СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р5 - 7344

В.М. Лебеденко

О НЕКОТОРЫХ СВЯЗЯХ МЕЖДУ ТИПАМИ СИСТЕМ ОБРАЗУЮЩИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП И ИХ ПРЯМЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р5 - 7344

В.М. Лебеденко

О НЕКОТОРЫХ СВЯЗЯХ МЕЖДУ ТИПАМИ СИСТЕМ ОБРАЗУЮЩИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП И ИХ ПРЯМЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

I. Введение

I. Существуют тесные связи между строением абелевых групп и внутренними свойствами их систем образующих. Об этом свидетельствуют многие работы. Одно из направлений исследования таких связей развито В. Длабом[3,4,5]. Используя понятие неприводимой системы образующих и введённые им понятия сильно приводимой, наследственно приводимой и наследственно сильно приводимой системы образующих (см. п.2), Длаб разделил все системы образующих абелевых групп на следующие шесть типов:

(I) – неприводимая система образующих;

(П) – приводимая, но не сильно приводимая и не наследственно приводимая система образующих;

(Ш) – сильно приводимая, но не наследственно приводимая система образующих; (1)

(IУ)– наследственно приводимая система образующих, но не сильно приводимая;

(У) – наследственно и сильно приводимая система образующих, но не наследственно сильно приводимая;

(УI)– наследственно сильно приводимая система образующих.

Длаб показал, что существуют абелевы группы, обладающие всеми шестью типами систем образующих. Им установлено, какими вообще комбинациями типов (I) могут обладать абелевы группы (см.[4]).

Это следующие комбинации:

(I) ;

(I), (II) ;

(I), (II), (III) ;

(I), (II), (III), (IV), (V) ; (1')

(I), (II), (III), (IV), (V), (VI) ;

(IV), (V) ;

(IV), (V), (VI) ;

(VI).

В соответствии с этим абелевы группы можно разделить на восемь непересекающихся классов, если поставить в соответствие каждой такой комбинации типов систем образующих все абелевы группы, в которых реализуется только она:

$$\mathcal{D}(100000) \text{ — } (\mathrm{I});$$

$$\mathcal{D}(110000) \text{ — } (\mathrm{I}), (\mathrm{II});$$

$$\mathcal{D}(111000) \text{ — } (\mathrm{I}), (\mathrm{II}), (\mathrm{III});$$

$$\mathcal{D}(111110) \text{ — } (\mathrm{I}), (\mathrm{II}), (\mathrm{III}), (\mathrm{IV}), (\mathrm{V});$$

$$\mathcal{D}(111111) \text{ — } (\mathrm{I}), (\mathrm{II}), (\mathrm{III}), (\mathrm{IV}), (\mathrm{V}), (\mathrm{VI});$$

$$\mathcal{D}(000110) \text{ — } (\mathrm{IV}), (\mathrm{V});$$

$$\mathcal{D}(000111) \text{ — } (\mathrm{IV}), (\mathrm{V}), (\mathrm{VI});$$

$$\mathcal{D}(000001) \text{ — } (\mathrm{VI}).$$

Описание классов $\mathcal{D}(100000)$, $\mathcal{D}(110000)$, $\mathcal{D}(000001)$ дано в работах/3,4/.

Оказалось, что класс $\mathcal{D}(100000)$ состоит из одной нулевой группы, а $\mathcal{D}(110000)$ содержит только циклическую группу второго порядка – $C(2)$. Класс $\mathcal{D}(000001)$ состоит из всех ненулевых полных абелевых групп.

В работе/5/ изучены примарные группы класса $\mathcal{D}(111000)$.

Показано, что примарная абелева группа G ($|G|>2$) принадлежит к $\mathcal{D}(111000)$ тогда и только тогда, когда порядки её элементов ограничены в совокупности. Для произвольных абелевых групп нами в работе/7/ получен следующий результат: если абелева группа $G\in\mathcal{D}(111000)$, то она имеет вид:

$$G = T + F_n, \tag{2}$$

где T – периодическая группа с ограниченными в совокупности порядками элементов, а F_n – свободная абелева группа ранга $n<\infty$. Там же показано, что если абелева группа G ($|G|>2$) имеет вид:

$$G = T_p + A, \tag{3}$$

где T_p – примарная группа с ограниченными в совокупности порядками элементов, A – группа с конечным числом образующих, то группа $G\in\mathcal{D}(111000)$.

Хотя группы вида (2) устроены весьма просто, вопрос о том, каковы все группы класса $\mathcal{D}(111000)$, остаётся пока открытым. Возможно, что он совпадает со всеми группами вида (2).

В работе[4] построены отдельные примеры примарных групп, принадлежащих классам $\mathcal{D}(111110)$, $\mathcal{D}(111111)$, $\mathcal{D}(000110)$, $\mathcal{D}(000111)$.

В настоящей работе получены некоторые достаточные условия, при которых абелева группа обладает или не обладает наследственно сильно приводимой системой образующих (тип (УI)). Это позволило доказать теоремы вложения для классов $\mathcal{D}(111110)$, $\mathcal{D}(111111)$, $\mathcal{D}(000111)$. Из теорем следует, что для любой абелевой группы G в каждом из указанных классов существует группа, содержащая G в качестве прямого слагаемого. Полученные результаты могут рассматриваться и как достаточные условия принадлежности абелевых групп к классам $\mathcal{D}(111110)$, $\mathcal{D}(111111)$, $\mathcal{D}(000111)$.

Далее нами описаны все счётные периодические группы классов $\mathcal{D}(000110)$, $\mathcal{D}(000111)$. Найдены также некоторые виды счётных непериодических групп класса $\mathcal{D}(000110)$. Показано, что каждая абелева группа с конечным числом образующих может быть вложена в качестве прямого слагаемого в некоторую счётную группу класса $\mathcal{D}(000110)$. Аналогичные утверждения доказаны и для классов $\mathcal{D}(111000)$, $\mathcal{D}(111110)$, $\mathcal{D}(111111)$, $\mathcal{D}(000111)$.

2. Далее всюду под группами мы будем подразумевать абелевы группы. Через $\bar{g}$ и $\bar{\mathcal{D}}$ будем обозначать образы элемента g и подмножества $\mathcal{D}$ группы G в фактор-группе $\bar{G} = G/A$. Символ „$\subset$" употребляется нами для обозначения строгого вложения подмножеств, в отличие от „$\subseteq$". Множество, состоящее из элементов g_λ, $\lambda \in \Lambda$, будем обозначать через $[g_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$, а разность некоторого множества $\mathcal{D}$ и одноэлементного множества g – через $\mathcal{D}\setminus g$. Для обозначения прямой суммы групп мы употребляем знаки „$+$" и „$\sum$".

Пусть $\mathcal{D}$ – система образующих некоторой группы G $(G = \{\mathcal{D}\})$.

<u>Определение I.</u> $\mathcal{D}$ – <u>неприводима</u>, если соотношение

$$g \in \{\mathcal{D}\setminus g\} \tag{4}$$

не выполняется ни для одного элемента $g \in \mathcal{D}$. В противном случае $\mathcal{D}$ – <u>приводима.</u>

<u>Определение 2.</u> $\mathcal{D}$ – <u>сильно приводима,</u> если соотношение (4) выполняется для любого элемента $g \in \mathcal{D}$.

<u>Определение 3.</u> $\mathcal{D}$ – <u>наследственно приводима</u>, если приводима всякая подсистема $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$, порождающая $G = \{\mathcal{D}\}$.

<u>Определение 4.</u> $\mathcal{D}$ – <u>наследственно сильно приводима</u>, если сильно приводима всякая подсистема $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$, которая порождает $G = \{\mathcal{D}\}$.

П. О группах с системами образующих типа (УI)

Лемма I. Если все прямые слагаемые A_λ группы

$$G = \sum_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$$

обладают системами образующих $\mathcal{D}_\lambda$ типа (УI), то

$$\mathcal{D} = \dot{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}} \mathcal{D}_\lambda \text{ —}$$

система образующих типа (УI) группы G.

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{D}_\lambda$ и $\{\mathcal{D}'\} = G$. Тогда, ввиду разложения $G = \sum_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, $\mathcal{D}' = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{D}'_\lambda$, где $\mathcal{D}'_\lambda \subseteq \mathcal{D}_\lambda$ и $\{\mathcal{D}'_\lambda\} = A_\lambda$, для всех $\lambda \in \Lambda$. По условию, все системы $\mathcal{D}_\lambda$ наследственно сильно приводимы. Следовательно, все системы $\mathcal{D}'_\lambda$ сильно приводимы. Поэтому система $\mathcal{D}' = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{D}'_\lambda$ сильно приводима, так как $\mathcal{D}'_{\lambda_1} \cap \mathcal{D}'_{\lambda_2} = \varnothing$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (можно считать, что $0 \bar{\in} \mathcal{D}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$). Лемма доказана.

Лемма 2. Если система образующих $\mathcal{D}$ группы G наследственно сильно приводима, то для любой истинной подгруппы $\{\mathcal{D}_0\} \subset G$, где $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, система образующих $\overline{\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0}$ фактор-группы $G/\{\mathcal{D}_0\}$, также наследственно сильно приводима.

Доказательство. Допустим, что система $\overline{\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0}$ не наследственно сильно приводима. Тогда она должна содержать некоторую не сильно приводимую подсистему $\mathcal{D}_1$, которая также порождает $G/\{\mathcal{D}_0\}$. Иными словами, должен существовать такой элемент $\bar{a} \in \bar{\mathcal{D}}_1$, что $\bar{a} \in \{\bar{\mathcal{D}}_1 \setminus \bar{a}\}$. Если теперь в качестве $\mathcal{D}_1$ и a взять прообразы $\bar{\mathcal{D}}_1$ и $\bar{a}$ в G, $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1 \ni a \in \bar{a}$, $\mathcal{D}_1 \cap \bar{a} = a$, то $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_0$ будет не сильно приводимой системой образующих группы G, содержащейся в $\mathcal{D}$. Действительно, $a \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_0$ и $a \in \{(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_0) \setminus a\}$, так как в $G/\{\mathcal{D}_0\}$

$$\bar{a} \in \{\bar{\mathcal{D}}_1 \setminus \bar{a}\}.$$

Таким образом, мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Теорема I. Если группа $G = A + B$, где B – полная группа, $A = \{M\}$, $r(B) \geq |M|$, то G обладает наследственно сильно приводимой системой образующих.

Доказательство. Рассмотрим самый простой случай, когда $A = \{a\} \neq 0$ и $r(B) = 1$. Пусть $O(a) = m$, $m \leq \infty$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k, \dots\}$, где элементы b_k удовлетворяют соотношениям

$$pb_1 = 0, \quad b_1 = pb_2, \quad \dots, \quad b_k = pb_{k+1}, \quad \dots, \tag{5}$$

если $B \cong C(p^\infty)$, или соотношениям

$$b_1 = 2b_2, \quad b_2 = 3b_3, \quad \dots, \quad b_k = (k+1)b_{k+1}, \quad \dots \tag{6}$$

если группа B изоморфна аддитивной группе рациональных чисел.

Покажем, что во всех случаях множество

$$C = [c_i]_{1 \le i < \infty}, \text{ где } c_i = a + b_i,$$

является системой образующих типа (УI) для группы $G = \{a\} + B$. Это будет следовать из того, что всякая счётная подсистема C также порождает G (вообще, любая система образующих G должна быть счётной).

Действительно, пусть C' -некоторая счётная подсистема C. Если $O(a) = m < \infty$, то

$$\{C'\} \supseteq m\{C'\} = B.$$

Так как C' содержит некоторый элемент $c_k = a + b_k$ и $b_k \in B \subseteq \{C'\}$, то $a \in \{C'\}$. Следовательно, $\{C'\} = G$. Если $O(a) = \infty$ и $C' = [c_{k_i}]_{1 \le i < \infty}$ $(k_i < k_j$ при $i < j)$, то, при выполнении соотношений (5) для элементов b_i,

$$c_{k_i} - c_{k_{i+1}} = b_{k_i} - b_{k_{i+1}} = \left(p^{(k_{i+1} - k_i)} - 1\right) b_{k_{i+1}},$$

$i = 1, 2, \cdots$, и

$$\{C'\} \supseteq \{[(c_{k_i} - c_{k_{i+1}})]_{1 \le i < \infty}\} = B.$$

Как и в предыдущем случае, элемент $a \in \{C'\}$. То есть, $\{C'\} = G$. Пусть теперь $O(a) = \infty$, $C' = [c_{k_i}]_{1 \le i < \infty}$, где номера k_i образуют возрастающую последовательность, а элементы b_i удовлетворяют соотношениям (6). Множество $[b_{k_i}]_{1 \le i < \infty}$ является системой образующих группы B.

Если $a \in \{C'\}$, то $\{C'\} = G$, так как $b_{k_i} = c_{k_i} - a$ $(1 \le i < \infty)$. Рассмотрим разность

$$((k_1+1)\cdot\ldots\cdot k_2)c_{k_2} - c_{k_1} = (((k_1+1)\cdots k_2)-1)a = sa \in \{C'\}.$$

Если $s \neq 1$, то найдётся элемент $c_{k_j} \in C'$ с номером $k_j \geqslant s \cdot k_2$. Элемент

$$((k_2+1)\cdots(s\cdot k_2)\cdots k_j)c_{k_j} - c_{k_2} =$$
$$= (((k_2+1)\cdots(s\cdot k_2)\cdots k_j)-1)a = ta \in \{C'\}$$

и $((t,s)) = 1$. Следовательно, $a \in \{C'\}$.

Таким образом, мы показали, что *для случая* $r(B) = 1$ утверждение теоремы справедливо. Перейдём теперь к общему случаю. Пусть $G = A + B$, где

$$A = \{M\}, \quad M = [a_\lambda]_{\lambda \in \Lambda},$$
$$r(B) \geqslant |M| = |\Lambda|.$$

Тогда G можно представить в виде прямой суммы $G = A + \sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda + B'$, где все B_λ – полные группы ранга I, а B' – *некоторая полная группа*. Покажем, что группа $G' = A + \sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ обладает системой образующих типа (УI).

Отсюда, в силу леммы I, будет следовать утверждение теоремы, поскольку прямое слагаемое B' либо равно нулю, либо, как ненулевая полная группа, обладает системой образующих типа (УI).

Воспользуемся предыдущими построениями. Пусть, при каждом $\lambda \in \Lambda$,

$$B_\lambda = \{ b_{\lambda 1}, b_{\lambda 2}, \dots, b_{\lambda k}, \dots \},$$

где элементы $b_{\lambda i}$ удовлетворяют соотношениям типа (5) или (6). Построим множества $C_\lambda = [c_{\lambda i}]_{1 \le i < \infty}$, $\lambda \in \Lambda$, элементы которых

$$c_{\lambda i} = a_\lambda + b_{\lambda i} .$$

Объединение этих множеств $C = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ и является системой образующих типа (УI) для группы $G' = A + \sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$. Действительно, всякая подсистема $C' \subseteq C$, порождающая G', должна иметь вид $C' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C'_\lambda$, где подсистемы $C'_\lambda \subseteq C_\lambda$ – счётны, при каждом $\lambda \in \Lambda$. В этом легко убедиться, рассмотрев фактор-группу $\bar{G}' = G'/A \cong \sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ и её систему образующих $\bar{C} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bar{C}_\lambda$. С другой стороны, если, при всех $\lambda \in \Lambda$, подсистемы $C'_\lambda \subseteq C_\lambda$ и являются счётными, то, как было показано выше,

$$\{ C'_\lambda \} = \{ C_\lambda \} = \{ a_\lambda \} + B_\lambda .$$

Поэтому

$$\{ C' \} = \{ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C'_\lambda \} \supseteq \{ [a_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}, \sum_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \} = G'.$$

Отсюда видно, что всякая подсистема C, порождающая G', сильно приводима, то есть C – система образующих типа (УI) группы G'.

Теорема доказана.

Теорема 2. Всякая счётная группа, содержащая подгруппу без кручения ранга I, тип которой содержит символ ∞ на бесконечном множестве мест, обладает системой образующих типа (УI).

Доказательство. Пусть группа $G \supseteq B$, где B – группа без кручения ранга I указанного выше типа. Сама группа B, как объединение возрастающей последовательности циклических подгрупп, обладает системой образующих типа (УI). Поэтому будем считать, что $B \subset G$. Для некоторого элемента $0 \neq b \in B$ разрешимы уравнения:

$$b = p^k b_k\ ,\quad 1 \leq k < \infty\ ,\quad b_k \in B\ ,$$

$$b = p_i^k b_{ik}\ ,\quad 1 \leq k < \infty\ ,\quad b_{ik} \in B\ ,$$

где p, p_i $(i = 1, 2, \cdots)$ – различные простые числа.

Фактор-группа $G/\{b\}$ представима в виде

$G/\{b\} = B' + \sum\limits_{i=1}^{\infty} B_i + A$, где

$$B' = \{ [\bar{b}_k]_{1 \le k < \infty} \} \cong C(p^\infty),$$

$$\bar{b}_k = b_k + \{b\}, \quad 1 \le k < \infty,$$

$$B_i = \{ [\bar{b}_{ik}]_{1 \le k < \infty} \} \cong C(p_i^\infty), \quad \bar{b}_{ik} = b_{ik} + \{b\},$$

$$1 \le i, k < \infty,$$

A – некоторое, не более, чем счётное дополнительное прямое слагаемое. Подгруппа $\sum_{i=1}^{\infty} B_i + A$ обладает некоторой системой образующих $\bar{\mathcal{D}}$ типа (УІ), ввиду теоремы I. Пусть $\mathcal{D}$ состоит из прообразов всех элементов $\bar{\mathcal{D}}$ в G. Покажем, что множество $\mathcal{D}_1 = ([b_k]_{1 \le k < \infty}) \cup \mathcal{D}$ является системой образующих типа (УІ) группы G. Группа $G = \{\mathcal{D}_1\}$, так как $b \in \{\mathcal{D}_1\}$ и $\mathcal{D}_1$ состоит из представителей элементов системы образующих $G/\{b\}$. Пусть $\mathcal{D}_1' \subseteq \mathcal{D}_1$ – некоторая подсистема $\mathcal{D}_1$, порождающая G. Пересечение $\mathcal{D}_1' \cap ([b_k]_{1 \le k < \infty})$, очевидно, счётно, а $\bar{\mathcal{D}}'$, образ $\mathcal{D}' = \mathcal{D}_1' \cap \mathcal{D}$ в $G/\{b\}$, порождает $\{\bar{\mathcal{D}}\} = \sum_{i=1}^{\infty} B_i + A$. Для любого

$$b_t \in \mathcal{D}_1' \cap ([b_k]_{1 \le k < \infty}),$$

$p^t b_t = b$, то есть $b \in \{\mathcal{D}_1' \setminus \mathcal{D}'\}$. Если b_s и b_t – – различные элементы из $\mathcal{D}_1' \cap ([b_k]_{1 \le k < \infty})$, $s < t$, то $b_s = p^{t-s} b_t$. Если некоторый элемент $a \in \mathcal{D}'$, то в $G/\{b\}$ его образ $\bar{a} \in \{\bar{\mathcal{D}}' \setminus \bar{a}\}$, так как $\bar{\mathcal{D}}' \subseteq \bar{\mathcal{D}}$ и, следовательно, сильно приводима. Поэтому, для a выполняется соотношение

$$a \in \{(\mathcal{D}' \setminus a), b\} \subset \{\mathcal{D}_1' \setminus a\}.$$

Таким образом, показано, что система $\mathcal{D}_1'$ сильно приводима. Следовательно, $\mathcal{D}_1 \supseteq \mathcal{D}_1'$ – система образующих типа (УI) группы G. Теорема доказана.

Теорема 3. Если группа $G = A + B$, где B – непериодическая полная группа и $|B| \geqslant |A|$, то G обладает системой образующих типа (УI).

Доказательство. По условию, группу B можно представить в виде

$$B = R + B',$$

где прямое слагаемое R изоморфно аддитивной группе рациональных чисел. То есть $G = (A + R) + B'$.

Если $|A| < \aleph_0$, то прямое слагаемое $A+R$, по теореме 2, обладает системой образующих типа (УI). Следовательно, ввиду леммы I, группа G имеет систему образующих типа (УI), поскольку B' – полная группа. Если $|A| > \aleph_0$, то $r(B) = |B| \geqslant |A|$. В этом случае группа G удовлетворяет условию теоремы I и поэтому обладает системой образующих типа (УI).

Теорема доказана.

Приведём некоторые следствия, вытекающие из теорем I,2,3.

Следствие 1. Все счётные группы без кручения классов $\mathcal{D}(11110)$ и $\mathcal{D}(000110)$ редуцированы. Более того, они не имеют элементов, типы которых содержат символ ∞ на бесконечном множестве мест.

Следствие 2. Если счётная периодическая группа принадлежит классу $\mathcal{D}(11110)$ или $\mathcal{D}(000110)$, то ранг её полной части конечен.

Следствие 3. Полная часть всякой счётной смешанной группы, принадлежащей к $\mathcal{D}(11110)$ или к $\mathcal{D}(000110)$, является периодической группой конечного ранга.

Следствие 4. Если несчётная группа G принадлежит классу $\mathcal{D}(11110)$ или $\mathcal{D}(000110)$, то G не содержит ни одной равномощной полной подгруппы.

Ш. О расширениях с помощью групп, обладающих системами образующих типа (I)

Прежде всего, мы приведём без доказательства теорему 4 (Кхаббаз[6]) и теоремы 5,6 (Сойфер[8,9]). Эти результаты нам потребуются в дальнейшем.

Теорема 4. Пусть T – периодическая абелева группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) T обладает неприводимой системой образующих;

2) T имеет ту же мощность, что и её базисная подгруппа;

3) T обладает прямым слагаемым, которое является прямой суммой циклических групп и имеет ту же мощность, что и T.

Под базисной подгруппой непримарной периодической группы здесь подразумевается прямая сумма базисных подгрупп всех её примарных компонент.

Теорема 5. Пусть группа $G \supset A = \{M\}$, $G/A \cong B$ и $|B| > |M|$. Группа G обладает системой образующих типа (I) тогда и только тогда, когда группа B обладает системой образующих типа (I).

Теорема 6. Если группа $G = A + B$, $|B| \geqslant |A|$ и группа B обладает бесконечной неприводимой системой образующих, то и группа G обладает неприводимой системой образующих.

Из теорем 4 и 5 вытекают следующие утверждения.

Следствие 5. Счётная периодическая группа

$$T \in \mathcal{D}(000110) \cup \mathcal{D}(000111)$$

тогда и только тогда, когда она имеет вид:

$T = T_1 + T_2$, где $T_1 \neq 0$ – конечная группа, а $T_2 \neq 0$ – полная группа.

Следствие 6. Если группа $G \supset A = \{M\}$, $G/A \cong B$, B – полная группа и $|B| > |M|$, то G не обладает неприводимой системой образующих.

Приведём два следствия из теоремы 6.

Следствие 7. Если группа G разлагается в прямую сумму

$$G = F + A,$$

где F – прямая сумма циклических групп и $r(F) = |G|$, то G обладает системой образующих типа (I).

Следствие 8. Группы классов $\mathcal{D}(000110)$ и $\mathcal{D}(000111)$ не содержат равномощных им прямых слагаемых из $\mathcal{D}(111110)$,

$\mathcal{D}(111111)$ и равномощных им прямых слагаемых бесконечного ранга из $\mathcal{D}(111000)$.

Докажем следующее утверждение.

<u>Теорема 7.</u> Если A – подгруппа группы G, $|G/A| > |A|$ и $G/A \cong T + F_n$ – группа вида (2), то G обладает системой образующих типа (I) и не обладает системой образующих типа (УI).

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из теоремы 5, так как G/A – прямая сумма циклических групп и $|G/A| > |A|$. Для доказательства второго утверждения мы воспользуемся тем обстоятельством, что группы типа (2) а, следовательно, и любые их фактор-группы, не обладают системами образующих типа (УI) (см./7/).

Допустим, что группа G имеет систему образующих типа (УI) – $\mathcal{D}$. Тогда $|G| \geqslant \aleph_0$ и должна существовать такая подсистема $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, $|\mathcal{D}_0| < |\mathcal{D}|$, что $\{\mathcal{D}_0\} \supseteq A$ (например, $\mathcal{D}_0 = \bigcup_{a \in A} \mathcal{D}_a$, где $\mathcal{D}_a \subset \mathcal{D}$, $a \in \{\mathcal{D}_a\}$, $|\mathcal{D}_a| < \infty$). Фактор-группа $G/\{\mathcal{D}_0\}$ должна обладать системой образующих типа (УI) (см. Лемму 2). Но, в то же время, $G/\{\mathcal{D}_0\}$, как гомоморфный образ группы типа (2), является группой типа (2). А такие группы не обладают системами образующих типа (УI).

Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

IV. Теоремы вложения

1. О классах $\mathcal{D}(100000)$, $\mathcal{D}(110000)$, $\mathcal{D}(000001)$.

Ввиду известных результатов (см. Введение), можно указать все группы G, вложимые в качестве прямого слагаемого в группы каждого из этих трёх классов:

$$\mathcal{D}(100000) — G=0,$$

$$\mathcal{D}(110000) — G\cong C(2) \text{ или } G=0,$$

$$\mathcal{D}(000001) — G \text{ - любая полная группа.}$$

2. О вложениях в группы класса $\mathcal{D}(111000)$.

Теорема 8. Группа G является прямым слагаемым некоторой группы $G'\in\mathcal{D}(111000)$, тогда и только тогда, когда $G\in\mathcal{D}(111000)$ или $|G|\leqslant 2$.

Доказательство. Если группа $G'=G+G_1\in\mathcal{D}(111000)$, то G не обладает наследственно приводимыми системами образующих (см. [7]). Следовательно,

$$G\in\mathcal{D}(100000)\cup\mathcal{D}(110000)\cup\mathcal{D}(111000).$$

То есть. $G \in \mathcal{D}(111000)$ или $|G| \leqslant 2$.

С другой стороны, если группа $G \in \mathcal{D}(111000)$ или $|G| \leqslant 2$, то при $G' = G + \{a\}$ $(o(a) > 2)$ группа $G' \in \mathcal{D}(111000)$ (см. /7/). Теорема доказана.

Теорема 9. Всякая группа A с конечным числом образующих может быть вложена в некоторую счётную группу $G' \in \mathcal{D}(111000)$ в качестве прямого слагаемого.

Доказательство. Пусть P — счётная примарная группа с ограниченными в совокупности порядками элементов.

Тогда $G' = A + P$ – группа вида (3) и, следовательно, $G' \in \mathcal{D}(111000)$ (см. /7/). Утверждение доказано.

3. О вложениях в группы класса $\mathcal{D}(111110)$.

Теорема IO. Любая группа A с конечным числом образующих может быть вложена в некоторую счётную группу $G' \in \mathcal{D}(111110)$ в качестве прямого слагаемого.

Доказательство. Пусть $G_1 \cong C(p^{\infty}) + \sum_{i=1}^{\infty} C_i(p)$ (p – простое число). Покажем, что, при $G' = A + G_1$, $G' \in \mathcal{D}(111110)$. Известно, что $G_1 \in \mathcal{D}(111110)$ (см. /4/). Поэтому G' имеет неприводимую систему образующих (см. теорему 6) и наследственно приводимые системы образующих (см. /7/). То есть

$$G' \in \mathcal{D}(111110) \cup \mathcal{D}(111111).$$

Остаётся показать, что G' не обладает системой образующих типа (УI). Допустим противное. Пусть $\mathcal{D}$ – система образующих типа (УI) группы G'. Тогда существует такая конечная подсистема $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, что $\{\mathcal{D}_0\} \supseteq A$.
Ввиду леммы 2 фактор-группа $G'/\{\mathcal{D}_0\}$ должна обладать системой образующих типа (УI). Но

$$G'/\{\mathcal{D}_0\} \cong G_1/(\{\mathcal{D}_0\} \cap G_1) \cong G_1 .$$

А группа G_1 не обладает системой образующих типа (УI). Мы пришли к противоречию. Следовательно, $G' \in \mathcal{D}(111110)$.
Теорема доказана.

<u>Теорема II.</u> Для любой группы G и любого кардинального числа $\mathfrak{m} > |G|\aleph_0$ существует группа $G' \in \mathcal{D}(111110)$ мощности $\mathfrak{m}$, содержащая G в качестве прямого слагаемого. Если $G_1 \cong T + F_{\mathfrak{m}}$ – некоторая группа типа (2) мощности $\mathfrak{m}$, а

$$G_2 = \begin{cases} G, \text{ если } G \notin \mathcal{D}(111000) \text{ и } |G| > 2, \\ G + C(p^\infty), \text{ если } G \in \mathcal{D}(111000) \text{ или } |G| \leq 2, \end{cases} \tag{7}$$

то группа $G' = G_1 + G_2 \in \mathcal{D}(111110)$.

Доказательство. Для любой группы G группа G_2, определённая соотношением (7), не принадлежит к

$$\mathcal{D}(100000) \cup \mathcal{D}(110000) \cup \mathcal{D}(111000).$$

То есть группа G_2 обладает наследственно приводимой системой образующих. Следовательно, и группа $G' = G_1 + G_2$ обладает наследственно приводимыми системами образующих (см. /7/). С другой стороны, по теореме 7, у группы G' есть системы образующих типа (I) и нет систем образующих типа (УI). Поэтому группа $G' = G_1 + G_2 \in \mathcal{D}(111110)$ и содержит подгруппу G в качестве прямого слагаемого. Теорема доказана.

4. О вложениях в группы класса $\mathcal{D}(111111)$.

Теорема I2. Для любой группы G и любого кардинального числа $m \geqslant |G| \aleph_0$, группа $G' = G + G_1 + G_2 \in \mathcal{D}(111111)$, где G_1 – обладает бесконечной неприводимой системой образующих (в частности, G_1 – прямая сумма циклических групп), а G_2 – полная группа и $|G_1| = \tau(G_2) = m$. При $|G| \leqslant \aleph_0$, в качестве G_2 можно взять аддитивную группу рациональных чисел, а в качестве G_1 – любую счётную группу, обладающую бесконечной неприводимой системой образующих.

Доказательство. Пусть G – некоторая группа, $|G| \aleph_0 \leqslant m$, а $G' = G + G_1 + G_2$, где G_1 и G_2 удовлетворяют условию теоремы.

Тогда группа G' обладает неприводимой системой образующих (см. теорему 6) и наследственно сильно приводимой системой образующих (см. теорему I). То есть группа $G' \in \mathcal{D}(111111)$ (см. (1')). Если $|G| \leqslant \aleph_0$, G_1 – счётная группа, обладающая бесконечной неприводимой системой образующих, а G_2 изоморфна аддитивной группе рациональных чисел, то группа $G' = G + G_1 + G_2$, ввиду теоремы 6, обладает неприводимой системой образующих. По теореме 2, группа G' имеет систему образующих типа (VI). Следовательно, $G' \in \mathcal{D}(000111)$. Теорема доказана.

<u>Замечание</u>. Теорема 12 допускает возможность выбора группы G', соответственно, примарной, периодической, смешанной или без кручения, если таковой является группа G.

5. <u>О вложениях в группы класса $\mathcal{D}(000111)$</u>

<u>Теорема 13.</u> Если группа $G = \{a_1, \dots, a_n\} \neq 0$, $n < \infty$, то, для любой полной группы G_1 ранга $m \geq n$, группы $G' = G + G_1$ и $G'' \cong G + R$, где R – аддитивная группа рациональных чисел, принадлежат классу $\mathcal{D}(000111)$.

Доказательство. Ввиду следствия 6, в группах G' и G'' нет неприводимых систем образующих. Из теорем 1 и 2 следует, что эти группы обладают системами образующих типа (VI). Кроме того, группы G' и G'' обладают системами образующих типа (IV) и (V), так как не являются полными. Отсюда мы заключаем, что

$$G', G'' \in \mathcal{D}(000111)$$

(см. (1')). Теорема доказана.

Теорема 14. Для любой неполной группы G всякая группа вида $G' = G + G_1 \in \mathcal{D}(000111)$, где G_1 – полная группа мощности $m > |G| \aleph_0$. Если G – полная группа, то группа $G'' = G + C(m) \in \mathcal{D}(000111)$, при любом m, $1 < m \leqslant \infty$.

Доказательство. Второе утверждение теоремы является следствием теоремы 13. Если группа G – неполная, то и группа $G' = G + G_1$ – неполная, где G_1 удовлетворяет условию теоремы. Так как $|G_1| = \mathfrak{m} > |G|\aleph_0 \geqslant \aleph_0$, то $r(G_1) = \mathfrak{m} > |G|$. Применяя теорему I к группе $G' = G + G_1$, получаем, что у неё есть система образующих типа (УI). В то же время группа G' не обладает неприводимыми системами образующих, ввиду следствия 6. Итак, G' – неполная группа, обладающая системами образующих типа (УI) и не обладающая системами типа (I). Следовательно, (см. ($1'$)), $G' \in \mathcal{D}(000111)$. Теорема доказана.

Замечание. Теоремы 13 и 14 допускают возможность выбора группы G', содержащей G в качестве прямого слагаемого, соответственно периодической, примарной, без кручения или смешанной, если таковой является группа G.

У. О некоторых группах классов $\mathcal{D}(000110)$ и $\mathcal{D}(000111)$.

I. О счётных периодических группах класса $\mathcal{D}(000110)$

Класс $\mathcal{D}(000110)$ содержит все примарные группы типа $C(p) + C(p) + C(p^\infty)$ (Длаб/4/). Ниже список групп этого класса будет расширен. Однако, пока для $\mathcal{D}(000110)$ мы не располагаем теоремами, аналогичными тем, которые получены для других классов. Возможно, что $\mathcal{D}(000110)$ содержит только счётные группы.

Счётные периодические группы класса $\mathcal{D}(000110)$ допускают полное описание. Всякая такая группа G должна иметь вид

$$G = G_1 + G_2,$$

где $G_1 \neq 0$ – конечная группа, а $G_2 \neq 0$ — -полная группа ввиду следствия 5. Введём обозначение

$$m(G_1) = \max_{1 \leq i \leq n} \{ r_{p_i}(G_1) \}, \tag{8}$$

где p_i $(1 \leq i \leq n < \infty)$ – простые числа, соответствующие разложению G_1 на примарные компоненты. Очевидно, что конечная группа G_1 разлагается в прямую сумму $m(G_1)$ циклических групп. Из теоремы I следует, что при $r(G_2) \geq m(G_1)$ группа G должна обладать системой образующих типа (YI). Поэтому для интересующих нас групп класса $\mathcal{D}(000110)$ должно выполняться соотношение

$$r(G_2) < m(G_1).$$

Это приводит нас к следующему утверждению.

<u>Теорема I5</u>. Счётная периодическая группа $G \in \mathcal{D}(000110)$ тогда и только тогда, когда она имеет вид:

$$G = G_1 + G_2, \tag{9}$$

где $G_1 \neq 0$ – конечная группа,

$G_2 \neq 0$ – полная периодическая группа ранга

$$r(G_2) < m(G_1) .$$

Доказательство. Благодаря предыдущим рассмотрениям достаточно показать, что группы вида (9) не обладают системами образующих типа (УI). Для этого воспользуемся методом индукции. Пусть группа $G = G_1 + G_2$ имеет вид (9) и $r(G_2) = 1$, то есть $G_2 \cong C(p^\infty)$, а $m(G_1) \geq 2$. Предположим, что $\mathcal{D}$ – система образующих типа (УI) группы G. Если $\mathcal{D} = [a_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$, то каждый её элемент a_λ можно представить в виде

$$a_\lambda = a_\lambda' + a_\lambda'' , \text{ где } a_\lambda' \in G_1 , \ a_\lambda'' \in G_2 .$$

Из $\mathcal{D}$ можно выделить счётную подсистему $\mathcal{D}_1 = [a_\lambda]_{\lambda \in \Lambda_1}$, состоящую из элементов a_λ с различными компонентами $a_\lambda'' \neq 0$. Так как группа G_1 конечна, то при $\lambda \in \Lambda_1$, a_λ' принимает только конечное множество значений. Следовательно, из $\mathcal{D}_1$ можно выделить счётную подсистему $\mathcal{D}_1' = [a_\lambda]_{\lambda \in \Lambda_1'}$ $(\Lambda_1' \subseteq \Lambda_1)$, все элементы которой имеют одну и ту же компоненту $a_\lambda' = a \in G_1$. То есть элементы a_λ, $\lambda \in \Lambda_1'$ имеют вид:

$$a_\lambda = a + a_\lambda'' ,$$

где $[a_\lambda'']_{\lambda\in\Lambda_1}$ – система образующих группы $G_2\cong C(p^\infty)$. Поэтому (см. доказательство теоремы I)

$$\{\mathcal{D}_1'\}=\{a\}+G_2$$

и $\{\mathcal{D}_1'\}\subset G$, поскольку $m(G_1)\geqslant 2$. Далее, фактор-группа $G/\{\mathcal{D}_1'\}$ должна обладать системой образующих типа (УI), так как $\mathcal{D}\supset\mathcal{D}_1'$ (Лемма 2). Но $G/\{\mathcal{D}_1'\}\cong G_1/\{a\}$ – конечная группа и не может обладать системой образующих типа (УI). Полученное противоречие доказывает наше утверждение при $\tau(G_2)=1$. Допустим, что это утверждение доказано для всех групп вида (9) с $\tau(G_2)<K$ $(k>1)$. Рассмотрим группу $G=G_1+G_2$ вида (9), у которой $\tau(G_2)=K$. Предположим, что $\mathcal{D}=[c_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ – система образующих типа (УI) группы G. Представим G_2 в виде прямой суммы $G_2=G_2'+G_2''$, где $G_2'\cong C(q^\infty)$ (q – простое число). Элементы c_λ, $\lambda\in\Lambda$, соответственно, можно представить в виде

$$c_\lambda=c_\lambda^{(1)}+c_\lambda^{(2)}+c_\lambda^{(3)},$$

где

$$c_\lambda^{(1)}\in G_1,\quad c_\lambda^{(2)}\in G_2',\quad c_\lambda^{(3)}\in G_2''.$$

Так же как и в случае $\tau(G_2)=1$, из $\mathcal{D}$ можно выделить такую счётную подсистему $\mathcal{D}_1=[c_\lambda]_{\lambda\in\Lambda_1}$, что, при всех $\lambda\in\Lambda_1$, $c_\lambda^{(1)}=c\in G_1$, а $[c_\lambda^{(2)}]_{\lambda\in\Lambda_1}$ – система образующих подгруппы G_2'. Пересечение $\{\mathcal{D}_1\}\cap G_2$ – бесконечно, так как при $lc=0$, $l\{\mathcal{D}_1\}\subseteq G_2$ и порядки элементов группы $l\{\mathcal{D}_1\}$ не ограничены в совокупности. Следовательно, группа $\{\mathcal{D}_1\}\cap G_2$ содержит, по крайней мере, одно прямое слагаемое группы G_2 типа $C(p^\infty)$ и $\tau(G_2/(\{\mathcal{D}_1\}\cap G_2))<K$. Группа $\{\mathcal{D}_1\}\subset G=G_1+G_2$, так как $\{\mathcal{D}_1\}\cap G_1\subseteq\{c\}$, а $m(G_1)>1$. Фактор-группа

$$\bar{G}=G/\{\mathcal{D}_1\}=\left\{\{G_1,\mathcal{D}_1\}/\{\mathcal{D}_1\},\{G_2,\mathcal{D}_1\}/\{\mathcal{D}_1\}\right\}$$

должна обладать системой образующих типа (УI), поскольку $\mathcal{D}_1\subset\mathcal{D}$ (см. Лемму 2). Следовательно, её полная часть

$$\bar{G}_2=\{G_2,\mathcal{D}_1\}/\{\mathcal{D}_1\}\cong G_2/(\{\mathcal{D}_1\}\cap G_2)$$

не равна нулю. Группа $\bar{G}=\bar{G}_1'+\bar{G}_2$, где $\bar{G}_1'\cong G_1/\{c\}$, так как $\{G_2,\mathcal{D}_1\}=\{c\}+G_2$ и, следовательно,

$$\bar{G}/\bar{G}_2\cong G/\{G_2,\mathcal{D}_1\}\cong G_1/\{c\}.$$

Для группы $\bar{G}$ выполняются соотношения:

$$m(\bar{G}_1')\geqslant m(G_1)-1\geqslant K>\tau(\bar{G}_2)$$

$$(m(G_1)>K).$$

Поэтому, ввиду предположения индукции, она не может обладать системой образующих типа (УI). Мы пришли к противоречию. Следовательно, наше утверждение верно при любом $K \geq 1$, т.е. группы вида (9) не обладают системами образующих типа (УI).

Теорема доказана.

2. О счётных периодических группах класса $\mathcal{D}(000111)$

Теорема 16. Счётная периодическая группа $G \in \mathcal{D}(000111)$ тогда и только тогда, когда она имеет вид:

$$G = G_1 + G_2 \quad , \text{ где}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \neq G_1 \text{ – конечная группа} \\ 0 \neq G_2 \text{ – полная группа ранга} \\ r(G_2) \geq m(G_1) \end{array}\right. \qquad (10)$$

(см. (8)).

Доказательство. В силу следствия 5, счетная периодическая группа

$$G \in \mathcal{D}(000110) \cup \mathcal{D}(000111)$$

тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$G = G_1 + G_2 ,$$

где $0 \neq G_1$ – конечная группа, а $G_2 \neq 0$ – полная группа.

Класс $\mathcal{D}(000110)$ состоит из всех групп вида (9) (теорема 15), поэтому класс $\mathcal{D}(000111)$ состоит из всех групп вида (10). Теорема доказана.

Замечание. Для групп вида (10) не исключается возможность равенства $\tau(G_2)=\aleph_0$.

3. О счётных непериодических группах класса $\mathcal{D}(000110)$.

Обозначим через E класс всех абелевых групп без кручения ранга 1, каждая из которых имеет тип, содержащий символ ∞ на конечном множестве мест и 0 – на всех остальных. Если группа $G\in E$, то через $\ell(G)$ будем обозначать общее количество мест, на которых тип группы G содержит символ ∞. Для группы $G=0$ будем считать $\ell(G)=0$. Если группа $G=\sum_{i=1}^{n} R_i$ и $R_i\in E$, $1\leq i\leq n<\infty$, то положим

$$\ell(G)=\sum_{i=1}^{n}\ell(R_i).$$

Доопределим функцию $m(G)$ (см. (8)): $m(G)=0$, если $G=0$. Будем считать, что ранг нулевой группы равен нулю.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 17. Если абелева группа G имеет вид

$$G=G_1+G_2+G_3+G_4,$$

где

G_1 – конечная группа $(G_1 \supseteq 0)$

G_2 –полная периодическая группа $(G_2 \supseteq 0)$, (II)

G_3 – или равна 0 или свободная группа конечного ранга,

$G_4 = \sum_{i=1}^{n} R_i$, $R_i \in E$ $(1 \leq i \leq n < \infty)$ или $G_4 = 0$

и удовлетворяет соотношению

$$\infty > m(G_1) + r(G_3) > r(G_2) + \ell(G_4) \geq 1, \quad (12)$$

то $G \in \mathcal{D}(000110)$.

Доказательство. Если группа G удовлетворяет условию теоремы и $G_3 = G_4 = 0$, то G имеет вид (9) и принадлежит к $\mathcal{D}(000110)$ (теорема I5). Если $G_4 = \sum_{i=1}^{n} R_i$, $R_i \in E$, $R_i = \{e_i\}_*$, $1 \leq i \leq n < \infty$, то при $B = [e_i]_{1 \leq i \leq n}$, $G_4/\{B\}$ – полная периодическая группа ранга

$$r(G_4/\{B\}) = \ell(G_4).$$

Для любого простого числа p, фактор-группа G_3/A свободной группы G_3 по подгруппе $A = \{pa_1, \ldots, pa_k\}$, где $a_1, \ldots, a_k$ $(1 \leq k < \infty)$ – базис G_3, является примарной по p группой ранга $k = r(G_3)$. В частности, для любой конечной группы G_1, можно выбрать такое простое число p, что в силу определения функции $m(G)$ (см. (9))

$$m\left(\left(G_1+G_3\right)/A\right)=m\left(G_1\right)+m\left(G_3/A\right)=m(G_1)+7(G_3).$$

Из предыдущих рассуждений следует, что если группа G имеет вид (II) и удовлетворяет соотношению (I2), то, для некоторого конечного подмножества $S\subset G$ фактор-группа $\bar{G}=G/\{S\}$ имеет вид (9), то есть $\bar{G}\in\mathcal{D}(000110)$ (теорема I5). Предположим, что группа G обладает системой образующих типа (УI) — $\mathcal{D}$. Пусть $\mathcal{D}=[c_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$, а $\bar{\mathcal{D}}=[\bar{c}_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ – образ $\mathcal{D}$ в $\bar{G}=G/\{S\}$. Система образующих $\bar{\mathcal{D}}$ группы $\bar{G}$ не является наследственно сильно приводимой, так как $\bar{G}\in\mathcal{D}(000110)$. Поэтому существует такая подсистема $\bar{\mathcal{D}}_1\subset\bar{\mathcal{D}}$, $\bar{\mathcal{D}}_1=[\bar{c}_\lambda]_{\lambda\in\Lambda_1}$, что $\{\bar{\mathcal{D}}_1\}=\bar{G}$ и $\bar{\mathcal{D}}_1$ – не сильно приводима. Следовательно, $\mathcal{D}_1=[c_\lambda]_{\lambda\in\Lambda_1}$ — не сильно приводимая система образующих группы $\{\mathcal{D}_1\}$ и $\{\mathcal{D}_1\}\subset G$, поскольку $\mathcal{D}_1\subset\mathcal{D}$. Группа $G/\{\mathcal{D}_1\}$ должна обладать системой образующих типа (УI) (см. Лемму 2). С другой стороны, $G/\{\mathcal{D}_1\}$ – группа с конечным числом образующих, так как $G=\{S\cup\mathcal{D}_1\}$, и не может иметь систему образующих типа (УI). Из полученного противоречия следует, что группа G не обладает наследственно сильно приводимыми системами образующих. В то же время группа G не обладает неприводимыми системами образующих, как расширение конечнопорождённой подгруппы $\{S\}$ с помощью счётной группы $\bar{G} \in \mathcal{D}(000110)$ (см. теорему 5). Следовательно, группа $G \in \mathcal{D}(000110)$.

Теорема доказана.

Следствие 9. Всякое расширение группы A с конечным числом образующих с помощью группы $B \in \mathcal{D}(000110)$ принадлежит $\mathcal{D}(000110)$ (это утверждение содержится в доказательстве теоремы 17).

4. О вложениях в группы класса $\mathcal{D}(000110)$

Теорема 18. Для любой группы G с конечным числом образующих существует счетная группа $G' \in \mathcal{D}(000110)$, содержащая G в качестве прямого слагаемого.

Доказательство. Пусть $G_1 \simeq C(\infty) + C(\infty)$, а $G_2 \simeq C(p^\infty)$ (p – простое число). Тогда группа

$$G' = G + G_1 + G_2$$

удовлетворяет условию теоремы 17. Следовательно, $G' \in \mathcal{D}(000110)$. Теорема доказана.

VI. Заключение

На основе результатов главы IV и V, для каждого из следующих классов можно указать группы G, вложимые в качестве прямого слагаемого в некоторые группы этих классов:

$\mathcal{D}(100000)$ — $G = 0$

$\mathcal{D}(110000)$ — $G \cong C(2)$ или $G = 0$

$\mathcal{D}(111000)$ — $G \in \mathcal{D}(111000)$ или $|G| \leq 2$

$\mathcal{D}(111110)$ – любая группа G ;

$\mathcal{D}(111111)$ – любая группа G ;

$\mathcal{D}(000110)$ – любая группа G с конечным числом образующих;

$\mathcal{D}(000111)$ – любая группа G;

$\mathcal{D}(000001)$ – любая полная группа G

(для перечисленных классов, кроме $\mathcal{D}(000110)$, здесь указаны все такие группы).

Литература:

I. А.Г. Курош. Теория групп. Наука. Москва, 1967.
2. L.Fuchs. Abelian groups. Budapest,1958.
3. В. Длаб. Заметка к теории полных абелевых групп. Чехословацкий математический журнал 8(83), 1958, 54–61.
4. В. Длаб. Некоторые соотношения между системами образующих абелевых групп. Чехословацкий математический журнал 9(84) 1959, 161–169.
5. V.Dlab. On a characterization of primary abelian groups of bounded order. Journal London Math. Soc. 36(1961), 139–144.
6. S.Khabbaz. Abelian torsion groups having a minimal system of generators. Trans. Amer. Math. Soc. Vol.98, n 3, 1961.
7. В.М. Лебеденко. Абелевы группы со свойством (P). Сибирский математический журнал, т. XI, № 6, 1970. ВИНИТИ, 1971, № 1499–70 Деп.
8. А.Ю. Сойфер. Абелевы группы, обладающие неприводимыми системами образующих. Сибирский математический журнал т. XII, № 3, 1971.
9. А.Ю. Сойфер. Критерии существования неприводимых систем образующих у абелевых групп. IУ Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы докладов. Новосибирск, 1973 г. (213–221).

Рукопись поступила в издательский отдел
20 июля 1973 года.