СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р5 - 7106

Е.Д.Федюнькин

ДУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С БЕССЕЛЕВЫМИ ЯДРАМИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГАНКЕЛЯ

1973

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

P5 - 710

Е.Д.Федюнькин

ДУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С БЕССЕЛЕВЫМИ ЯДРАМИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГАНКЕЛЯ

1. Введение

Дуальным интегральным уравнением с бесселевым ядром называется система:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty J_\nu(yt)\,\omega(t)\,\Psi(t)\,t\,dt = A(y), \qquad 0<y<r \\ &\int_0^\infty J_\nu(yt)\,\Psi(t)\,t\,dt = B(y), \qquad r<y<\infty . \end{aligned} \tag{/1/}$$

Здесь $J_\nu(z)$ - функция Бесселя первого рода; $A(y)$, $B(y)$ и весовая функция $\omega(t)$ заданы; $0<r=const<\infty$. Требуется найти функцию $\Psi(t)$.

Систему /1/ с произвольной константой r можно свести заменой переменных к системе такого же вида, но с $r=1$.

Полагая $r=1$ и вводя новую искомую функцию $\psi(t)$ соотношением $\Psi(t)=\psi(t)+\int_1^\infty J_\nu(tx)\,B(x)\,x\,dx+\int_0^1 J_\nu(tx)\,C(x)\,x\,dx$,

приводим систему /1/ к каноническому виду:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty J_\nu(yt)\,\omega(t)\,\psi(t)\,t\,dt = f(y), \qquad 0<y<1 \\ &\int_0^\infty J_\nu(yt)\,\psi(t)\,t\,dt = 0, \qquad 1<y<\infty . \end{aligned} \tag{/2/}$$

Здесь $C(x)$ - произвольная функция,

$$f(y) = A(y) - \int_0^\infty J_\nu(yt)\,\omega(t)\,[\int_1^\infty J_\nu(tx)\,B(x)\,x\,dx + \int_0^1 J_\nu(tx)\,C(x)\,x\,dx]\,t\,dt.$$

Система уравнений

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)\,\Xi(t)\,t\,dt = D(y), \quad 0<y<r$$

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)\,\gamma(t)\,\Xi(t)\,t\,dt = E(y), \quad r<y<\infty, \qquad /3/$$

где функции $D(y)$, $E(y)$ и весовая функция $\gamma(t)$ заданы, а функция $\Xi(t)$ - искомая, сводится к системе /1/, с $\Psi(t)=\gamma(t)\,\Xi(t)$, $\omega(t) = [\gamma(t)]^{-1}$, если функция $\gamma(t)$ не обращается в нуль на множестве ненулевой меры. Следовательно, в этом случае /3/ приводится к каноническому виду /2/. В противном случае, полагая $r = 1$ и вводя новую искомую функцию $\xi(t)$ соотношением

$\Xi(t) = \xi(t) + \int_1^\infty J_\nu(tx)\,C(x)\,x\,dx + \int_0^1 J_\nu(tx)\,D(x)\,x\,dx$, приводим /3/ к каноническому виду /$C(x)$- произвольная функция/:

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)\,\xi(t)\,t\,dt = 0, \quad 0<y<1$$

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)\,\gamma(t)\,\xi(t)\,t\,dt = F(y), \quad 1<y<\infty. \qquad /4/$$

Здесь

$$F(y) = E(y) - \int_0^\infty J_\nu(yt)\,\gamma(t)\,[\int_0^1 J_\nu(tx)\,D(x)\,x\,dx + \int_1^\infty J_\nu(tx)\,C(x)\,x\,dx]\,t\,dt$$

Очевидно, систему /1/ можно привести к каноническому виду /4/, если $\omega(t)$ не обращается в нуль на множестве ненулевой меры.

Системы /1/ и /3/ иногда называют уравнениями типа Трантера.

К дуальным интегральным уравнениям с бесселевыми ядрами приводит множество краевых задач, в частности, для уравнения Максвелла. Ясно поэтому, насколько важно уметь анализировать системы /2/ и /4/. Анализ предполагает: а/ выяснение класса, к которому должны принадлежать правые части $f(y)$ и $F(y)$ при заданном классе весовых функций $\omega(t)$ и $\gamma(t)$, для того, чтобы решения систем /2/ и /4/ существовали; б/ выяснение вопроса о единственности решения; в/ выявление классов эквивалентности для весовых функций $\omega(t)$ и $\gamma(t)$, т.е. классов $\{\omega(t)\}$ и $\{\gamma(t)\}$, таких, что при фиксированной $f(y)$ (фиксированной $F(y)$) решения систем /2/ (систем /3/) с различными $\omega(t)\in\{\omega(t)\}$ ($\gamma(t)\in\{\gamma(t)\}$) совпадают; г/ отыскание точных формальных решений систем /2/ и /4/.

Задачи *а/, б/* частично решены в /1-11/. Там же получены формальные решения системы /2/ для $\omega(t)=t^{a}$. Ахиезер /2/ получил решение системы /2/ для $\omega(t)= =(t^2-k^2)^p H(t-k)$. Здесь $0\le k = const<\infty$, $p=const$, $0<p^2<1$, $H(x)$ - функция Хевисайда. Это решение было обобщено /11/. Обзор и библиография имеются в /12/. /См. также /13/, стр. 87/. В указанных работах для отыскания решения в случае произвольного $\omega(t)$ система /2/ приводится к уравнению Фредгольма второго рода, которое решается методом последовательных приближений.

Здесь обсуждаются задачи *в/, г/*. Получены точные формальные решения для некоторых классов функций.

2. Уравнения, связанные с системами /2/ и /4/

Введем функцию $\phi(x)$ соотношением:

$$\psi(t) = \int_0^1 J_\nu(tx)\,\phi(x)\,x\,dx. \qquad /5/$$

Тогда, в соответствии с теоремой Ганкеля, второе из уравнений /2/ удовлетворяется автоматически для произвольной $\phi(x)$. Подставляя /5/ в первое из уравнений /2/, имеем:

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)\,\omega(t)\,[\int_0^1 J_\nu(tx)\,\phi(x)\,x\,dx]\,t\,dt = f(y), \quad 0<y<1. \qquad /6/$$

Меняя в /6/ порядок интегрирования, получаем уравнение первого рода типа Фредгольма на конечном промежутке:

$$\int_0^1 K(y,x)\,\phi(x)\,x\,dx = f(y), \quad 0<y<1 \qquad /7/$$

с ядром:

$$K(y,x) = \int_0^\infty J_\nu(yt)\,\omega(t)\,J_\nu(tx)\,t\,dt. \qquad /8/$$

Введем функцию $\theta(x)$ соотношением:

$$\xi(t) = \int_1^\infty J_\nu(tx)\,\theta(x)\,x\,dx\,. \qquad /9/$$

Тогда первое из уравнений /4/ удовлетворяется автоматически для произвольной $\theta(x)$. Подставляя /9/ во второе из уравнений /4/, имеем:

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)\gamma(t)\left[\int_1^\infty J_\nu(tx)\,\theta(x)\,x\,dx\right]t\,dt = F(y)\,,\ 1<y<\infty\,. \qquad /10/$$

Меняя в /10/ порядок интегрирования, получаем уравнение первого рода типа Фредгольма на полубесконечном промежутке:

$$\int_1^\infty K_1(y,x)\,\theta(x)\,x\,dx = F(y)\,,\quad 1<y<\infty \qquad /11/$$

с ядром:

$$K_1(y,x) = \int_0^\infty J_\nu(yt)\,\gamma(t)\,J_\nu(tx)\,t\,dt\,. \qquad /12/$$

Уравнение

$$\omega(t)\int_0^1 J_\nu(tx)\,p(x)\,x\,dx + \int_1^\infty J_\nu(tx)\,p(x)\,x\,dx = S(t),\ 0<t<\infty \qquad /13/$$

с искомой функцией $p(x)$ сводится к системе /2/. Обозначим:

$$\psi(t) = \int_0^1 J_\nu(tx)\,p(x)\,x\,dx\,. \qquad /14/$$

Тогда второе из уравнений /2/ удовлетворяется автоматически для произвольной $p(x)$. Подставляя /14/ в /13/, умножая /13/ на $tJ_\nu(yt)$ и интегрируя по t в пределах $(0,\infty)$, находим, что $\psi(t)$ удовлетворяет первому из уравнений /2/ с $f(y) = \int_0^\infty J_\nu(yt)\,S(t)\,t\,dt$. Если $\psi(t)$ найдена, то решение уравнения /13/ имеет вид:

$$p(x) = \int_0^\infty J_\nu(xt)\left[S(t) + \psi(t) - \omega(t)\psi(t)\right]t\,dt\,. \qquad /15/$$

Получим еще уравнение вида /13/, исходя из системы /2/. Пусть в /2/ $\psi(t)$ определена выражением /5/, которое является общим решением второго из уравнений /2/. Обозначим при $y>1$

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)\,\omega(t)\,\psi(t)\,t\,dt = F_1(y) + F_2(y)\,,$$

где $F_2(y)$ - произвольно заданная функция. Учитывая первое из уравнений /2/, имеем:

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)\,\omega(t)\,\psi(t)\,t\,dt = \begin{cases} F_1(y) + F_2(y)\,, & y>1\,; \\ f(y)\,, & y<1\,. \end{cases} \qquad /16/$$

Применяя к /16/ обращение Ганкеля и учитывая /5/, имеем:

$$\omega(t)\int_0^1 J_\nu(tx)\,\phi(x)\,x\,dx = \int_1^\infty J_\nu(tx)\left[F_1(x) + F_2(x)\right]x\,dx + \int_0^1 J_\nu(tx)\,f(x)\,x\,dx\,. \qquad /17/$$

Обозначая здесь

$$p(x) = \begin{cases} \phi(x), & x<1 \\ -F_1(x)\,, & x>1 \end{cases}, \quad S(t) = \int_0^1 J_\nu(tx)\,f(x)\,x\,dx + \int_1^\infty J_\nu(tx)\,F_2(x)\,x\,dx\,,$$

получаем уравнение /13/.

Заметим, что анализ в настоящей работе - чисто формальный, т.е. предполагается существование соответствующих интегралов и возможность перестановки порядка интегрирования. С учетом сказанного нужно понимать термин "произвольная функция". Произвольность ограничивается условиями существования соответствующих интегралов и возможностью перестановки порядка интегрирования. Можно, например, говорить, что система /2/ с произвольной $\omega(t)$ эквивалентна /7/, но только в том случае, если ядро /8/ существует. Система /2/ может иметь смысл и тогда, когда ядро /8/ не существует. При этом, в некоторых частных случаях, процедура, использованная для получения уравнений /7/ и /11/, приводит к уравнениям Фредгольма второго рода. Пусть, например, в /2/ $\omega(t) = 1 + \omega^*(t)$.

Тогда в /8/ $xK(y,x)=\delta(y-x)+xK^*(y,x)$, где $\delta(y-x)$–функция Дирака, $K^*(y,x)=\int_0^\infty J_\nu(yt)\omega^*(t)J_\nu(tx)t\,dt$. Если ядро $K^*(y,x)$ – "хорошее", то /7/ приводится к виду:

$$\phi(y) + \int_0^1 K^*(y,x)\,x\,\phi(x)\,dx = f(y), \quad 0<y<1 .$$

Последнее уравнение можно преобразовать в уравнение с симметричным ядром либо заменой переменных $/x=\sqrt{x^*}$, $y=\sqrt{y^*}$ /, либо, вводя новую функцию: $\phi(x) = x^{-1/2}\phi^*(x)$.

Связь систем /2/ и /4/ с различными уравнениями второго рода указана в работах /3,4,7,9,11/.

Если дуальное уравнение сводится к какому-либо типу уравнений Фредгольма, то проблема существования и единственности решения может быть сформулирована на языке теории уравнений Фредгольма. Неудобство состоит в том, что результат при этом получается для соответствующего ядра Фредгольма, а не для весовой функции.

3. О линеаризации одного нелинейного представления Ганкеля

Пусть заданы функции $\phi(x), 0\le a\le x\le A$ и $\eta(y), 0\le\beta\le y\le B$. Рассмотрим функцию $P(z),\ 0\le z<\infty$:

$$P(z)=\int_0^\infty J_\nu(zt)\,t^{1-\nu}\Big[\int_a^A J_\nu(tx)\phi(x)x\,dx\Big]\Big[\int_\beta^B J_\nu(ty)\eta(y)y\,dy\Big]dt . \qquad /18/$$

Здесь и далее $Re\,\nu > -\frac{1}{2}$. Предполагая, что в /18/ допустима двойная перестановка порядка интегрирования, имеем:

$$P(z)=\int_a^A\phi(x)x\Big[\int_\beta^B\eta(y)y\Big(\int_0^\infty J_\nu(zt)J_\nu(yt)J_\nu(xt)t^{1-\nu}dt\Big)dy\Big]dx . \qquad /19/$$

Выражение в круглых скобках интегрируется в квадратурах /14/.

$$\int_0^\infty J_\nu(zt)J_\nu(yt)J_\nu(xt)t^{1-\nu}dt = \begin{cases} \dfrac{[z^2-(x-y)^2]^{\nu-1/2}[(x+y)^2-z^2]^{\nu-1/2}}{2^{3\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)(xyz)^\nu}, \\ \text{если } |x-y|<z<x+y; \\ 0, \text{ если } 0<z<|x-y| \text{ или } x+y<z<\infty \end{cases}$$

$$x,y,z>0; \quad Re\,\nu>-1/2. \qquad /20/$$

Очевидно, правая часть /20/ симметрична относительно перестановки x, y, z. Для нас существенно, что интеграл /20/ обращается в нуль при $z>x+y$ и при $z<|x-y|$. Учитывая пределы изменения x и y в формуле /19/, имеем:

$$P(z)=0, \text{ если } z>A+B \text{ или, если } z<\min_{\substack{a\le x\le A,\\ \beta\le y\le B}}|x-y|. \qquad /21/$$

Учитывая /21/ и применяя обращение Ганкеля к /18/, находим, что для любой пары произвольно заданных функций $\eta(x)$ и $\phi(x)$ существует функция $P(x)$, такая, что выполняется равенство:

$$\Big[\int_a^A J_\nu(tx)\phi(x)x\,dx\Big]\Big[\int_\beta^B J_\nu(tx)\eta(x)x\,dx\Big]=t^\nu\int_m^{(A+B)}J_\nu(tx)P(x)x\,dx , \qquad /22/$$

где $m=\min\limits_{\substack{a\le x\le A,\\ \beta\le y\le B.}}|x-y|$

В частности:

$$[\int_0^A J_\nu(tx)\phi(x)x\,dx][\int_0^B J_\nu(tx)\eta(x)x\,dx] = t^\nu \int_0^{(A+B)} J_\nu(tx)P_1(x)x\,dx \qquad /23/$$

$$[\int_0^A J_\nu(tx)\phi(x)x\,dx][\int_B^\infty J_\nu(tx)\eta(x)x\,dx] = t^\nu \int_{(B-A)}^\infty J_\nu(tx)P_2(x)x\,dx \qquad /24/$$

$$B > A$$

$$[\int_0^A J_\nu(tx)\phi(x)x\,dx][\int_B^C J_\nu(tx)\eta(x)x\,dx] = t^\nu \int_{(B-A)}^{(C+A)} J_\nu(tx)P_3(x)x\,dx$$

$$C>B>A \qquad /25/$$

Здесь α, β, A, B, C - неотрицательные константы.

4. *Класс эквивалентности для весовой функции $\omega(t)$.*

Будем искать решение системы /2/ с весовой функцией

$$\omega(t) = t^{-\nu}\int_2^\infty J_\nu(tx)\eta(x)x\,dx . \qquad /26/$$

Задавая $\psi(t)$ формулой /5/, приходим к уравнению вида /6/, которое эквивалентно системе /2/:

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)t^{1-\nu}[\int_2^\infty J_\nu(tx)\eta(x)x\,dx][\int_0^1 J_\nu(tx)\phi(x)x\,dx]\,dt = f(y), 0<y<1 \qquad /27/$$

Применяя к /27/ соотношение /24/ и полагая $A=1$, $B=2$, имеем:

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)t[\int_1^\infty J_\nu(tx)P_2(x)x\,dx]\,dt = f(y), \quad 0<y<1 . \qquad /28/$$

На основании теоремы Ганкеля левая часть /28/ с произвольной функцией $P_2(x)$ обращается в нуль при $y<1$, поэтому соотношение /28/ справедливо только, когда выполнено условие $f(y)\equiv 0$. Следовательно, уравнение /27/ при любой $\eta(x)$ разрешимо только тогда, когда $f(y)\equiv 0$. В этом случае произвольная функция $\phi(x)$ является решением. Возвращаясь к системе /2/, получаем следующий результат:

> Система /2/ с весовой функцией /26/, где $\eta(x)$ задана произвольно, имеет решение, только если $f(y)\equiv 0$. Это решение не единственное и определяется формулой $\psi(t) = \int_0^1 J_\nu(tx)\phi(x)x\,dx$,
>
> где $\phi(x)$ - произвольная функция.

Из сказанного выше ясно также, что решение системы /2/ с весовой функцией $\omega(t)=\omega_1(t)+t^{-\nu}\int_2^\infty J_\nu(tx)\eta(x)x\,dx$ не зависит от вида функции $\eta(x)$.

Действительно, в этом случае уравнение /6/ имеет вид:

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)t\omega_1(t)[\int_0^1 J_\nu(tx)\phi(x)x\,dx]dt +$$
$$+\int_0^\infty J_\nu(yt)t^{1-\nu}[\int_2^\infty J_\nu(tx)\eta(x)x\,dx][\int_0^1 J_\nu(tx)\phi(x)x\,dx]dt = f(y),$$
$$0<y<1$$

и второй член суммы в левой части последнего уравнения обращается в нуль при $0<y<1$.

Напомним, что все сказанное в разделе 4 справедливо, если в левой части выражения /27/ допустима двойная перестановка порядка интегрирования.

5. *Уравнения с ядрами Вольтерра, связанные с системами /2/ и /4/*

Пусть

$$\omega(t) = t^{-\nu}\int_1^\infty J_\nu(t\tau)\eta(\tau)\tau\,d\tau , \qquad /29/$$

где $\eta(\tau)$ задана произвольно. Тогда ядро /8/ имеет вид:

$$K(y,x) = \int_0^\infty J_\nu(yt)\,t^{1-\nu}[\int_1^\infty J_\nu(t\tau)\eta(\tau)\tau\,d\tau]J_\nu(tx)dt . \qquad /30/$$

Меняя в /30/ порядок интегрирования, применяя формулу /20/, учитывая, что $\tau > 1$, находим: ядро /30/ обращается в нуль при $x+y<1$. Следовательно, уравнение /7/ в этом случае можно записать в виде:

$$\int_{(1-y)}^{1} K(y,x)x\,\phi(x)\,dx = f(y), \quad 0 < y < 1. \qquad /31/$$

Уравнение /31/ заменой переменных сводится к уравнению Вольтерра первого рода. Отметим еще, что в соответствии с результатами раздела 4 можно добавить к /29/ любое выражение вида /26/, и решение при этом не изменится. В частности, уравнение /31/ с ядром

$$K(y,x) = \int_0^\infty J_\nu(yt)t^{1-\nu}\left[\int_1^2 J_\nu(t\tau)\,\eta(\tau)\tau\,d\tau\right]J_\nu(tx)\,dt$$

имеет такое же решение, как и с ядром /30/.

Аналогичным образом можно показать, что, если

$$\gamma(t) = t^{-\nu}\int_0^1 J_\nu(t\tau)\,\eta(\tau)\tau\,d\tau, \qquad /32/$$

где $\eta(\tau)$ - произвольная функция, то ядро /12/ обращается в нуль при $x>y+1$. Уравнение /11/ в этом случае сводится к уравнению:

$$\int_1^{(y+1)} K_1(y,x)\theta(x)x\,dx = F(y), \; 1<y<\infty. \qquad /33/$$

6. Два класса формальных решений

Рассмотрим систему уравнений типа /2/:

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)\omega(t)\psi(t)t\,dt = \begin{cases} f(y), & 0<y<a \\ 0, & a<y\le 1 \end{cases} \qquad /34/$$

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)\,\psi(t)t\,dt = 0, \; 1<y<\infty,$$

где $0<a<1$, и весовая функция $\omega(t)$ определена равенством:

$$\omega(t) = t^\nu\left[\int_0^{(1-a)} J_\nu(tx)\eta(x)x\,dx\right]^{-1}. \qquad /35/$$

Здесь $\eta(x)$, $f(y)$ - произвольно заданные функции. Решение системы /34/ имеет вид:

$$\psi(t) = t^{-\nu}\left[\int_0^{(1-a)} J_\nu(tx)\eta(x)x\,dx\right]\left[\int_0^a J_\nu(tx)f(x)x\,dx\right]. \qquad /36/$$

Действительно, в соответствии с формулой /23/ нелинейное представление /36/ линеаризуется следующим образом:

$$\psi(t) = \int_0^1 J_\nu(tx)P_1(x)x\,dx. \qquad /37/$$

Мы положили в /23/: $\phi(x)\equiv f(x)$, $A=a$, $B=1-a$. Подставляя /37/ во второе из уравнений /34/ и используя теорему Ганкеля, находим, что второе из уравнений /34/ удовлетворяется при произвольной $P_1(x)$. Следовательно, оно удовлетворяется выражением /36/ с произвольными $\eta(x)$ и $f(x)$. Подставляя /36/ в первое из уравнений /34/ и используя теорему Ганкеля, находим, что первое из уравнений /36/ также удовлетворяется. В соответствии с результатами раздела 4, система /34/ с весовой функцией

$$\omega(t) = t^\nu\left[\int_0^{(1-a)} J_\nu(tx)\eta(x)x\,dx\right]^{-1} + t^{-\nu}\int_2^\infty J_\nu(tx)\eta(x)x\,dx$$

тоже будет иметь решение, определяемое формулой /36/.

Аналогичным образом, учитывая /24/, можно найти решение системы типа /4/:

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)\,\gamma(t)\,\xi(t)t\,dt = \begin{cases} F(y), & \beta<y<\infty \\ 0, & 1\le y<\beta \end{cases} \qquad /38/$$

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)\xi(t)t\,dt = 0, \; 0<y<1$$

где $1<\beta<\infty$ и весовая функция $\gamma(t)$ определена равенством:

$$\gamma(t) = t^{\nu}\left[\int_0^{(\beta-1)} J_\nu(tx)\eta(x)x\,dx\right]^{-1}. \qquad /39/$$

Решение имеет вид:

$$\xi(t) = t^{-\nu}\left[\int_0^{(\beta-1)} J_\nu(tx)\eta(x)x\,dx\right]\left[\int_\beta^\infty J_\nu(tx)F(x)x\,dx\right]. \qquad /40/$$

7. Некоторые следствия

Учитывая связь систем /2/ и /4/ с уравнениями Фредгольма первого рода /раздел 2/, получаем следующие результаты:

Уравнение

$$\int_0^1 K(y,x)x\phi(x)\,dx = H(a-y)f(y),\quad 0<y<1 \qquad /41/$$

с ядром

$$K(y,x) = \int_0^\infty J_\nu(yt)\left[\int_0^{(1-a)} J_\nu(t\tau)\eta(\tau)\tau\,d\tau\right]^{-1} J_\nu(tx)t^{1+\nu}\,dt \qquad /42/$$

имеет решение:

$$\phi(x)=\int_0^\infty J_\nu(xt)\left[\int_0^{(1-a)} J_\nu(ty)\eta(y)y\,dy\right]\left[\int_0^a J_\nu(ty)f(y)y\,dy\right]t^{1-\nu}dt. \qquad /43/$$

Здесь $Re\,\nu>-1/2$, $0<a<1$, $H(z)$ - функция Хевисайда / $H(z)=1$ при $z>0$, $H(z)=0$ при $z<0$ /.

Уравнение

$$\int_1^\infty K_1(y,x)x\,\theta(x)\,dx = H(y-\beta)F(y),\quad 1<y<\infty \qquad /44/$$

с ядром

$$K_1(y,x) = \int_0^\infty J_\nu(yt)\left[\int_0^{(\beta-1)} J_\nu(t\tau)\eta(\tau)\tau\,d\tau\right]^{-1} J_\nu(tx)t^{1+\nu}\,dt \qquad /45/$$

имеет решение:

$$\theta(x) = \int_0^\infty J_\nu(xt)\left[\int_0^{(\beta-1)} J_\nu(ty)\eta(y)y\,dy\right]\left[\int_\beta^\infty J_\nu(ty)F(y)y\,dy\right]t^{1-\nu}dt \qquad /46/$$

Здесь $Re\,\nu>-1/2$, $1<\beta<\infty$.

Заметим, что, вследствие /23/, правая часть /43/ обращается в нуль при $x>1$, поэтому, подставляя /43/ в /41/, можно заменить в /41/ пределы интегрирования $(0,1)$ на $(0,\infty)$. Аналогично, вследствие /24/, правая часть /46/ обращается в нуль при $x<1$.

Рассмотрим уравнение

$$\int_0^1 K(y,x)x\phi(x)\,dx = f(y),\quad 0<y<1 \qquad /47/$$

с ядром /42/. Меняя порядок интегрирования, имеем:

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)\left[\int_0^{(1-a)} J_\nu(t\tau)\eta(\tau)\tau\,d\tau\right]^{-1}\left[\int_0^1 J_\nu(tx)\phi(x)x\,dx\right]t^{1+\nu}dt=f(y),$$
$$0<y<1. \qquad /48/$$

Обозначим через $f_1(y)$ значение левой части /48/ при $y>1$. Применяя к /48/ обращение Ганкеля, имеем:

$$\left[\int_0^{(1-a)} J_\nu(t\tau)\eta(\tau)\tau\,d\tau\right]^{-1}\left[\int_0^1 J_\nu(tx)\phi(x)x\,dx\right]t^{\nu}= \int_0^1 J_\nu(ty)f(y)y\,dy +$$
$$+\int_1^\infty J_\nu(ty)f_1(y)y\,dy \qquad /49/$$

Умножая равенство /49/ на $t^{-\nu}\int_0^{(1-a)} J_\nu(t\tau)\eta(\tau)\tau\,d\tau$ и еще раз применяя обращение Ганкеля, имеем:

$$\phi(x)\,H(1-x) = \int_0^\infty J_\nu(xt)\Big[\int_0^{(1-a)} J_\nu(t\tau)\eta(\tau)\tau\,d\tau\Big]\Big[\int_0^1 J_\nu(ty)f(y)y\,dy\Big]t^{1-\nu}\,dt \;+$$

$$+\int_0^\infty J_\nu(xt)\Big[\int_0^{(1-a)} J_\nu(t\tau)\eta(\tau)\tau\,d\tau\Big]\Big[\int_1^\infty J_\nu(ty)f_1(y)y\,dy\Big]t^{1-\nu}\,dt. \qquad /50/$$

Если во втором члене суммы в правой части равенства /50/ допустима двойная перестановка порядка интегрирования, то этот член, в соответствии с правилом /24/, обращается в нуль при $x < a$. Следовательно, решение уравнения /47/ с ядром /42/ при $x<a$ имеет вид:

$$\phi(x) = \int_0^\infty J_\nu(xt)\Big[\int_0^{(1-a)} J_\nu(ty)\eta(y)y\,dy\Big]\Big[\int_0^1 J_\nu(ty)f(y)y\,dy\Big]t^{1-\nu}\,dt,$$

$$0<x<a<1. \qquad /51/$$

Аналогичная процедура для уравнения

$$\int_1^\infty K_1(yx)x\theta(x)\,dx = F(y),\quad 1<y<\infty \qquad /52/$$

с ядром /45/ приводит к равенству:

$$\theta(x) = \int_0^\infty J_\nu(xt)\Big[\int_0^{(\beta-1)} J_\nu(ty)\eta(y)y\,dy\Big]\times \qquad /53/$$

$$\times\Big[\int_1^\infty J_\nu(ty)F(y)y\,dy\Big]t^{1-\nu}dt,\quad 1<\beta<x<\infty.$$

8. *Некоторые обобщения*

Умножая равенство /23/ на $\int_0^C J_\nu(tx)\eta_1(x)x\,dx$, имеем:

$$\Big[\int_0^A J_\nu(tx)\phi(x)x\,dx\Big]\Big[\int_0^B J_\nu(tx)\eta(x)x\,dx\Big]\Big[\int_0^C J_\nu(tx)\eta_1(x)x\,dx\Big] =$$

$$= t^\nu\Big[\int_0^{(A+B)} J_\nu(tx)P_1(x)x\,dx\Big]\Big[\int_0^C J_\nu(tx)\eta_1(x)x\,dx\Big]. \qquad /54/$$

Снова применяя к произведению двух интегралов, стоящих в правой части /54/, правило /23/, получим:

$$\Big[\int_0^A J_\nu(tx)\phi(x)x\,dx\Big]\Big[\int_0^B J_\nu(tx)\eta(x)x\,dx\Big]\Big[\int_0^C J_\nu(tx)\eta_1(x)x\,dx\Big] =$$

$$= t^{2\nu}\int_0^{(A+B+C)} J_\nu(tx)P_4(x)x\,dx. \qquad /55/$$

Следовательно, по индукции имеем:

$$\prod_{i=1}^N \Big[\int_0^{A_i} J_\nu(tx)\phi_i(x)x\,dx\Big] = t^{\nu(N-1)}\int_0^{[\sum_{i=1}^N A_i]} J_\nu(tx)M(x)x\,dx \qquad /56/$$

Аналогично обобщаются выражения /24/ и /25/.

Используя полученные результаты, можно найти решения некоторых систем высшего порядка. Например, система

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)\,\omega_N(t)\psi(t)t\,dt = \begin{cases} f(y), & 0<y<\beta_N; \\ 0, & \beta_N<y<\beta_{(N-1)} \end{cases}$$

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)\,\omega_{(N-1)}(t)\,\psi(t)t\,dt = 0,\quad \beta_{(N-1)}<y<\beta_{(N-2)} \qquad /57/$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)\,\omega_1(t)\psi(t)t\,dt = 0,\quad \beta_1<y<1$$

$$\int_0^\infty J_\nu(yt)\psi(t)t\,dt = 0,\quad 1<y<\infty$$

где $\omega_k(t) = t^{k\nu}\Big[\prod_{i=1}^k \int_0^{a_i} J_\nu(tx)\eta_i(x)x\,dx\Big]^{-1}$, $\beta_k = 1-\sum_{i=1}^k a_i$, $\beta_N>0$, имеет решение:

$$\psi(t) = t^{-N\nu}\left[\int_0^{\beta_N} J_\nu(tx) f(x) x\,dx\right]\left[\prod_{i=1}^{N}\int_0^{a_i} J_\nu(tx)\eta_i(x)\,x\,dx\right] \qquad /58/$$

Литература

1. C.J.Tranter. Quart. J.Mech. and Appl. Math., 7, part 3, 317 (1954).
2. Н.И.Ахиезер. ДАН, 98, №3, 333 /1954/.
3. J.C.Cooke. Quart. J.Mech. and Appl. Math., 9, part I, 103 (1956).
4. B.Noble. J.Math. and Phys., 38, No. 2, 128 (1958).
5. I.N.Sneddon. Proc. Glasgow Math. Assoc., 4, part 3, 108 (1960).
6. W.E.Williams. Proc. Edinb. Math.Soc., 12 (series 2), part 4, 213 (1961).
7. B.Noble. Proc. Camb.Phil.Soc., 59, 351 (1963).
8. J.S.Lowndes. Proc. Edinb.Math.Soc., 15, No. I, 73 (1966).
9. K.N.Srivastava. Proc.Nat.Acad.Sciences, India, 34 (sec. A), part 4, 1042.
10. А.А.Брусилов. Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям /сборник/, стр. 21; Днепропетровск, 1967.
11. A.P.Dwivedi. Ganita., 18, No. I, 21 (1967).
12. Y.L.Luke. Integrals of Bessel Functions. p. 342; McGrow-Hill, 1962.
13. Г.Бейтмен, А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции; функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены; "Наука", М., 1966.
14. Г.Бейтмен, А.Эрдейи. Таблицы интегральных преобразований. Том. 2, стр. 52, "Наука", М., 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел 24 апреля 1973 года.