

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



С 345 л 2 + С 345 0

ЖС-696

P5 - 7394

3743/2-73

Е.П. Жидков, И.П. Илиев,

С.Б. Рубин, Х.И. Семерджиев

К РАСЧЕТУ ПАРАМЕТРОВ СТАЦИОНАРНОГО
САМОСОГЛАСОВАННОГО ПУЧКА
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ

1973

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

P5 - 7394

Е.П. Жидков*, И.П. Илиев*,
С.Б. Рубин, Х.И. Семерджиев *

К РАСЧЕТУ ПАРАМЕТРОВ СТАЦИОНАРНОГО
САМОСОГЛАСОВАННОГО ПУЧКА
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ

* ДВА ОИЯИ

Введение

При решении задачи об определении стационарного состояния замкнутого пучка, состоящего из вращающихся релятивистских электронов, удерживаемых внешним магнитным полем (электронного кольца, используемого в коллективном методе ускорения заряженных частиц^{/1/}), большую трудность представляет определение свободной границы системы, т.е. поперечного сечения пучка.

Одна из возможных самосогласованных систем уравнений, определяющих такое стационарное состояние, была предложена в работе^{/2/}.

С помощью функции распределения, зависящей от двух, известных в этом случае интегралов движения одночастичной задачи, получены уравнения, связывающие самосогласованное поле системы с плотностями заряда и тока. Задача заключается в определении всех параметров системы, т.е. распределения в пространстве зарядов, токов, полей.

Этот вопрос рассмотрен также в ряде работ^{/3,4,5/}, для пучков со сравнительно малым отношением среднего радиуса поперечного сечения к радиусу большой окружности кольца и при ограничениях, накладываемых на величину "поперечной энергии" и на полное число частиц в кольце. В этих работах

за исходную принималась интегральная форма уравнений, приведенных в [1], и разлагались функции Грина свободного пространства по степеням отношения радиуса сечения к радиусу кольца. В [6] сделана попытка освободиться от жестких ограничений на отношение радиусов, на величину "поперечной энергии" и на полное число частиц в пучке путем использования комбинированной формы уравнений - дифференциальной и интегральной - и применение метода Галеркина. Однако получившаяся система нелинейных уравнений для определения параметров сечения оказалась громоздкой и неудобной для конкретных вычислений.

В настоящей работе метод Галеркина используется для решения уравнений в дифференциальной форме и, кроме того, в отличие от всех предыдущих работ, учитывается наличие внешней камеры, внутри которой находится сам пучок и помещены обмотки, создающие удерживающее его магнитное поле.

Уравнения для самосогласованного поля однокомпонентной системы в цилиндрических координатах z, χ, θ имеют следующий вид [1]:

$$\mathcal{L}_1[\psi] \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} = -4\pi j \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_2[A_\theta] \equiv \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial A_\theta}{\partial z} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \chi^2} - \frac{A_\theta}{z^2} = -\frac{4\pi}{c} (j_\theta + j_\theta^0) \quad (2)$$

$$\psi = \frac{1}{4\pi \epsilon z} (H_0 - e\varphi) \int \chi \Phi \quad (3)$$

$$j_\theta = \frac{ec}{4\pi \epsilon z} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z} A_\theta \right) \int \chi \Phi \quad (4)$$

$$\Phi = (H_0 - e\varphi)^2 - m^2 c^4 - \frac{e^2}{2x} (M_0 - \frac{e}{c} z A_0)^2 \quad (5)$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (6)$$

где φ - скалярный потенциал, A_0 - θ -вая компонента векторного потенциала, ρ - плотность заряда, j_0 - плотность тока электронов, j_0^c - источник стороннего магнитного поля, x - нормировочная константа функции распределения (от величины этой константы зависит полное число частиц в кольце), H_0 , M_0 - константы интегралов движения, соответствующие полной энергии и θ -вой компоненте обобщенного импульса в одночастичной задаче, m - масса, e - заряд электрона.

Внешнее электрическое поле отсутствует, в силу симметрии

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0.$$

Из соотношений (3)-(6) следует, что выражение $\Phi = 0$ является уравнением границы сечения пучка. Неравенство $\Phi > 0$ отделяет область \mathcal{D} (в координатах z, x), в которой плотность заряда и тока отличны от нуля, от остальной области пространства, в которой частицы отсутствуют.

7.

Ниже рассматривается случай, когда пучок находится в цилиндрической камере, а внешнее магнитное поле создается двумя симметрично расположенными витками тока (см. рис. I).

Если предположить, что рассматривается состояние пучка через очень короткий промежуток времени после его сжатия переменным магнитным полем до конечного стационарного состояния, то можно принять, что как внешнее магнитное поле, так и магнитное поле самого пучка еще не проникло глубоко в стенки камеры и тогда в качестве граничного условия на стенках камеры (Σ - внутренняя поверхность камеры) задать соотношение

$$[A_\theta]_\Sigma = 0. \quad (7)$$

Таким образом принимается, что нормальные составляющие магнитного поля вблизи стенок камеры ~ 0 .

Источниками стороннего поля являются токи

$$j_{\theta 1,2}^0 = \frac{K \delta(z-R)}{2\pi z} \delta'(x \mp Z), \quad K = 2\pi R I, \quad (8)$$

где R - радиус витка, I - полный ток в витке, $2Z$ - расстояние между витками.

В дальнейшем, однако, удобно исключить из правой части (2) сингулярные функции (8), используя точное решение "однородной задачи", т.е. значение функции A_θ^0 , полученного путем решения уравнения (2) при граничном условии (7) и при $j_\theta = 0$ (т.е. при отсутствии пучка). Выражение для A_θ^0 имеет вид:

$$A_\theta^0 = \frac{4K}{6c} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left(\frac{k\pi z}{2R} \right) \cos \left(\frac{k\pi x}{2Z} \right) \begin{cases} f(z, Z, k), & 0 \leq z \leq R \\ g(z, Z, k), & R \leq z \leq 2R \end{cases} \quad (9)$$

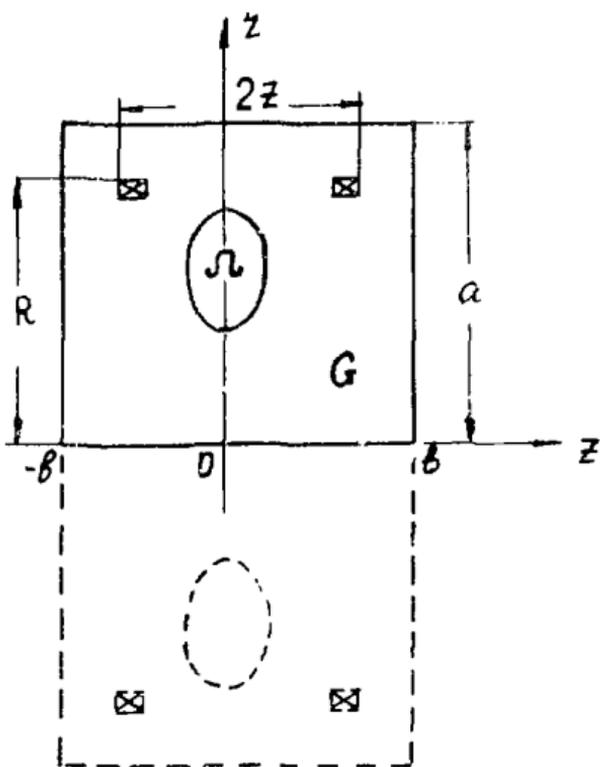


Рис. 1.

Расположение витков и электронного пучка внутри камеры.

G - внутренняя область камеры. Ω - область поперечного сечения пучка.

где $f(z, z, k) = I_1(z x_{2k+1}) \left[K_1(R x_{2k+1}) - \frac{I_1(R x_{2k+1}) K_1(a x_{2k+1})}{I_1(a x_{2k+1})} \right]$

$$g(z, z, k) = K_1(z x_{2k+1}) I_1(R x_{2k+1}) - \frac{I_1(z x_{2k+1}) I_1(R x_{2k+1}) K_1(a x_{2k+1})}{I_1(a x_{2k+1})}$$

$$x_{2k+1} = \frac{x(2k+1)}{2b}$$

В результате, отмечая штрихом компоненту A_θ , соответствующую собственному магнитному полю пучка, получаем преобразованное уравнение (2) в виде

$$\mathcal{L}_2 [A'_\theta] = -\frac{4\pi}{c} j_\theta. \quad (10)$$

В (5) полагаем

$$A_\theta = A'_\theta + A_\theta^0. \quad (11)$$

Для φ принимается обычное граничное условие на стенках катоды

$$[\varphi]_\Sigma = 0. \quad (12)$$

П.

Соотношения (I), (10) с учетом (3), (4), (6), (9), (11) можно записать так:

$$z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - x \varphi \sigma(\varphi) = -\frac{x H_0}{e} \sigma(\varphi) \quad (13)$$

$$z^2 \frac{\partial^2 A'_\theta}{\partial z^2} + z \frac{\partial A'_\theta}{\partial z} + z^2 \frac{\partial^2 A'_\theta}{\partial x^2} - A'_\theta - x z A'_\theta \sigma(\varphi) = -x \left(\frac{M_0 c}{2} - z A_\theta^0 \right) \sigma(\varphi). \quad (14)$$

Так как $[A'_\theta]_\Sigma = 0$, то, с учетом (7), имеем

$$[A'_\theta]_\Sigma = 0 \quad (15)$$

Система уравнений (13), (14), (15), (12), (5), (11) рассматривается внутри области $G : (0 \leq r \leq a, -b = x = b)$, рис. 1). Главная трудность решения заключается в наличии нелинейной функции $\sigma(\Phi)$, которая разбивает область G на две части, область $\Omega \subset G$, где $\sigma = 1$ и область $G \setminus \Omega$, где $\sigma = 0$.

В Ω система является линейной неоднородной, а в $G \setminus \Omega$ — однородной. Однако граница области Ω зависит от самих неизвестных функций Φ и A'_θ в силу соотношения (5).

Естественно решать задачу, задавая в достаточно общей и гибкой форме границу неизвестной области Ω и затем конкретизировать ее путем согласования решений. Тогда (13), (14) становится системой линейных уравнений с известными коэффициентами, которые имеют разрыв по контуру Ω . Полученная система решается методом Галеркина^{17/}.

III.

Излагаемый далее метод решения задачи предполагает реализацию на ЭВМ.

В качестве координатных функций метода Галеркина, удовлетворяющих граничным условиям (12), (15) (с учетом симметрии задачи по координате z и учетом конечности Φ и A'_θ при $z = 0$), выбираем

$$\varphi_{kl} = \cos \frac{kz}{2a} \cos \frac{l\pi z}{2b}, \quad (16)$$

$$\psi'_{ij} = \sin \frac{i\pi z}{a} \cos \frac{j\pi x}{2b} \quad (17)$$

где $K, L, j = 1, 3, 5, \dots$, $l = 1, 2, 3, \dots$.

В результате система уравнений Галеркина для определения коэффициентов разложения B_{kl} функции φ по функциям ψ_{kl} имеет вид

$$\sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \beta_{kl}^{kl} B_{kl} = \beta_{kl}^{kl}, \quad (k, l = 1, 3, 5, \dots) \quad (18)$$

Аналогичная система для коэффициентов разложения A'_{ij} функции A'_0 по функциям ψ'_{ij} получается в виде

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \alpha_{ij}^{ij} A'_{ij} = \alpha_{ij}^{ij}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots; j = 1, 3, 5, \dots) \quad (19)$$

Для величин β_{kl}^{kl} , α_{ij}^{ij} , β_{kl}^{kl} , α_{ij}^{ij} получаются выражения:

$$\begin{aligned} \beta_{kl}^{kl} = & -\frac{6}{2} \delta_{kl} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \left[\frac{2a^2 \pi}{k+k'} \sin \frac{(k+k')\pi}{2} + \frac{2a^2 \pi}{k-k'} \sin \frac{(k-k')\pi}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{4a^2}{(k+k')^2} \left(\cos \frac{(k+k')\pi}{2} - 1 \right) + \frac{4a^2}{(k-k')^2} \left(\cos \frac{(k-k')\pi}{2} - 1 \right) \right] - \right. \\ & \left. K \left[\frac{1}{k+k'} \left(\cos \frac{(k+k')\pi}{2} - 1 \right) + \frac{1}{k-k'} \left(\cos \frac{(k-k')\pi}{2} - 1 \right) \right] \right\} - \\ & \alpha' \iint_{\Omega} \varphi_{kl} \varphi_{k'l'} dz dx, \quad k \neq k' \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{kl}^{kl} = & -\frac{6}{2} \delta_{kl} \left\{ \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \left[\frac{a^2}{(k\pi)^2} \left((-1)^k - 1 \right) + \frac{a^2}{l^2} \right] - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \left((-1)^k - 1 \right) \right\} - \alpha' \iint_{\Omega} \varphi_{kl} \varphi_{k'l'} dz dx, \quad k = k' \quad (20') \end{aligned}$$

$$\beta_{kl}^{kl} = \frac{\alpha H_0}{e} \iint_{\Omega} \varphi_{kl} dz dx \quad (20'')$$

$$\alpha_{ij}^{ij} = \left\{ 1 - \left[\left(\frac{c}{a} \right)^2 + \left(\frac{c}{2b} \right)^2 \right] \frac{4a^2}{c^2 - c'^2} \right\} (1)^{i+j} \frac{abcc'}{c^2 - c'^2} \int_{ij} - \\ \times \iint_{\Omega} z \Psi_{ij} \Psi_{ij} \, dz \, d\lambda, \quad i+j$$

$$\alpha_{ij}^{ij} = - \left\{ \frac{3}{4} + \left(\frac{c}{a} \right)^2 + \left(\frac{c}{2b} \right)^2 \right\} \left(\frac{a^2 c^2}{c^2 - c'^2} - \frac{c^2}{2c^2} \right) \frac{abcc'}{c^2 - c'^2} \times \\ \times \iint_{\Omega} z \Psi_{ij} \Psi_{ij} \, dz \, d\lambda, \quad i=j$$

$$\alpha_{ij}^{ij} = - \frac{2c}{e} M_0 \iint_{\Omega} \Psi_{ij} \, dz \, d\lambda + \alpha \iint_{\Omega} z \Psi_{ij} A_{ij}^0 \, dz \, d\lambda \quad (21^{**})$$

Здесь δ_{ij}^{ij} обозначен символ Кронекера.

В (20), (21) входят интегралы по области Ω . Естественно задать уравнение грани этой области в такой аналитической форме, которая 1) содержала бы достаточное количество параметров. Изменяя параметры, можно "создавать рельеф", т.е. путем подбора их значений получить рельефы для Ω в Ω_0 , для которых внутри области Ω выполнялось бы условие $\Delta \psi = 0$ и на границе области — условие $\Delta \psi = 0$; 2) чтобы интегралы в (20), (21) легко вычислялись аналитически, что значительно уменьшит машинное время.

Как известно, функция приблизительно представляется в виде дробно-рациональной функции с суммой дробей по z (вспомогательная дробь является второй производной по z функции $f(z)$ (см. [1])). Поэтому $\Delta \psi$ представляется аналитически (за исключением интегралов вида $\int_{\Omega} \frac{1}{z} \Psi_{ij} \Psi_{ij} \, dz \, d\lambda$), которые сводятся к однократным, после интегрирования по z), в качестве пары трисплицевых определителей при заданной величине резинки, выбираются координаты точек доверия.

IV.

Пусть указанными параметрами являются x_1, x_2, \dots, x_n (например, x_1, x_2 соответствуют координатам z_1, z_2 первой вершины ломаной и т.д.). При некоторых заданных значениях x_1, x_2, \dots, x_n решаются системы линейных алгебраических уравнений (18), (19) (так как при заданных x_1, x_2, \dots, x_n все выражения (20), (21) могут быть подсчитаны) и находятся функции A'_θ и φ и, следовательно, значение функции Φ . Таким образом можно найти область значений (z, λ) , для которых $\Phi > 0$. Граница этой области аппроксимируется ломаной такого же типа (с тем же числом звеньев) и получаются новые значения $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$. Принятый способ аппроксимации будет описан ниже. В результате получается соответствие

$$\tilde{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (23)$$

фактически получаемое лишь при численном выполнении описанной процедуры.

Решениями задачи будут являться такая система значений

$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$, для которой выполняется тождество

$$F_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) = \tilde{x}_i - f_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (24)$$

так как это будет означать, что 1) система уравнений (13), (14) решена (коэффициенты B_{ke}, A_{ei} разложения φ и A'_θ по координатным функциям найдены) и 2) нелинейное соотношение (5) на найденной границе выполняется.

В качестве метода решения системы (24) был избран непрерывный аналог метода Ньютона^{/8/}.

Если бы функции F_1, F_2, \dots, F_n были известны в явном виде, то методика свелась бы к следующему. Вводится параметрическая зависимость всех величин x_1, x_2, \dots, x_n от некоторого положительного непрерывного параметра t . Тогда F_1, F_2, \dots, F_n становятся функциями от t . Потребуем выполнения соотношений

$$\frac{dF_i(x_1(t), \dots, x_n(t))}{dt} \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = -F_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (25)$$

Получилась система обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Зададим параметры $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ в качестве начального приближения для системы (24). Очевидно, что эта система определяет и нулевое приближение искомой границы.

В соответствии с методикой, величины $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ следует принять за начальные условия задачи Коши для системы (25), т.е. положить

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad \dots, \quad x_n(0) = x_n^0 \quad (26)$$

Тогда, ^{/8/}, если начальное приближение выбрано удачно, то при $t \rightarrow \infty$ величины $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ сходятся к искомым значениям $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$.

В нашем случае функции F_1, F_2, \dots, F_n заданы неявно. Поэтому задачу (25), (26) можно реализовать численно, задаваясь шагом по параметру t и многократно повторяя описанную численную процедуру по установлению соответствия (23). Именно, для каждого значения $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно найти F_1, F_2, \dots, F_n и их первые производные в этой точке.

ходится следующая переменная знаменателя при больших значениях λ . Таким образом, находятся две крайние точки границы области по λ . Полученный отрезок оси Oz делится на определенное число частей $N-1$ и из каждого узла на этой оси с некоторым шагом начинается движение параллельно оси Ox ($x \neq 0$). Вновь производится исследование функции Φ и таким образом находятся N точек границы. Обозначим их через M_1, M_2, \dots, M_N . При решении основной задачи были взяты за основу n параметров $(z_1, x_1), (z_2, x_2), \dots, (z_{\frac{n}{2}}, x_{\frac{n}{2}})$ -координаты вершин ломаной, описывающей искомую область. Естественно задаваться многоугольником с четным числом сторон. Так как число N может быть велико, а на число параметров n , вообще говоря, приходится накладывать более жесткие ограничения, то описываемый выше многоугольник нужно "подогнать под эту границу". Из всех возможных берется тот, для которого сумма квадратов расстояний (отсчитываемых параллельно оси Ox) от точек M_1, M_2, \dots, M_N до соответствующих сторон этого многоугольника минимальна.

Описанная процедура была реализована в качестве программы, написанной на ФОРТРАНе для БЭСМ-6.

У.

Большое значение для сходимости процесса имеет хороший выбор начального приближения. В данном случае, как и в указанных выше работах, удобно исходить из "одночастичной задачи", сначала подбирая необходимое магнитное поле, обеспечивающее удержание на орбите заданного радиуса многого количества частиц. Тогда собственными

полями этих частиц можно пренебречь. Затем постепенно увеличивать полное число частиц, путем увеличения нормировочного параметра функции распределения χ .

Для одной частицы, вращающейся во внешнем магнитном поле, определяемом величиной $A_{\theta}^0(\chi, \mathcal{X})$, полная энергия и θ -ая компонента обобщенного импульса запишутся в виде

$$H_p = mc^2 \Gamma \quad (29)$$

$$M_{\theta} = mc\chi \left[\sqrt{\Gamma^2 - 1 - \frac{p_{\perp}^2}{m^2 c^2}} + \frac{c}{mc^2} A_{\theta}^0(\chi, \mathcal{X}) \right] = M_{\theta} \quad (30)$$

Эти величины и должны быть внесены в (3), (5).

При этом в (30) χ выбирается близким к $\bar{\chi}$ - величине равновесного радиуса, соответствующего Γ и $A_{\theta}^0(\chi, \mathcal{X})$ при $\mathcal{X} = 0$, а p_{\perp} / mc должно составлять малую добавку к $\Gamma^2 - 1$.

Для ориентировочного определения области Ω таким образом используется величина Φ при $\mathcal{X} \sim 0$. Тогда будет $\Phi \sim 0$,

$$A_{\theta}^0 \sim 0 \quad \text{и}$$

$$\Phi_0 \equiv \frac{\Phi}{m^2 c^4} = \Gamma^2 \cdot \left(1 - \left[\frac{M_{\theta}}{mc\chi} - \frac{c}{mc^2} A_{\theta}^0(\chi, \mathcal{X}) \right]^2 \right) \quad (31)$$

При заданных размерах камеры, расположении витков и тока I в них, $A_{\theta}^0(\chi, \mathcal{X})$ определяется по формулам (9), причем из-за очень быстрой сходимости рядов в суммах можно брать всего несколько членов (если $\chi \neq R$).

"Ямой внешнего магнитного поля" назовем область, в которой выполняются соотношения

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(z, z) > 0, \quad 0 \leq n \leq 1 \\ n = -\frac{z}{H_2^0} \cdot \frac{dH_2(z, 0)}{dz} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Положение этой области изменяется при изменении "входных параметров" R, z, Γ, M_0 (при фиксированных размерах камеры). В окрестности этой области и задавались начальные приближения искомой границы пучка при $x > 0$.

VI.

По изложенной методике были выполнены вычисления, в частности, для параметров $a=16$ см, $b=6$ см, $R=8$ см, $z=4$ см, $I \sim 1,92 \cdot 10^5$ а, $\Gamma=30$, $\frac{M_0}{mc} = 72,848$. Область (32), соответствующее n , начальное приближение (в виде симметричного шестиугольника) приведены на рис. 2. На рис. 3 дан график H_2^0 для рассматриваемого случая. Для ряда значений $x=0,05; 0,1; 0,2; 0,5$ были выполнены первые итерации, после чего производилась оценка числа частиц в ступке по формуле

$$N_e = \frac{x c^2}{4x e^2} 2x \iint_{\Omega_1} \frac{(H_0 - e\varphi)}{z} z dz dx, \quad (33)$$

где Ω_1 - область, полученная после одной итерации начальной области. Дальнейшие итерации делались только для случая $x=0,5$, т.к. в остальных оценка (33) давала $N_e < 10^{13}$.

В последнем случае ($x=0,5$) за 5 итераций процесс сошелся и была получена окончательная область Ω (см. рис. 2) и полное число частиц в ступке $N_e = 1,7 \cdot 10^{13}$.

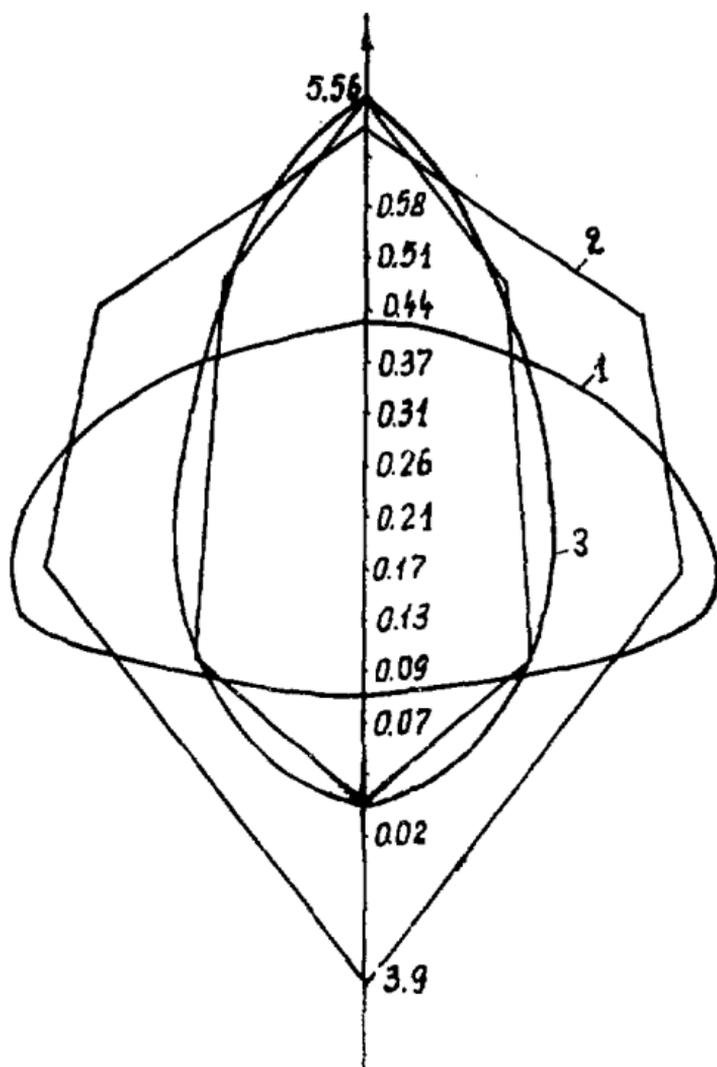


рис. 1.

- 1 - область, для которой $\Phi_{\sigma}(z, \beta) > 0$.
 2 - начальное приближение границы пучка.
 3 - окончательная граница пучка.

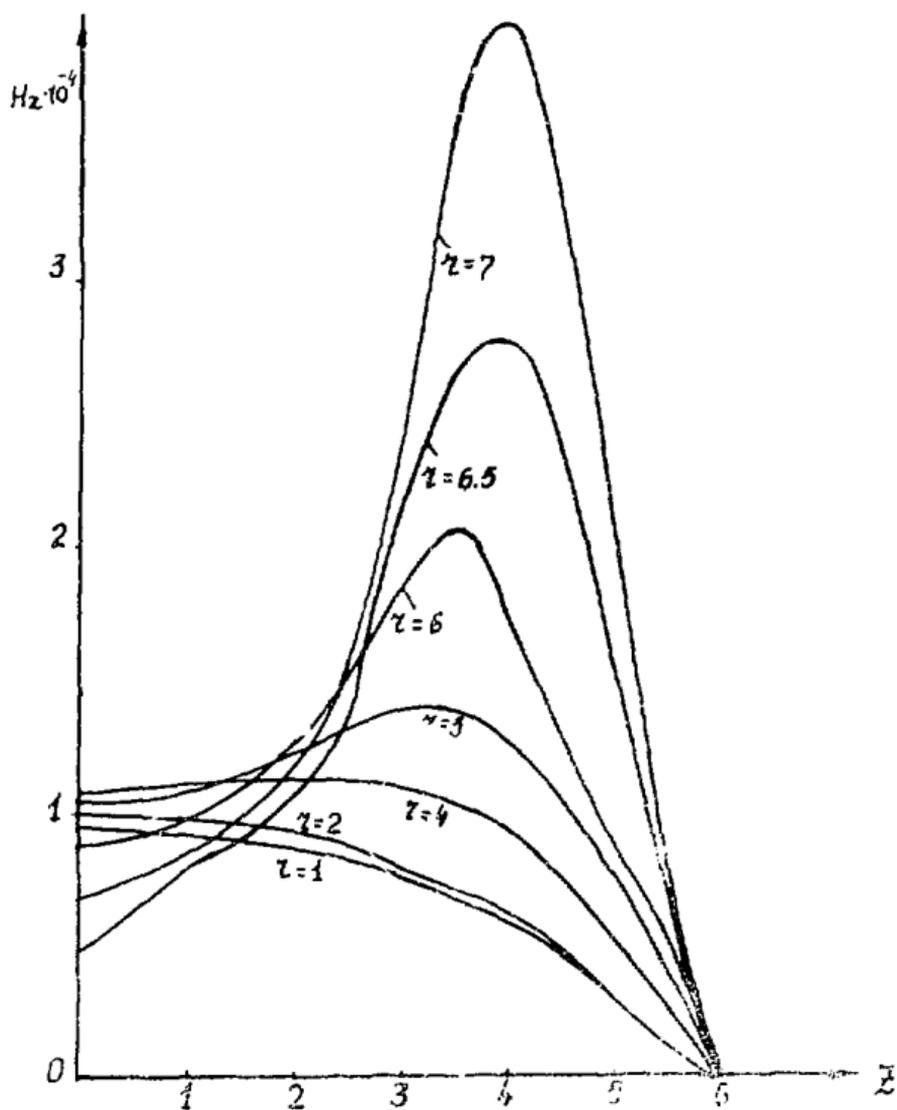


Рис. 3.

График H_z^0 - компонента магнитного поля.

При расчетах число членов в суммах (18), (19) выбиралось:
 $K=17$, $L=15$, $I=11$, $\gamma=13$.

Число N промежуточных точек, необходимых для подбора наилучшего многозвенника, подходящего к данной граничной кривой (см. процесс, описанный выше), бралось равным 60. Шаг по непрерывному параметру t выбирался из условий выпуклости получавшегося многоугольника. Изменение параметров задачи - координат вершин 6-угольника от итерации к итерации дано в таблице I.

Было оценено распределение плотности ρ электронов внутри сечения кольца. Величина $\int \rho$ дана в соответствующих точках внутри полученной области пучка на рис. 4.

Получившееся довольно большое поперечное сечение пучка показывает, что стационарное состояние в данном случае образовано частицами, имеющими довольно большой "поперечный разброс" P_{\perp} (см. формулу (30)). Поэтому был выполнен расчет при несколько большей величине M_0 (новое значение M_0 было принято равным 73,066) и при прежних значениях остальных параметров (\mathcal{X} и т.д.), т.е. когда "поперечный разброс" был меньше.

В результате 8 итераций (в качестве начальной области была выбран: область, представленная как конечная в предыдущей задаче см. рис. 4), процесс сошелся и окончательная область оказалась меньшего размера. Вид этой области и распределение плотности приведены на рис. 5. Полное число частиц в этом случае оказалось равным $N_e \approx 1,1 \cdot 10^{13}$.

В заключение авторы выражают благодарность А.Александрову, А.Б.Кузнецову, Н.Б.Рубину за полезные обсуждения.

Изменение параметров

Таблица № I.

№ итер.	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	\bar{x}_2	\bar{x}_3
0	3.873	4.470	5.197	5.563	0.613	0.532
I	4.216	4.588	4.991	5.596	0.348	0.373
2	4.239	4.518	5.123	5.569	0.334	0.345
3	7.247	4.519	5.169	5.568	0.323	0.308
4	4.258	4.526	5.251	5.559	0.326	0.278
5	4.260	4.525	5.251	5.561	0.328	0.275

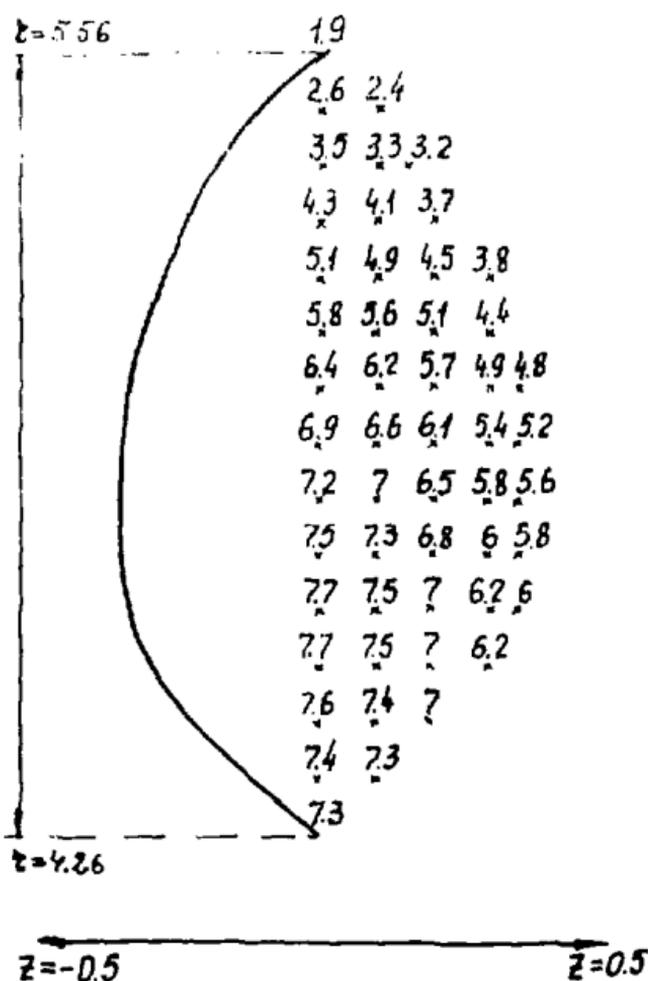


Рис. 4.

Распределение плотности по сечению пучка.

Значение $z \cdot \rho(z, z) = -2060$ -число, указанное на рис. в соответствующей таблице.

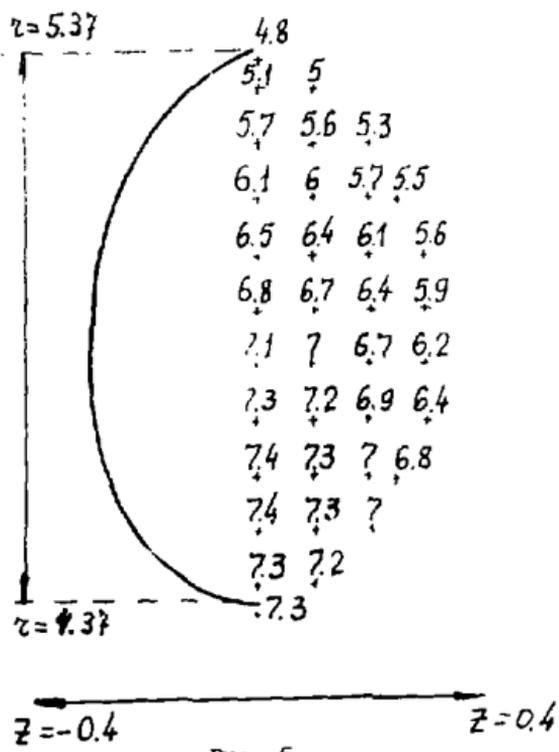


Рис. 5.

Сечение пучка и распределение плотности для случая $M_0=73,066$.

Значение τ $\rho(\tau, z)=-2050$ -число, указанное на рис. в соответствующей точке.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. И.Н.Иванов, А.Б.Кузнецов и др. Коллективное ускорение ионов. ЭЧАЯ, том I, вып. 2, 1971 г.
2. О.И.Ярковой. О стационарном состоянии аксиально-симметричной системы варяженных частиц. ИТФ, том 32, вып. II, 1962.
3. О.И.Ярковой. Препринт ОИЯИ 2182, Дубна, 1965.
4. Н.Б.Рубин. Препринт ОИЯИ 2882-2, Дубна, 1966 г.
5. С.Будням, Е.П.Лидков, И.Н.Иванов, Э.А.Перельштейн. Стационарное состояние электронного кольца во внешнем магнитном поле. ИВМФ, том II, вып. 4, 1971 г.
6. С.Б.Рубин. Препринт ОИЯИ № 2222, Дубна, 1965 г.
7. С.Г.Михлин. Численная реализация вариационных методов. "Наука", М., 1966 г.
8. Е.П.Лидков, Г.И.Макаренко, И.В.Пузынин. Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики. ЭЧАЯ, том 4, вып. I, 1973 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 августа 1973 года.