

7592

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



ЖЕВМ и МФ, 1975, т. 15, № 5, с. 1333-39

Экз. чит. зала

P5 - 7592

С.И.Сердюкова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ
РАЗНОСТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
С НАКЛОННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ
ПОСТОЯННОГО ЗНАКА

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

P5 - 7592

С.И.Сердюкова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ
РАЗНОСТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
С НАКЛОННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ
ПОСТОЯННОГО ЗНАКА

Направлено в "Журнал вычислительной математики
и математической физики"

Рассматривается разностная краевая задача

$$v_{\nu}(t+r) = \sum_{j=-r_1}^{r_2} A_j v_{\nu+j}(t), \quad t = nr \geq 0, \quad \nu = 1, \dots, N-1;$$

$$v_{\nu}(0) = f_{\nu}, \quad \sum_{\nu=1}^{N-1} |f_{\nu}|^2 < \infty; \quad /1.a/$$

$$v_m(t) = \sum_{j=1}^{s_1} C_{jm} v_j(t), \quad m = -r_1 + 1, \dots, 0;$$

$$v_{N+l}(t) = \sum_{j=1}^{s_2} D_{jl} v_{N-j}(t), \quad l = 0, \dots, r_2 - 1. \quad /1.6/$$

Здесь v - векторы размерности k ; A_j , C_{jm} , D_{jl} - постоянные матрицы; A_{-r_1} , A_{r_2} - невырожденные матрицы. Обозначим через G оператор перехода от слоя к слою. Предполагается, что устойчивы следующие три задачи: а/ задача Коши, б/ левая краевая задача, с/ правая краевая задача. В работе /1/ построены примеры неустойчивых краевых задач с двумя границами, которым отвечают устойчивые задачи а/, б/, с/. При этом в примерах для "гиперболических" систем предполагается наличие наклонных характеристик разного знака. В предлагаемой работе рассматривается подкласс "гиперболических" систем с наклонными характери-

ками постоянного знака. Для этого подкласса удается доказать оценку $\|G^n\| \leq c_1$ при $n \leq e^{c_2 N}$, $c_2 > 0$. Построен пример краевой задачи с двумя границами, для которого $\|G\| > e^{c_3 \sigma N}$, $\sigma < 1$, $c > 0$. Этот пример доказывает неулучшаемость приведенной выше оценки для выделенного подкласса "гиперболических" систем. Устойчивость удается доказать при дополнительном ограничении: краевые матрицы $K_1^{-1} K_2$, $K_4^{-1} K_3$ /1/ не должны иметь особенностей в точках единичной окружности. Устойчивые полубесконечные задачи допускают в верхних $k - l_1$ строках матрицы $K_1^{-1} K_2$ и нижних $l_2 k - l_2$ строках матрицы $K_4^{-1} K_3$ особенности первого порядка /2/.

Теорема 1. Пусть для каждой определяющей точки единичной окружности все собственные значения /с.з./ характеристической матрицы задачи Коши имеют наклонные характеристики постоянного знака. Тогда, если задачи а/, б/, с/ устойчивы, то $\|G^n\| < c_1$ при $n \leq e^{c_2 N}$, $c_2 > 0$.

Доказательство. При исследовании устойчивости краевых задач существенно используется явный вид резольвенты $(G - zI)^{-1}$ в окрестности единичной окружности $|z| = 1$ /1,2/. При этом резольвента краевой задачи с двумя границами в отличие от резольвент полубесконечных задач содержит ряд возмущений:

$$\tilde{M} = \sum_{s=0}^{\infty} (M_{22}^{-N+1} K_4^{-1} K_3 M_{11}^{N-1} K_1^{-1} K_2)^s.$$

Здесь M_{11} , M_{22} - блоки канонической формы резольвентной матрицы $M(z)$ /2/:

$$TMT^{-1} = \begin{vmatrix} M_1 & & & \\ & A & & \\ & & C & \\ & & & M_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{11} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & M_{22} \end{vmatrix}, \quad r = e^{i\phi}, \quad |\phi - \phi_0| < \rho.$$

С.з. M_1 , M_2^{-1} по модулю строго меньше 1 при $|\phi - \phi_0| < \rho$. С.з. A , C^{-1} по модулю меньше 1 при $|\phi - \phi_0| < \rho \cap |z| > 1$, но стремятся к предельным значениям, равным по модулю 1 при $\phi \rightarrow \phi_0$. Известно /3/, что, если задача Коши устойчива, то с.з. ее характеристической матрицы в окрестности определяющих точек допускают разложение вида

$$\lambda(\psi) = \exp\{i\phi_0 + i\gamma(\psi - \psi_0) + i \sum_{j=p}^{2\mu} a_j (\psi - \psi_0)^j - \beta(\psi - \psi_0)^{2\mu} + \dots\},$$

$$\text{Im } a_j = 0, \quad \beta > 0.$$

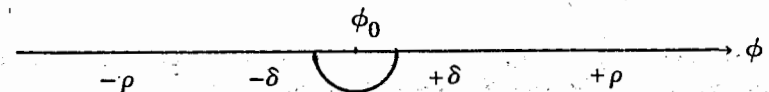
Так как по условию все $\gamma \neq 0$, каждому отвечает /2/ единственное с.з. резольвентной матрицы:

$$\kappa(\phi) = \exp\{i\psi_0 + i \frac{\phi - \phi_0}{\gamma} \mathcal{P}(\phi - \phi_0) + \frac{\beta}{\gamma^{2\mu+1}} (\phi - \phi_0)^{2\mu} + \dots\}.$$

$\mathcal{P}(\phi - \phi_0)$ - многочлен с вещественными коэффициентами $\mathcal{P}(0) = 1$. Из структуры κ видно, что λ с "уходящими" характеристиками $\gamma < 0$ порождают κ с $|\kappa| \leq 1$ при $|z| \geq 1$, а λ с "приходящими" характеристиками $\gamma > 0$ порождают κ с $|\kappa_j| \geq 1$ при $|z| \geq 1$. Таким образом, λ с $\gamma < 0$ порождают κ , которые попадают в M_{11} , а λ с $\gamma > 0$ порождают κ , которые попадают в M_{22} . Следовательно, если все γ одного знака, то один из блоков M_{11} , M_{22}^{-1} имеет спектр, расположенный строго внутри единичного круга при $|\phi - \phi_0| < \rho$. Теперь довольно просто можно получить искомую оценку G^n . В интеграле, представляющем G^n :

$$G^n = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (G - zI)^{-1} z^n dz,$$

выделим часть $\tilde{G}(n)$, содержащую $\tilde{M} - E$. Для $\tilde{G}(n)$ на ϕ -плоскости в окрестности точек вырождения K_1 , K_4 в качестве Γ берем обходящие петли:



Отрезки $[-\rho, -\delta]$, $[\delta, \rho]$ лежат на вещественной оси, δ выбирается ниже. Из устойчивости задач b/, c/ следует /2/, что все краевые матрицы, в частности матрицы $K_1^{-1} K_2$, $K_4^{-1} K_3$, в точках единичной окружности $|z|=1$ могут иметь особенности не выше первого порядка. Отсюда получаем оценку:

$$\| \tilde{G}(n) \| \leq N \left(\sum_{s=1}^{\infty} \sigma^{sN} \delta^{-2s-\xi} e^{n\delta} \right)^2, \quad \sigma < 1, \quad \xi \leq 2 + \max 2\mu.$$

Далее получаем такую оценку:

$$\| \tilde{G}(n) \| \approx N e^{2n\delta\sigma} \frac{\delta^{-4-2\xi}}{(1-\sigma^N \delta^{-2})^2} < e^2 \text{ при } n < \delta^{-1} = \sigma^{-\frac{N}{4+2\xi}}.$$

Остается заметить, что из устойчивости задач b/, c/ следует равномерная по n ограниченность $\|G^n - \tilde{G}(n)\|$. Теорема 1 доказана.

Пример разностной краевой задачи с $\|G^n\| > e^{c\sigma^N}$, $c > 0$, $\sigma < 1$, задачи a/, b/, c/ устойчивы.

Рассматривается разностная аппроксимация простейшего гиперболического уравнения $u_t + u_x = 0$:

$$\frac{u_{\nu}^{n+1} - \frac{u_{\nu+1}^n + u_{\nu-2}^n}{2}}{r} + \frac{u_{\nu+1}^n - u_{\nu-2}^n}{3h} \left(1 - \frac{h}{2r}\right) = 0,$$

$$\nu = 1, \dots, N-1.$$

Граничные значения находим из краевых условий:

$$u_0^n = c_{10} u_1^n + c_{20} u_2^n, \quad u_N^n = u_{N-1}^n,$$

$$u_{-1}^n = c_{1-1} u_1^n + c_{2-1} u_2^n.$$

Параметры c_{10} , c_{20} , c_{1-1} , c_{2-1} подбираются ниже. Исследуем устойчивость задачи Коши:

$$u_{\nu}^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{\nu+1}^n + u_{\nu-2}^n) - \left(\frac{r}{3h} - \frac{1}{6} \right) (u_{\nu+1}^n - u_{\nu-2}^n),$$

$$\frac{r}{h} = \alpha,$$

$$f(e^{i\phi}) = \left(\frac{2}{3} - \frac{\alpha}{3} \right) e^{i\phi} + \left(\frac{1}{3} + \frac{\alpha}{3} \right) e^{-2i\phi};$$

при $\alpha \leq 2$ задача Коши устойчива, $|f(e^{i\phi})| \leq 1$. Положив

$\alpha = \frac{3}{2}$, получаем такую схему:

$$u_{\nu}^{n+1} = \frac{1}{6} u_{\nu+1}^n + \frac{5}{6} u_{\nu-2}^n, \quad \nu = 1, \dots, N-1,$$

$$u_0^n = c_{10} u_1^n + c_{20} u_2^n, \quad u_N^n = u_{N-1}^n,$$

$$u_{-1}^n = c_{1-1} u_1^n + c_{2-1} u_2^n.$$

Далее исследуем устойчивость полубесконечных задач. Для этого строим резольвентную матрицу $M(z)$ и исследуем ее спектр

$$M(z) = \begin{vmatrix} 6z & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

С.з. $M(z)$ удовлетворяют уравнению $\kappa^3 - 6z\kappa^2 + 5 = 0$. Так как задача Коши устойчива, $M(z)$ не имеют $|\kappa_i(z)| = 1$ при $|z| > 1$. $M(z)$ не имеет кратных с.з. при $|z| \geq 1$. В точках $\phi = 0, \pm \frac{2}{3}\pi$ резольвентная матрица имеет с.з., равные по модулю 1. При $\phi = 0$ резольвентная матрица имеет такие с.з.:

$$\kappa_1(0) = 1, \quad \kappa_2(0) = \frac{5 + \sqrt{45}}{2} > 5,$$

$$\kappa_3(0) = \frac{5 - \sqrt{45}}{2} < 0, \quad |\kappa_3(0)| < 1.$$

В окрестности $\phi = 0$

$$\kappa_j(\phi) = \exp\{-\frac{2}{3}i\phi + O(\phi^2)\}, |\kappa_j(\phi)| < 1 \text{ при } |z| \geq 1.$$

Для $|z| \geq 1$ определено невырожденное аналитическое преобразование подобия $T(z)$, которое приводит $M(z)$ к диагональному виду

$$TMT^{-1} = \begin{vmatrix} \kappa_3 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_2 \end{vmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{vmatrix} T_{11}^- & T_{12}^- \\ \kappa_3^2 & \kappa_1^2 & \kappa_2^2 \\ \kappa_3 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ 1 & 1 & 1 \\ T_{21}^- & T_{22}^- \end{vmatrix},$$

при $|z| > 1$ $|\kappa_3| < 1$, $|\kappa_1| < 1$, $|\kappa_2| > 1$.

Далее строим краевые матрицы /2/

$$K_1 = T_{21}^- - \sum_{\nu=r1}^{s1} C_\nu T_{21}^- M_{11}^\nu, \quad K_2 = -T_{22}^- + \sum_{\nu=r1}^{s1} C_\nu T_{22}^- M_{22}^\nu,$$

$$K_3 = -T_{11}^- + \sum_{\nu=r2}^{s2} D_\nu T_{11}^- M_{11}^{-\nu}, \quad K_4 = T_{12}^- - \sum_{\nu=r2}^{s2} D_\nu T_{12}^- M_{22}^{-\nu},$$

$$r1 = s1 = 2, \quad r2 = s2 = 1,$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} c_{20} & c_{10} \\ c_{2-1} & c_{1-1} \end{bmatrix}, D_1 = 1.$$

После подстановки получаем такие матрицы: /2/

$$K_1 = \begin{bmatrix} \kappa_3 - c_{20} \kappa_3^3 - c_{10} \kappa_3^2 & \kappa_1 - c_{20} \kappa_1^3 - c_{10} \kappa_1^2 \\ 1 - c_{2-1} \kappa_3^3 - c_{1-1} \kappa_3^2 & 1 - c_{2-1} \kappa_1^3 - c_{1-1} \kappa_1^2 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -\kappa_2 + c_{20} \kappa_2^3 + c_{10} \kappa_2^2 \\ -1 + c_{2-1} \kappa_2^3 + c_{1-1} \kappa_2^2 \end{bmatrix}, \quad K_3 = (\kappa_3(1 - \kappa_3), \kappa_3(1 - \kappa_3)),$$

$K_4 = \kappa_2(\kappa_2 - 1)$, $K_4(z) \neq 0$ при $|z| \geq 1$. Следовательно, правая краевая задача устойчива. Положим

$$c_{20} = c_{2-1} = 0, \quad c_{10} = 1/\kappa_3(0), \quad c_{1-1} = 1/\kappa_3^2(0),$$

тогда

$$\text{Det } K_1 = (1 - \frac{\kappa_1}{\kappa_3(0)}) (1 - \frac{\kappa_3}{\kappa_3(0)}) (\kappa_3 - \kappa_1).$$

При $|z| \geq 1$ нет кратных точек спектра, поэтому $\kappa_3 - \kappa_1 \neq 0$ при $|z| \geq 1$. Далее, так как $\kappa_1(z) \neq \kappa_3(0)$ при $|z| \geq 1$ и $\kappa_3(z) = \kappa_3(0)$ лишь при $z = 1$, $\text{Det } K_1(z) \neq 0$ при $|z| \geq 1$, $z \neq 1$. Таким образом, левая краевая задача не имеет точек спектра при $|z| > 1$ и на единичной окружности есть единственная точка вырождения $K_1(z)$, $z = 1$. Посмотрим, какие особенности имеют элементы K_1^{-1} .

$$K_1^{-1} = \frac{1}{\kappa_3 - \kappa_1} \begin{vmatrix} \frac{\kappa_3(0) + \kappa_1}{\kappa_3(0) - \kappa_3} & \frac{\kappa_1 \kappa_3(0)}{\kappa_3(0) - \kappa_3} \\ -\frac{\kappa_3(0) + \kappa_2}{\kappa_3(0) - \kappa_1} & \frac{\kappa_3 \kappa_3(0)}{\kappa_3(0) - \kappa_1} \end{vmatrix},$$

$$\kappa_3(0) - \kappa_3 = \frac{2i\phi \kappa_3(0)}{4 - \kappa_3(0)} (1 + O(\phi^2)).$$

Таким образом, при $\phi = 0$ элементы верхней строки K_1^{-1} имеют особенности первого порядка, элементы нижней строки не имеют особенностей. Следовательно, левая краевая задача устойчива.

Далее строим ряд возмущения, который здесь является скалярным функциональным рядом:

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \sum_{s=0}^{\infty} (M_{22}^{-N+1} K_4^{-1} K_3 M_{11}^{N-1} K_1^{-1} K_2)^s = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \phi^{-s} (i\rho_1(\phi) \kappa_2^{-N+1} \kappa_3^{N-1} + \phi^2 \rho_2(\phi) \kappa_2^{-N+1} \kappa_1^{N-1})^s, \end{aligned}$$

$\rho_1(\phi)$, $\rho_2(\phi)$ - аналитические в окрестности $\phi=0$ функции

$$\rho_1(0) = \frac{(\kappa_2(0) - \kappa_3(0))(4 - \kappa_3(0))}{2\kappa_2(0)} = d > 0.$$

Выберем $g_\nu = 0$ при $\nu \neq 3$ и $g(0) = T^{-1}(0) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \kappa_2^3(0) \end{bmatrix}$.

Тогда имеем /см. /1/, стр. 5/

$$\begin{aligned} w_\nu^1 &= M_{11}^{\nu-1} w_1^1 = -M_{11}^{\nu-1} K_1^{-1} K_2 \tilde{M} \left(\frac{\kappa_2^3(0)}{\kappa_2^3(\phi)} - \right. \\ &\left. - \kappa_2^{-N+1}(\phi) \cdot \phi \cdot \rho(\phi) \right), \end{aligned}$$

$\rho(\phi)$ ограничена в окрестности $\phi=0$. Отсюда следует, что G^n растет не медленнее такого интеграла:

$$I_{\nu n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi^{-1} \kappa_3^{\nu-1}(\phi) M(\phi) e^{in\phi} d\phi.$$

Порядок роста $I_{\nu n}$ определяется вычетом относительно $\phi=0$:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\nu n}(0) &= \kappa_3^{\nu-1}(0) \sum_{s=0}^{\infty} \left(-d \left(\frac{\kappa_3(0)}{\kappa_2(0)} \right)^{N-1} \times \right. \\ &\left. \times (n + \omega_3(\nu-1) + \omega s(N-1))^s \right) \frac{1}{s!}, \end{aligned}$$

$$\omega_i = \frac{2}{\kappa_i(0)-4}, \quad \omega = \omega_3 - \omega_2.$$

При четном N $N-1$ нечетное и $-\left(\frac{\kappa_3(0)}{\kappa_2(0)}\right)^{N-1} = \sigma^{N-1}$, $0 < \sigma < 1$.

Напомним, что $\kappa_3(0) < 0$, $\kappa_2(0) > 5$, $|\kappa_3(0)| < 1$.

Таким образом, для четных N имеем:

$$\text{Res}_{\nu n}(0) = \kappa_3^{\nu-1}(0) \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{d}{\sigma} \right)^s \sigma^{sN} (n + \omega_3(\nu-1) + \omega s(N-1))^s / s!.$$

Покажем, что существует $c > 0$ такое, что

$$|\text{Res}_{\nu n}(0)| > |\kappa_3^{\nu-1}(0)| e^{c n \sigma^N}.$$

Разобьем Σ на два слагаемых: $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$. Σ_1 берется по таким s , для которых $\frac{n}{2} > -\omega_3(\nu-1) - \omega s(N-1)$,

$\omega < 0$, $\omega_3 < 0$. Справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\Sigma_2| &< \sum_{s \geq s_0} \frac{(d\sigma^{N-1} 6|\omega|Ns)^s}{s!}, \\ s_0 &= \frac{\frac{n}{2} + \omega_3(\nu-1)}{-\omega(N-1)} > \frac{n}{3N|\omega|} \end{aligned}$$

при $n > 6N|\omega_3|$; $s! > e^{-s} \cdot s^s$. Отсюда получаем, что для достаточно больших N

$$|\Sigma_2| \leq \sigma \frac{n}{6|\omega|}.$$

Далее оцениваем снизу Σ_1 :

$$\Sigma_1 > \sum_{s=0}^{s_0-1} \left(\frac{d}{\sigma} \right)^s \frac{\sigma^{sN}}{s!} \left(\frac{n}{2} \right)^s = \exp \left\{ \frac{dn}{2\sigma} \sigma^N \right\} \cdot (1-R),$$

$$\sum_{s \geq s_0} \left(\frac{d}{\sigma} \right)^s \frac{\sigma^{sN}}{s!} \left(\frac{n}{2} \right)^s < \left(\frac{d}{\sigma} \right)^{s_0} \frac{\sigma^{s_0 N}}{s_0!} \left(\frac{n}{2} \right)^{s_0} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{d}{\sigma} \right)^s \times$$

$$\times \frac{\sigma^{sN}}{s!} \left(\frac{n}{2}\right)^s,$$

отсюда получаем, что $|R| \leq \sigma \frac{n}{6|\omega|}$. Искомая оценка $\text{Res}_{\nu_n}(0)$ получена: $|\text{Res}_{\nu_n}(0)| > |\kappa_{\nu-1}(0)| \cdot e^{c\pi\sigma^N}$. Так как $|\kappa_3(0)| < 1$, отсюда следует, что $\|G^n\| > e^{c\pi\sigma^N}$.

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1 и матрицы $K_1^{-1}K_2$, $K_4^{-1}K_3$ не имеют особенностей в точках единичной окружности $|z|=1$, то $/1/$ устойчива.

Доказательство. Если $K_1^{-1}K_2$, $K_4^{-1}K_3$ не имеют особенностей в точках единичной окружности $|z|=1$, то ряд возмущения быстро сходится в окрестности единичной окружности: $1 - \epsilon < |z| < 1 + \epsilon$. Отсюда следует, что асимптотики интегралов, возникающих при исследовании $/1/$, отличаются от асимптотик интегралов, рассматриваемых при исследовании полубесконечных задач, постоянными множителями, не меняющими оценок сверху.

Литература

1. С.И.Сердюкова. Препринт ОИЯИ, P5-7242, Дубна, 1973.
2. С.И.Сердюкова. ДАН СССР, т. 208, №1, 52-55 /1973/.
3. В.Я.Урм. ДАН СССР, т. 139, №1, 40-43 /1961/.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 декабря 1973 года.