ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 7242

С.И.Сердюкова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ДВУМЯ ГРАНИЦАМИ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

P5 - 7242

С.И.Сердюкова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ДВУМЯ ГРАНИЦАМИ

Направлено в ДАН СССР

Сердюкова С.И. **Р5 - 7242**

Об устойчивости разностных краевых задач с двумя границами

Исследуется устойчивость разностных краевых задач с двумя границами. Через G обозначен оператор перехода от слоя к слою. Для параболических систем доказывается оценка $\| G^n \| \le c_1$, $n \le c_2 N^{\omega}$, $\omega > 1$. Приводится пример параболической системы с порядком роста $\| G^n \| \asymp \sigma^{n/N^{\omega}}$, $\sigma > 1$, для гиперболических систем построены примеры с порядком роста $\| G^n \| \asymp \sigma^{n/N}$ и $\| G^n \| \asymp \frac{n}{N}$.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1973

Serdyukova S.I. **P5 - 7242**

On the Stability of Difference Boundary Value Problems with Two Boundaries

The stability of difference boundary value problems with two boundaries is studied. The estimate of $\| G^n \| \le C_1$, $n < C_2 N^{\omega}$, $\omega > 1$ (where G is the operator of transition from layer to layer) is proved for parabolic systems. An example of parabolic system with the growth order of $\| G^n \| \asymp \sigma^{n/N^{\omega}}$, $\sigma > 1$ is given, while for hyperbolic systems the examples with the growth order of $\| G^n \| \asymp \sigma^{n/N}$ and $\| G^n \| \asymp n/N$ are constructed.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1973

Рассматривается разностная краевая задача:

$$
\begin{cases}
v_{\nu}(t+\tau) = \sum\limits_{j=-r_1}^{r_2} A_j \, v_{\nu+j}(t), \quad t = n\tau \ge 0, \quad \nu = 1,2,\dots,N-1, \\
v_{\nu}(0) = f_{\nu}, \quad \sum\limits_{\nu=1}^{N-1} |f_{\nu}|^2 < \infty,
\end{cases} \qquad (1.a)
$$

$$
\begin{cases}
v_m(t) = \sum\limits_{j=1}^{s} C_{jm} \, v_j(t), \quad m = -r_1+1,\dots,0, \\
v_{N+k}(t) = \sum\limits_{j=1}^{t} D_{jk} \, v_{N-j}(t), \quad k = 0,\dots,r_2-1.
\end{cases} \qquad (1.b)
$$

Здесь $v_{\nu}(t)$ - векторы; A_j, C_{jm}, D_{jk} - постоянные матрицы; A_{-r_1}, A_{r_2} - невырожденные матрицы. Обозначим через $\mathcal{H}$ гильбертово пространство векторов $v = (v_{-r_1+1}, \dots, v_0, \dots, v_{N+r_2-1})$, удовлетворяющих краевым условиям /1b/. Норма в $\mathcal{H}$ дается соотношением

$$\| v \|^2 = \sum_{\nu=1}^{N-1} |v_{\nu}|^2 .$$

Разностная краевая задача /1/ устойчива, если существует постоянная c, не зависящая от τ, такая, что $\| v(t) \| \le c \, \| v(0) \|$ для всех $t \ge 0$ и всех $v(0) \subset \mathcal{H}$.

Запишем /1/ в операторном виде: $v(t+\tau) = G\, v(t)$. Исследование устойчивости /1/ сводится к оценке скорости роста $\| G^n \|$ при $n \to \infty$. Для устойчивости /1/ необходимо, чтобы оператор G не имел точек спектра вне единичного круга $|z| \le 1$ и чтобы были устойчивы следующие три задачи[1]: *a)* задача Коши; *b)* левая полубесконечная краевая задача; *c)* правая полубесконечная краевая задача. В настоящее время известны[2–6] необходимые и достаточные условия устойчивости задач *a)*, *b)*, *c)*. В общем случае из устойчивости задач *a)*, *b)*, *c)* следует ограниченность $\|G^n\|$ для $n\le cN$. В предлагаемой работе получены оценки скорости роста $\|G^n\|$ при $n\gg N$.

Дадим классификацию систем разностных уравнений. Если задача Коши устойчива, то собственные значения характеристической матрицы $\lambda(\phi)$ в окрестности определяющих точек ϕ_0 допускают[3] разложение вида

$$\lambda(\phi)=\exp\{i\psi_0+i\gamma(\phi-\phi_0)+i\sum_{j=p}^{2\mu}a_j(\phi-\phi_0)^j-\beta(\phi-\phi_0)^{2\mu}+\dots\}.$$

Здесь γ, a_j - действительные; $p\ge 2$, $\beta>0$. Систему разностных уравнений /1.a/ назовем "параболической", если $\gamma=0$ для всех $\lambda(\phi)$ относительно всех определяющих точек ϕ_0. В противном случае будем называть систему "гиперболической".

Т е о р е м а. Пусть *(1.a)* "параболическая система". Тогда, если G не имеет точек спектра вне единичного круга и задачи *a)*, *b)*, *c)* устойчивы, то $\|G^n\|\le c_1$ при $n\le c_2N^{\omega}$, где $\omega=\min(2\mu/2\mu-p+1)$. Минимум берется по всем $\lambda(\phi)$ и всем определяющим точкам ϕ_0. Так как $2\mu\ge p\ge 2$, то $\omega>1$.

З а м е ч а н и е. Простейшая разностная аппроксимация уравнения теплопроводности /см., например, [7], стр. 107/ дает пример "параболической системы" с "порядком параболичности" $\omega=2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Представим G^n в виде контурного интеграла от резольвенты:

$$G^n=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^n(G-zI)^{-1}dz.$$

Γ - произвольный контур, охватывающий все точки спектра оператора G. Так как спектр G лежит в единичном круге $|z|\le 1$, в качестве Γ можно взять окружность

$|z|=1+\rho$. Строим[4,6] явное представление резольвенты:

$$w_j^{I}=\sum_{\nu=1}^{j-1}M_{11}^{j-\nu-1}(Tg_\nu)^{I}+M_{11}^{j-1}w_1^{I},\quad j=2,\dots,N-1,$$

$$w_j^{II}=M_{22}^{j-N}w_N^{II}-\sum_{\nu=j}^{N-1}M_{22}^{j-\nu-1}(Tg_\nu)^{II},$$

$$w_1^{I}=(K_1-K_2M_{22}^{-N+1}K_4^{-1}K_3M_{11}^{N-1})^{-1}(K_2\sum_{\nu=1}^{N-1}M_{22}^{-\nu}(Tg_\nu)^{II}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{s}(B_\nu^{I}(Tg_\nu)^{I}+B_\nu^{II}(Tg_\nu)^{II})+K_2M_{22}^{-N+1}K_4^{-1}(-K_3\sum_{\nu=1}^{N-1}M_{11}^{N-\nu-1}(Tg_\nu)^{I}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{t}D_\nu^{I}(Tg_{N-\nu-1})^{I}+D_\nu^{II}(Tg_{N-\nu-1})^{II})),\qquad /2/$$

$$w_N^{II}=(K_4-K_3M_{11}^{N-1}K_1^{-1}K_2M_{22}^{-N+1})^{-1}(-K_3\sum_{\nu=1}^{N-1}M_{11}^{N-\nu-1}(Tg_\nu)^{I}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{t}(D_\nu^{I}(Tg_{N-\nu-1})^{I}+D_\nu^{II}(Tg_{N-\nu-1})^{II})+K_3M_{11}^{N-1}K_1^{-1}\times$$

$$\times(K_2\sum_{\nu=1}^{N-1}M_{22}^{-\nu}(Tg_\nu)^{II}+\sum_{\nu=1}^{s}B_\nu^{I}(Tg_\nu)^{I}+B_\nu^{II}(Tg_\nu)^{II})).$$

Матрицы T, M_{11}, M_{22}, K_1, K_2, B_ν^{I}, B_ν^{II} определены в [4,6,8]. Матрицы K_3, K_4, D_ν^{I}, D_ν^{II} определяются аналогично матрицам K_1, K_2, B_ν^{I}, B_ν^{II}. Из устойчивости задачи Коши следует[6] ряд ограничений на порядки нулей внедиагональных элементов матриц M_{11}, M_{22}. Из устойчивости задач *b)*, *c)* следует[6] ряд ограничений на порядки особенностей элементов K_1^{-1}, K_4^{-1}. Учитывая все эти ограничения и оценивая сверху число слагаемых элементов матрицы $(K_1^{-1}K_2M_{22}^{-N+1}K_4^{-1}K_3M_{11}^{N-1})^s$ через c^s, исходную задачу можно свести к оценке рядов вида

$$\gamma_{\nu n}=\sum_{s=1}^{\infty}c^s\Big|\int_{|z|=1+\rho}\nu^{\tilde m}\phi^{\tilde m\frac{2\tilde\mu-\tilde p+1}{\tilde p}}\cdot\tilde\kappa^{\nu}\times$$

$$\times \prod_{\ell=1}^{L} \left(P_\ell \left(N\phi^{\frac{2\mu_\ell - p_\ell + 1}{p_\ell}}, \phi\right)\kappa_\ell^{N}\right)^{s_\ell} \times$$

$$\times N^{m} \cdot \phi^{m\frac{2\mu - p + 1}{p} - \xi} \cdot \kappa^{N} \cdot e^{in\phi} \, d\phi| \, .$$

Здесь $\kappa, \tilde{\kappa}, \kappa_\ell$ - собственные значения матриц M_{11}, M_{22}^{-1}; $P_\ell(t,\phi)$ - многочлены конечного порядка по t с аналитическими по ϕ коэффициентами; $\xi \le 1 - \frac{1}{2p}$, $\sum_{\ell=1}^{L} s_\ell = s$. Фиксируем k и рассмотрим такие наборы s_ℓ, в которых $s_k \ge s/L$. Последовательно перебираем все $k = 1, 2, ... L$.

При фиксированном значении параметра k в окрестности определяющей точки исходный контур интегрирования деформируется в кусок линии наискорейшего спуска функции $\kappa^N \kappa_k^{s_k N} e^{in\phi}$, проходящей через точку перевала. Остальные $P_\ell^{s_\ell} \kappa_\ell^{N s_\ell}$ на построенном контуре оцениваются сверху по модулю константой. Асимптотические вычеты $\kappa^N \kappa_k^{s_k N} e^{in\phi}$ таковы, что обеспечивают суммируемость рядов $\gamma_{\nu n}$ по s и ограниченность $\sum_{\nu=1}^{N-1} |\gamma_{\nu n}|^2$ при $n \le c N^{\omega}$. Теорема доказана.

Таким образом, если задачи $a), b), c)$ устойчивы, то для "параболических систем" $\| G^n \| \le c_1$ при $n \le c_2 N^{\omega}$, где $\omega > 1$. Для "гиперболических систем" оценка $\| G^n \| \le c_1$ справедлива при $n \le c_2 N$. Ниже приведены примеры неустойчивых разностных краевых задач с двумя границами, которым отвечают устойчивые задачи $a), b), c)$. Эти примеры показывают, что полученные оценки скорости роста $\| G^n \|$ не могут быть улучшены на рассматриваемых классах систем разностных уравнений.

Пример 1. Непрерывная краевая задача:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, \ t \ge 0 & u(0,t) = \sigma_1 v(0,t) & u(x,0) = f_1(x), \\ v_t - v_x = 0, \ 0 < x \le 1 & v(1,t) = \sigma_2 u(1,t) & v(x,0) = f_2(x), \end{cases}$$

аппроксимируется разностной краевой задачей. Внутри области используется схема Лакса /см. /7/, стр. 100/. Предполагается, что $a = \tau / h \le 1$, τ, h - шаги сетки по t, x. Задачи $a), b), c)$ устойчивы /6,7/. Строим резольвенту /2/. Начальные данные подбираем так, чтобы выделить элемент матрицы возмущения $\tilde{M}$, имеющий максимальный порядок особенности,

$$\tilde{M} = K_1^{-1} K_2 M_{22}^{-N+1} K_4^{-1} K_3 M_{11}^{N-1}.$$

Оценка скорости роста $\| G^n \|$ при $n \to \infty$ сводится к оценке интеграла:

$$I_{\nu n} = \int_{|z| = 1+\rho} \kappa^{\nu} z^{n} / (1 + \kappa^{2N} \sigma) \, dz, \quad \sigma = \sigma_1 \sigma_2, \quad z = e^{i\phi},$$

$$\kappa(\phi) = \exp\{ -\frac{i\phi}{a} - \frac{1 - a^2}{2a^3} \phi^2 + \ ...\}.$$

Асимптотика $I_{\nu n}$ дается суммой вычетов относительно полюсов, попадающих в ϵ -окрестность определяющей точки $\phi = 0$:

$$\phi_k = - \frac{i \ln \sigma + 2\pi k}{2N(1 + O(\epsilon))}.$$

Считаем вычеты и суммируем их по k. Получаем оценку $\| G^n \| \underset{\cap}{\overset{\cup}{\sim}} \frac{1}{N} \sigma^{n/N}$, $n \gg N$. При $\sigma > 1$ имеем неустойчивость.

Пример 2. Неустойчивость при $\sigma = 1$.

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, \ t \ge 0, \ 0 \le x \le 1 & v(0,t) = u(0,t) & u(x,0) = f_1(x), \\ v_t - v_x + 2u_x = 0 & u(1,t) = v(1,t) & v(x,0) = f_2(x). \end{cases}$$

Внутри области используется схема Лакса, на границе - $u_0^n = u_1^n - v_2^n + v_1^n$, $v_0^n = u_0^n$, $u_N^n = u_{N-1}^n - v_{N-2}^n + v_{N-1}^n$, $v_N^n = u_N^n$.

Возьмем такие начальные данные: $u_\nu^{0} = v_\nu^{0} = x_\nu / \| x \|$.

Оценка скорости роста $\| G^n \|$ сводится к оценке интеграла

$$I_{\nu n} = \int\limits_{|z|=1+\rho} \kappa^{\nu} z^{n} \left(\frac{\kappa - N\kappa^{N}}{1-\kappa} + \frac{\kappa - \kappa^{N}}{(1-\kappa)^2} \right) \frac{dz}{1-\kappa^{2N}},$$

$$\kappa(\phi) = \exp\{ -i\phi - \phi^2 + \dots \}.$$

Дальше поступаем так же, как в примере 1. Справедлива оценка

$$\| G^n \| \underset{\cap}{\cup} \frac{n}{N}.$$

Пример 3. Параболическая система.

$$\left\{ \begin{array}{l|l|l} u_t = u_{xx}, \ t \geq 0 & u_x(0,t) = v_x(1,t) = 0 & u(x,0) = f_1(x), \\ v_t = v_{xx}, \ 0 \leq x \leq 1 & v(0,t) = \sigma_1 u(0,t), \ u(1,t) = \sigma_2 v(1,t) & v(x,0) = f_2(x). \end{array} \right.$$

Внутри области используется схема-тренога /см. [7], стр. 107/, на границе счет ведется по формулам:

$$u_0^n = u_1^n, \ v_0^n = \sigma_1 u_1^n, \ v_N^n = v_{N-1}^n, \ u_N^n = \sigma_2 v_{N-1}^n.$$

При $a = \tau / h^2 \leq 1/2$ задачи a), b), c) устойчивы. Начальные данные выбираются по тому же принципу, что и в примере 1.

$$I_{\nu n} = \int\limits_{|z|=1+\rho} \frac{\kappa^{2N+\nu} z^n dz}{(1-\kappa)(1-(2-\sigma\kappa^{-1}(1+\kappa)^2)\kappa^{2N} + \kappa^{4N})},$$

$$\kappa = \exp\{ -\left(\frac{i\phi}{a} \right)^{1/2} + \dots \}.$$

При $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 > 1$ уравнение $t^2 - 2(1-2\sigma)t + 1 = 0$ имеет два вещественных корня t_1, t_2, $|t_1| < 1$. Справедлива оценка:

$$\| G^n \|^2 \underset{\cap}{\cup} \frac{1}{N} \exp\left(\frac{a n}{4N^2} \ln^2 |t_1| \right), \quad n \gg N^2.$$

Приношу благодарность Н.С.Бахвалову за полезные обсуждения и внимание к работе.

Литература

1. H.-O.Kreiss. Difference approximations for the initial boundary value problem for hyperbolic differential equations. Numerical solutions of nonlinear differential equations., Proc. Adv. Sympos., Madison, Wis. Wiley, New York, 1966, MP 35-5156, 141-166.
2. H.-O.Kreiss. Uber die Matrizen die beschranke Halbgruppen erzengen., Math.Scand., 7, 71-80 (1959).
3. В.Я.Урм. О необходимом и достаточном условиях устойчивости систем разностных уравнений. ДАН СССР, 139, 1, 40-43, 1961.
4. H.-O.Kreiss. Stability theory of difference approximations of mixed initial boundary value problems. I, Math. of Comp., 22, 104, 703-714 (1968).
5. B.Gustafsson, H.-O.Kreiss, Arne Sundstrom. Stability theory of difference approximations for mixed boundary value problems. II, Math. of Comp., v. 26, pp. 649-686 (1972).
6. С.И.Сердюкова. Необходимое и достаточное условие устойчивости одного класса разностных краевых задач. ДАН СССР, 208, 1, 52-55, 1973.
7. В.Вазов, Дж.Форсайт. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. ИЛ, Москва, 1963.
8. С.И.Сердюкова. Об устойчивости первой краевой задачи при наличии точек спектра на единичной окружности. ДАН СССР, 200, 1, 39-42, 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел 13 июня 1973 года.