в которых реализуется только она:

D(100000) – (I) ;
D(110000) – (I), (II) ;
D(111000) – (I), (II), (III) ;
D(111110) – (I), (II), (III) (IV) (V) ; /1" /
D(111111) – (I), (II), (III), (IV), (V), (VI) ;
D(000110) – (IV), (V) ;
D(000111) – (IV), (V), (VI) ;
D(000001) – (VI).

Описание классов D(100000), D(110000), D(000001) дано в работах /3, 4/.

Оказалось, что класс D(100000) состоит из одной нулевой группы, а D(110000) содержит только циклическую группу второго порядка - C(2). Класс D(000001) состоит из всех ненулевых полных абелевых групп.

В работе /5/ изучены примарные группы класса D(111000).

Показано, что примарная абелева группа G принадлежит к D(111000) тогда и только тогда, когда порядки ее элементов ограничены в совокупности. Для произвольных абелевых групп нами в работе /7/ получен следующий результат: если абелева группа $G \in D(111000)$, то она имеет вид:

$$G = T + F_n , \qquad /2/$$

где T - периодическая группа с ограниченными в совокупности порядками элементов, а F_n - свободная абелева группа ранга $(0 \le n < \infty)$. Там же показано, что если абелева группа $G(|G| > 2)$ имеет вид:

$$G = T_p + A , \qquad /3/$$

где T_p - примарная группа с ограниченными в совокупности порядками элемента, A - группа с конечным числом образующих, то группа $G \in D(111000)$.

Хотя группы вида /2/ устроены весьма просто, вопрос о том, каковы все группы класса D(111000), остается пока открытым. Возможно, что он совпадает со всеми группами вида /2/.

В работе /4/ построены отдельные примеры примарных групп, принадлежащих классам D(111110), D(111111), D(000111).

В работе /8/ нами получены некоторые достаточные условия, при которых абелева группа обладает или не обладает наследственно сильно приводимой системой образующих /тип (VI) /. Это позволило доказать теоремы вложения для классов D(111110), D(111111), D(000111). Из теорем следует, что для любой абелевой группы G в каждом из указанных классов существует группа, содержащая G в качестве прямого слагаемого. Полученные результаты могут рассматриваться и как достаточные условия принадлежности абелевых групп к классам D(111110), D(111111), D(000111).

Далее нами описаны все счетные периодические группы классов $D(000110)$, $D(000111)$. Найдены также некоторые виды счетных непериодических групп класса $D(000110)$. Показано, что каждая абелева группа с конечным числом образующих может быть вложена в качестве прямого слагаемого в некоторую счетную группу класса $D(000110)$. Аналогичные утверждения доказаны и для классов $D(111000)$, $D(111110)$, $D(111111)$, $D(000111)$. Проблема В.Длаба, состоящая в нахождении критериев принадлежности абелевых групп к классам (I^{II}), пока еще не решена полностью. Однако нам в настоящей работе удалось ее разрешить для примарных групп и для неограниченных периодических групп.

2. Далее всюду под группами мы будем подразумевать абелевы группы. Через $\bar{g}$ и $\bar{D}$ будем обозначать образы элемента g и подмножества D группы G в фактор-группе $\bar{G} = G/A$. Символ "$\subset$" употребляется нами для обозначения строгого вложения подмножеств в отличие от "$\subseteq$". Множество, состоящее из элементов g_λ, $\lambda \in \Lambda$, будем обозначать через $[g_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$, а разность некоторого множества D и одноэлементного множества g - через D/g. Линейную комбинацию элементов множества A иногда будем обозначать через $f(A)$. Для конечной группы $G = G_{p_1} + \ldots + G_{p_n}$ / G_{p_i} - примарные компоненты G / $m(G)$ будет означать

$$\max_{1\le i\le n} (r(G_{p_i})) \qquad /\text{см.}^{/8/}/.$$

Для обозначения прямой суммы групп мы употребляем знаки "+" и "Σ".

Пусть D -система образующих некоторой группы G $(G = \{D\})$.

Определение 1. D - неприводима, если соотношение

$$g \in \{D/g\} \qquad /4/$$

не выполняется ни для одного элемента $g\in D$. В противном случае D - приводима.

Определение 2. D - сильно приводима, если соотношение /4/ выполняется для любого элемента $g\in D$.

Определение 3. D - наследственно приводима, если приводима всякая подсистема, порождающая $G = \{D\}$.

Определение 4. D - наследственно сильно приводима, если сильно приводима всякая подсистема $D' \le D$, которая порождает $G = \{D\}$.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ В.ДЛАБА ДЛЯ ПРИМАРНЫХ ГРУПП

1. В работе Кхаббаза [6] показано, что в примарной группе каждый элемент нулевой высоты может быть включен в некоторую ее неприводимую систему образующих. Противоположными свойствами обладают элементы ненулевой высоты. Это показывает следующая

Лемма 1. Если p -группа $G = \{D\}$, $a\in D$ и $h_p(a) > 0$, то $a \in \{D/a\}$.

Доказательство. Так как $a = px$, $x \in \{a, D/a\}$, то

$$a = pf(D/a) + pka.$$

Следовательно,

$$(pk-1)a = pf(D/a) \in \{D/a\},$$

$$(pk-1, p) = 1 \quad \text{и} \quad a \in \{D/a\}.$$

Лемма доказана.

Интересным является следующее утверждение.

Лемма 2. Если в p -группе G система образующих D содержит элемент a и такой элемент $b \in D/a$, что

$$h_p(a \pm b) > 0,$$

то

$$a \in \{D/a\}.$$

Доказательство. Действительно, так как

$$a \pm b = pf(D/[a,b]) + kpa + \ell pb,$$

то

$$(kp-1)a = (1 \pm \ell p)b - pf(D/[a,b]) =$$

$$= f_1(D/a) \in \{D/a\}.$$

Следовательно, а $a\in\{D/a\}$, так как $(h_p-1,p)=1$.
Лемма доказана.
Замечание. Утверждение леммы остается справедливым, если заменить $a\pm b$ на

$$a+\sum_{i=1}^{n} k_i b_i .$$

<u>Теорема 1.</u> Если в системе образующих D некоторой p-группы G для любого элемента a найдется такой элемент b, $b\in D/b$, что $h_p(a\pm b)>0$*, то D - сильно приводима.
<u>Доказательство.</u> Так как для любого элемента $a\in D$, $h_p(a\pm b)>0$, то, по Лемме 2, $a\in\{D/a\}$. То есть D сильно приводима. Теорема доказана.
<u>Теорема 2.</u> Если p - группа G содержит такую базисную подгруппу B, что $G/B\cong\sum_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$, где $G_\lambda\cong C(p^\infty)$, $\lambda\in\Lambda$ и $|\Lambda|=|G|$, то G обладает системой образующих типа (VI) /см. /1//.
<u>Доказательство.</u> Пусть $G_\lambda=\{\bar{C}_\lambda\}$ при каждом $\lambda\in\Lambda$, где

$$\bar{C}_\lambda=[\bar{c}_{\lambda i}]_{i=1}^{\infty},\quad p\bar{c}_{\lambda 1}=0,\quad \bar{c}_{\lambda k}-p\bar{c}_{\lambda k+1}=0\quad (k=1,2,\dots)$$

и

$$C_\lambda=[c_{\lambda i}]_{i=1}^{\infty}\ (c_{\lambda i}\in\bar{c}_{\lambda i}).$$

Положим $c^*_{\lambda i}=pc_{\lambda i}\ (i=1,2,\dots)$.
Далее, пусть $B=[b_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ /среди элементов b_λ могут быть одинаковые, если $|\Lambda|>|B|$/ и

$$e_{\lambda i}=c^*_{\lambda i}+b_\lambda,\quad E_\lambda=[e_{\lambda i}]_{i=1}^{\infty},$$

$E=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$. Тогда множество $D=B\cup E$ - система образующих типа (VI) для группы G. То, что D - система образующих G, не вызывает сомнений, так как образ E в G/B порождает G/B ($p(G/B)=G/B$). Пусть $D'\subseteq D$ и $\{D'\}=G$.

Тогда $D'=B'\cup E'$, где
$\emptyset\subseteq B'\subseteq B$, $E'\subseteq E$, $E'=\bigcup E'_\lambda$
$(E'_\lambda\subseteq E_\lambda)$, $|E'_\lambda|=\aleph_0$.

* Под $a\pm b$ мы подразумеваем здесь $a+b$ или $a-b$.

Покажем, что D' сильно приводима. Возьмем два произвольных элемента $e_{\lambda i}=c^*_{\lambda i}+b_\lambda$ и $e_{\lambda j}=c^*_{\lambda j}+b_\lambda$ из $E'_\lambda\subset D'$ $(i\neq j)$. Так как

$$e_{\lambda i}-e_{\lambda j}=c^*_{\lambda i}-c^*_{\lambda j}=p(c_{\lambda i}-c_{\lambda j}),$$

то $h_p(e_{\lambda i}-e_{\lambda j})>0$. Подобные построения можно сделать для любого элемента $e_{\lambda i}\in D'$. Пусть $\emptyset\neq B'\ni b_\lambda$. Рассмотрим элемент $e_{\lambda k}\in E'_\lambda$, $e_{\lambda k}=c^*_{\lambda k}+b_\lambda$: $e_{\lambda k}-b_\lambda=c^*_{\lambda k}=pc_{\lambda k}$. То есть $h_p(b_\lambda-e_{\lambda k})>0$. Теперь видно, что для любого элемента $x\in D'$ есть такой элемент $y\in D'/x$, что $h_p(x-y)>0$. В силу теоремы 1 D' сильно приводима. Нами показано, что произвольная подсистема $D'\subseteq D$, $\{D'\}=\{D\}=G$ - сильно приводима. Следовательно, D - наследственно сильно приводима /тип (VI)/. Теорема доказана. Из предыдущих результатов следует
<u>Теорема 3.</u> Пусть G-p - примарная группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

А/. G имеет систему образующих типа (VI).

Б/. G или полная группа, или имеет такую базисную подгруппу B, что $r_p(G/B)\geq r_p(B)$

$$(r_p(G/B)=|G|,\ \text{если}\ r_p(G)>\aleph_0).$$

В/. G не представима в виде прямой суммы

$$G=G_1+G_2, \qquad /5/$$

где G_1 - ограничена* и $r(G_1)>r(G_2)$.
<u>Доказательство.</u> Для примарных групп конечного ранга теорема справедлива /см. /8//.

<u>B → A.</u> Если группа G имеет бесконечный ранг и $r_p(G/B)>r_p(B)$, то $r_p(G/B)=|G|$. Следовательно, и к G применима теорема 2 и она обладает системой образующих типа (VI).

<u>B → C.</u> Если группа G имеет бесконечный ранг и $r_p(G/B)\geq r_p(B)$, то она не представима в виде /5/.

C → B. Если группа G не представима в виде /5/, то можно подобрать такую базисную подгруппу B, что

*Здесь и в дальнейшем под ограниченной периодической группой будем понимать группу с порядками элементов, ограниченными в совокупности.

$r_p(G/B) \geq r_p/B)$. Для доказательства достаточно заметить, что всякая счетная неограниченная редуцированная группа C' обладает такой базисной подгруппой B', что $r(G'/B') = 1$.

$A \to C$. Пусть группа G обладает системой образующих типа (VI). Тогда она не представима в виде /5/ в силу теоремы 7 работы [8]. Итак, установлено, что

$B \sim C, \quad B \to A \to C.$

Теорема доказана.

2. Примарные группы и классы Длаба. Полученные результаты дают возможность дать полную классификацию, в смысле Длаба, примарных абелевых групп. Поскольку для примарных групп классы $D(100000)$, $D(110000)$, $D(111000)$,$D(000001)$ описаны, нам остается рассмотреть классы $D(111110)$, $D(111111)$, $D(000110)$, $D(000111)$.

а/ Класс $D(111110)$.

p - примарная группа G принадлежит к $G(111110)$, если она имеет вид /5/ $G = G_1 + G_2$, где G_1 - ограничена, G - неограничена и $r_p(G_1) > r_p(G_2)$, $r_p(G_1) \geq \aleph_0$

Если G имеет указанный вид, то она обладает неприводимой системой образующих, так как имеет прямое слагаемое мощности $|G|$, разложимое в прямую сумму циклических групп /см. [6]/ и не имеет систем образующих типа (VI) /см. теорему 2/.

В то же время G обладает системами образующих типов (IV), (V), так как не является ограниченной и системами образующих типов (II), (III) /см. [4]/.

Легко показать, что группы конечного ранга не принадлежат к $D(111110)$ /см. [6,8]/. С другой стороны, если p -группа G бесконечного ранга принадлежит к $D(111110)$, то она /по теореме 2/ имеет вид /5/ и не является ограниченной.

б/ Класс $D(111111)$. Группы этого класса характеризуются равенствами

$|G/B| = |G| = |B|$

/B - базисная подгруппа G /. Если группа G удовлетворяет этим равенствам, то /см. [6]/ она имеет систему образующих типа /1/ и систему образующих типа (VI) /см. теорему 2/. Поэтому G обладает и системами образующих остальных типов (II), (III), (IV), (V) /см. [4]/. С другой стороны, если группа G принадлежит к $G(111111)$, то она имеет бесконечный ранг /см. [8]/ и $|G/B| = |G|$, по теореме 2. Далее, $|B| = |G|$ /см. [6]/.

в/ Класс $D(000110)$. Этому классу принадлежат счетные группы вида

$G = G_1 + D,$

где G_1 - конечна, D - полная группа, $0 < r_p(D) < r_p(G_1)$, и только они.

Как показано в работе [8], этими группами исчерпываются все счетные примарные группы класса $D(000110)$.

С другой стороны, если группа G несчетна и не имеет систем образующих типа (VI), то по теореме 2 она имеет вид /5/ $G = G_1 + G_2$, где $|G_1| = |G|$ и G_1 разложима в прямую сумму циклических подгрупп. Но отсюда следует, что G обладает неприводимой системой образующих /см. [6]/.

г/ Класс $D(000111)$. Группы бесконечного ранга этого класса характеризуются соотношением:

$$0 < |B| < |G/B| = |G| \qquad /7/$$

/B - базисная подгруппа G /.

Действительно, если группа G удовлетворяет соотношениям /7/, то она не обладает системами образующих типа /1/ /см. [6]/ и обладает системой образующих типа (VI) по теореме 2. Так, если G - неполная группа, то у нее есть системы образующих типов (IV), (V) /см. [4]/. С другой стороны, если $G \in D(000111)$, то $|G| > |B|$ /для любой базисной подгруппы B/, так как в ней нет систем образующих типа (I) /см. [6]/. Поскольку G обладает системой образующих типа (VI), $|G/B| \geq |B|$. А так как $|G| > |B|$, то $|G/B| > |B|$. Среди групп конечного ранга классу $D(000111)$ принадлежат группы вида $G = G_1 + D$, где $G \neq 0$ - конечная, а D - полная группа, $r_p(D) \geq r_p(G)$, и только они /см. [8]/.

Результаты, полученные нами для примарных групп, используются в следующей главе для периодических групп.

2. *Периодические группы и классы Длаба*

а/ <u>Класс $D(111000)$.</u> Если периодическая группа принадлежит к $D(111000)$, то она ограничена /см. /7/ /. Вопрос о том, каковы все периодические группы класса $D(111000)$, остается пока открытым. Если есть ограниченные группы с наследственно приводимыми системами образующих, то они принадлежат к $D(111110)$ /см. /7/ /. Все периодические группы вида $T_p + A$, где T_p - ограниченная примарная группа, а A - группа с конечным числом образующих, заведомо принадлежат к $D(111000)$/см. /7/ /.

б/ <u>Класс $D(111110)$.</u> Неограниченная периодическая группа G принадлежит к $D(111110)$ тогда и только тогда, когда она имеет вид:

$$G = G_1 + G_2, \quad r(G_1) \geq {}_0,$$

где G_1 - ограничена, G_2 - неограничена и

$$r(G_1) > r(G_2).$$

Доказательство можно привести так же, как и для примарных групп, опираясь на теорему 4.

в/ <u>Класс $D(111111)$.</u> Группы этого класса не представимы в виде /5/:

$$G = G_1 + G_2,$$

где G_1 - ограничена и $r(G_1) > r(G_2)$ /см. теорему 4/.

Кроме того, они имеют равномощные прямые слагаемые, разложимые в прямую сумму циклических групп /см. /6/ /.

г/. <u>Класс $D(000110)$.</u> Группы этого класса имеют вид

$$G = G_1 + D,$$

где G_1 - конечная, D - полная группа, $0 < r(D) < m(G_1)$ /см. Введение/. Доказательство этого утверждения аналогично данному нами для примарного случая.

д/ <u>Класс $D(000111)$.</u> Группы бесконечного ранга этого класса характеризуются соотношением

$$|B| < |G/B| = |G|,$$

где B - сумма безисных подгрупп всех примарных компонент группы G/. Группы конечного ранга класса $D(000111)$ имеют вид:

$$G = G_1 + D,$$

где $G_1 \neq 0$ - конечна, а D - полная группа,

$$r(D) \geq m(G_1).$$

Доказательство этого утверждения аналогично данному нами для примарных групп.

Литература

1. *А.Г.Курош. Теория групп. Наука, Москва, 1967.*
2. *L.Fuchs. Abelian Groups. Budapest, 1958.*
3. *В.Длаб. Заметка к теории полных абелевых групп. Чехословацкий математический журнал 8 /83/, 1958, 54-61.*
4. *В.Длаб. Некоторые соотношения между системами образующих абелевых групп. Чехословацкий математический журнал, 9 /84/, 1959, 161-169.*
5. *V.Dlab. On Characterization of Primary Abelian Groups of Bounded Order. Journal London Math. Soc., 36, 139-144 (1961).*
6. *S.Khabbaz. Abelian Torsion Groups Having a Minimal System of Generators. Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 98, No. 3, 1961.*
7. *В.М.Лебеденко. Абелевы группы со свойством (P) Сибирский математический журнал т. XI, №6, 1970. ВИНИТИ, 1971, 1499-70 Деп.*
8. *В.М.Лебеденко. Сообщения ОИЯИ, Р5-7344, Дубна, 1973.*

Рукопись поступила в издательский отдел 21 марта 1974 года.