ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5 - 6320

С.И.Сердюкова

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА РАЗНОСТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1972

P5 - 6320

С.И.Сердюкова

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА РАЗНОСТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Направлено в ДАН СССР

Исследуется устойчивость разностной аппроксимации:

$$v_\nu(t+\tau) = \sum_{l=-r_1}^{r_2} A_l v_{\nu+l}(t), \qquad t = n\tau \geq 0, \quad \nu = 1,2,\dots$$

$$v_\nu(0) = f_\nu, \qquad v_m(t) = \sum_{l=1}^{s} C_{lm} v_l(t), \quad m=-r+1,\dots,0 \tag{1}$$

$v_\nu(t)$ – векторы размерности k ; A_l, C_{lm} – постоянные матрицы. Предполагается, что A_{-r_1}, A_{r_2} – невырожденные матрицы. Обозначим через H гильбертово пространство последовательностей векторов

$$v = \{v_{-r_1+1}, \dots, v_0, v_1, \dots\}, \quad v_m = \sum_{l=1}^{s} C_{lm} v_l, \quad m = -r_1+1, \dots, 0,$$

с нормой:

$$\|v\|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} |v_\nu|^2 .$$

Разностная аппроксимация (1) устойчива, если существует постоянная K, не зависящая от τ такая, что $\|v(t)\| < K\|v(0)\|$ для всех $t=n\tau\geq 0$ и всех $v(0) \subset H$.

Запишем (1) в операторном виде $v(t+\tau) = G\,v(t)$. z_0 называется точкой спектра оператора G, если существует ненулевая последовательность $v \subset H$ такая, что $Gv = z_0 v$. Для того, чтобы (1) была устойчива, необходимо /1/, чтобы спектр G лежал в единичном круге $|z| \le 1$. Чтобы получить необходимое и достаточное условие устойчивости (1), оценим скорость роста $\|G^n\|$:

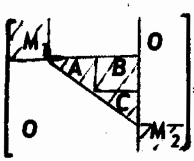
$$G^n = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} z^n (G - zI)^{-1} dz ,$$

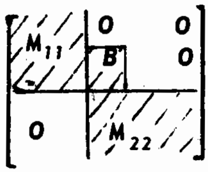
где Γ – произвольный контур, охватывающий все точки спектра оператора G. Следуя /1/, получим явное представление резольвенты $(G - zI)^{-1}$ в окрестности единичной окружности $|z| = 1$. При этом появляется (см. /1/) матрица $M(z)$:

$$M(z) = -\left\| \begin{matrix} A_{r_2}^{-1}A_{r_1-1} & A_{r_2}^{-1}A_{r_2-2} & \cdots & A_{r_2}^{-1}(A_0 - zI) & \cdots & A_{r_2}^{-1}A_{-r_2+1} & A_{r_2}^{-1}A_{-r_1} \\ -I & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -I & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -I & 0 \end{matrix} \right\|$$

Используя /2,3/, доказываем следующую теорему.

<u>Теорема 1.</u> Для произвольной точки единичной окружности z_0, $|z_0| = 1$, найдутся постоянная ρ и несингулярная аналитическая в круге $|z - z_0| < \rho$ матрица $T(z)$ такая, что

$T(z)M(z)T^{-1}(z) =$ 

$= \bar{M}(z)$ 

Элементы T, T^{-1} разлагаются в ряды по дробным степеням $(z-z_0)$. Собственные значения (с.з.) M_1, M_2^{-1} по модулю строго меньше 1 при $|z-z_0|<\rho$. С.з. A, C^{-1} по модулю меньше 1 для $|z|>1$ и стремятся к предельным значениям, равным по модулю 1, при $z \to z_0$. M_{11} имеет размерность $(r_1 k, r_1 k)$ $M_{22}-(r_2 k, r_1 k)$, $A-(\ell_1, \ell_1)$, $C-(\ell_2, \ell_2)$.

В окрестности z_0 резольвента дается формулами:

$$w_i^{I} = \sum_{\nu=1}^{i-1} M_{11}^{i-\nu-1} \bar{g}_\nu + M_{11}^{i-1} w_1^{I}, \qquad \bar{g}_\nu = (T g_\nu)^{I} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} w_\nu^{II},$$

$$w_i^{II} = -\sum_{\nu=i}^{\infty} M_{22}^{i-\nu-1} (T g_\nu)^{II},$$

w_i^{I} - векторы размерности $r k$ (см. /1/), w_1^{I} определяется из соотношения

$$K_1(z)\, w_1^{I} = K_2(z)\, w_1^{II} + \sum_{\nu=r}^{s} \left(B_\nu^{I}(z)\, \bar{g}_\nu + B_\nu^{II}(z)\, (T g_\nu)^{II} \right).$$

Матрицы K_1, K_2, B_ν^{I}, B_ν^{II} зависят от $C_{j m}$, M, T (см. /4/). $K_1(z)$ может вырождаться в отдельных точках единичной окружности. Необходимое и достаточное условие устойчивости (1) сводится к ряду ограничений на поведение K_1, K_2, A, C в окрестности этих точек. В работе /1/ показано, что точки вырождения K_1 являются точками спектра или обобщенными точками спектра /1/ G. Собственные значения κ матрицы $M(z)$ удовлетворяют уравнению:

$$Det\left(\sum_{j=-r_1}^{r_2} A_j \kappa^j - zI \right) = 0 .$$

Отсюда следует, что с.з. $M(z)$ являются обратными функциями с.з. характеристической матрицы задачи Коши. В работе /5/ показано, что устойчивость задачи Коши является необходимым условием устойчивости краевых задач. Известны /6/ разложения с.з. характеристической матрицы L_2 -устойчивой задачи Коши в окрестности определяющих точек:

$$\lambda = \exp \{ i\phi_0 + i\gamma(\psi-\psi_0) + i \sum_{l=p}^{2\mu} a_l (\psi-\psi_0)^l - \beta(\psi-\psi_0)^{2\mu} + \dots \}, \quad Im\, a_l = 0, \ \beta > 0.$$

Если $|\lambda| \equiv 1$ на единичной окружности $|\exp(i\psi)| = 1$, то $\mu = \infty$. Каждому λ с наклонной характеристикой $(\gamma \neq 0)$ отвечает одно κ :

$$\kappa = \exp \{ i\psi_0 + i \frac{\phi-\phi_0}{\gamma} P(\phi-\phi_0) + \frac{\beta}{\gamma^{2\mu+1}} (\phi-\phi_0)^{2\mu} + \dots \}, \quad z = e^{i\phi}. \qquad (2а)$$

Каждому λ с вертикальной характеристикой $(\gamma = 0)$ на плоскости с разрезом по радиусу $z = t\ell^{i\phi_0}$ $, 0 \le t \le 1$ отвечает p ветвей κ :

$$\kappa_\ell = \exp \{ i\psi_0 + i \left(\frac{\phi-\phi_0}{a}\right)_\ell^{1/p} P\left(\left(\frac{\phi-\phi_0}{a}\right)_\ell^{1/\ell}\right) + \frac{\beta}{pa} \left(\frac{\phi-\phi_0}{a}\right)_\ell^{\frac{2\mu-p+1}{p}} + \dots \}$$

$$\left(\frac{\phi-\phi}{a}\right)_\ell^{\frac{1}{p}} = \left|\frac{\phi-\phi}{a}0\right|^{\frac{1}{p}} \ell^{\frac{i}{p}(\chi - Arg\, a + 2\pi\ell)}, \quad a = a_p, \quad -\frac{3\pi}{2} \le \chi \le \frac{\pi}{2}, \quad \ell = 0, \dots p-1. \qquad (2б)$$

На единичной окружности в малой окрестности $z_0 = \ell^{i\phi_0}$ каждое κ по модулю либо не больше 1, либо не меньше 1. Порядок старшего члена разложения (2), гарантирующего такое поведение κ , назовем определяющим порядком κ и обозначим его через Q : λ с $\gamma \neq 0$ порождает κ с $Q = 2\mu$; λ с $\gamma = 0$ и $p = 2\mu$ порождает κ_ℓ с $Q = \frac{1}{p}$ для всех $\ell = 0, 1, \dots p-1$; λ с $\gamma = 0$, $p < 2\mu$ отвечают две основные ветви с номерами $\ell = 0$ $[\frac{p+1}{2}]$. Этим ветвям отвечает $Q = (2\mu - p + 1)/p$. Для остальных ветвей $Q = 1/p$.

Обозначим через q_{ij} порядок нуля функции $\ln \kappa_i - \ln \kappa_j$ при $\phi = \phi_0$. Собственные значения κ_i , κ_j принадлежат одному классу, если $Q_i = Q_j = Q$. и $q_{ij} > Q$. Каждому классу с.з. поставим в соответствие число $P : P = 1/2$, если с.з. рассматриваемого класса типа 2а и $P = 1 - \frac{1}{2p}$ – в противном случае.

Если задача Коши устойчива, то равномерно по n ограничены

$$\sigma_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} |G_{ij}^{\nu n}(A, \phi_0)|^2 \quad \text{и} \quad \sigma_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} |G_{ij}^{\nu n}(C^{-1}, \phi_0)|^2 ,$$

$G_{ij}^{\nu n}(M, \phi_0)$ – элементы матрицы $\int_{\phi_0-\rho}^{\phi_0+\rho} e^{in\phi} M^{\nu}(e^{i\phi})d\phi$.

Теорема 2. Для того, чтобы σ_1 была ограничена равномерно по n, необходимо и достаточно, чтобы порядки нулей внедиагональных элементов матрицы A при $\phi = \phi_0$ были не меньше n_{ij}:

1. $n_{ij} = Q - P$, если κ_i, κ_j из одного класса,
2. $n_{ij} = q_{ij} - min(P_i, P_j)$, если κ_i, κ_j из разных классов.

Аналогичное утверждение справедливо для σ_2. Если задача Коши устойчива, то фактические порядки нулей f_{ij} внедиагональных элементов матриц A, C^{-1} могут быть больше необходимых n_{ij}. В результате возникают "потенциальные запасы" $p_{ij} = f_{ij} - n_{ij}$, $p_{ii} = P$, благодаря которым (1) может быть устойчивой даже при наличии точек спектра G на единичной окружности. На самом деле представляют интерес только точки спектра и обобщенные точки спектра /1/ на $|z| = 1$, в которых вырождается $K_1(z)$. Эти точки обозначим через z_δ^*, $|z_\delta^*| = 1$. Далее обозначим через s_i^1 максимальный порядок особенностей элементов $(r_1 k - \ell_1 + i)$-ой строки K_1^{-1} и через s_i^2 – максимальный порядок особенностей элементов i-го столбца матрицы $K_1^{-1} K_2^*$.

$$K_2^*(z) = K_2(z) - \sum_{\nu=r_1}^{s} B_{\nu}^{1}(z) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} M_{22}^{\nu-1}(z) .$$

Основная теорема. Для того, чтобы (1) была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1–4.

1. Должна быть устойчива соответствующая задача Коши.

2. Спектр G должен лежать в единичном круге $|z| \leq 1$. Каждой точке z_0^* отвечают матрицы K_1, K_2, A, C. Эти матрицы должны удовлетворять условиям 3–4.

3. Матрица K_1^{-1} не должна иметь особенностей выше первого порядка в верхних $r_1 k - \ell_1$ строках.

4. $s_i^1 \leq \min\limits_{1 \leq \ell \leq i} p_{\ell i}(A) = m_i^1$, $\quad s_i^2 \leq \min\limits_{i \leq \ell \leq \ell_2} p_{i\ell}(C^{-1}) = m_i^2$.

Если нарушается условие (3) и максимальный порядок особенностей элементов верхних $r_1 k - \ell_1$ строк K_1^{-1} равен $q > 1$, то $\|G^n\| > cn^{q-1}$. Здесь и ниже c не зависит от n. Если нарушается условие (4), то $\|G^n\| > cn^{\theta}$, θ пропорционально $\max(\max\limits_{1 \leq i \leq \ell_1}(s_i^1 - m_i^1), \max\limits_{1 \leq i \leq \ell_2}(s_i^2 - m_i^2))$.

Точнее, дело обстоит так:

I. $s_i^1 > P$, тогда $\|G^n\| \geq cn^{\theta}$, $\theta = s_i^1 - P$. При $s_i^1 = P$ $\|G^n\| \geq c\sqrt{\ell n\, n}$.

Далее везде $\omega = s_i^1 - p_{ij} \geq 0$ и в случае чисто степенного роста: $\|G^n\| \geq cn^{\theta}$, просто приводится соответствующее θ.

II. κ_i, κ_j из одного класса типа 2а. $\theta = \omega / 2\mu$ при $\omega < 2\mu$. Если $\omega = 2\mu$, то $\|G^n\| > cn\sqrt{\ell n\, n}$. При $\omega > 2\mu$ $\theta = \omega - 2\mu + 1$.

III. κ_i, κ_j из одного класса типа 2б. При $p = 2\mu$, $\theta = \omega$. Если $p < 2\mu$, то $\theta = \omega p / 2\mu$ при $\omega < 2\mu / p$. Для $\omega = 2\mu / p$ $\|G^n\| > cn\sqrt{\ell n\, n}$. При $\omega > 2\mu/p$ $\theta = \omega + 1 - 2\mu / p$.

IV. $\gamma_i \neq \gamma_j$, $\theta = \omega$. Неустойчивость типа $\|G^n\| \geq c\sqrt{\ell n\, n}$ при $\omega = 0$ наблюдается, если $\gamma_i = 0$ или $\gamma_j = 0$. При $\omega = 1$ $\|G^n\| > cn\sqrt{\ell n\, n}$ если $0 \neq \gamma_i \neq \gamma_j \neq 0$.

V. $\gamma_i=\gamma_j \neq 0$, $q_{ij}=\min(p_i, p_j)$. $\theta=\omega/q_{ij}$ при $\omega<q_{ij}$. Если $\omega=q_{ij}$, то $\|G^n\|>cn\sqrt{\ln n}$. При $\omega>q_{ij}$ $\theta=\omega-q_{ij}+1$. Неустойчивость типа $\sqrt{\ln n}$ наблюдается в двух случаях: 1. $p_i<p_j$, $p_i<2\mu_0$; 2. $p_i=p_j$ и выполняется хотя бы одно из двух неравенств: $p_i<2\mu_i$, $p_j<2\mu_j$.

VI. $\gamma_i=\gamma_j \neq 0$, $p_i=p_j=p<q_{ij}\leq \min(2\mu_i, 2\mu_j)$. Оценки те же, что и в V. Только неустойчивость типа $\sqrt{\ln n}$ при $\omega=0$ наблюдается в другом случае $q_{ij}<\max(2\mu_i, 2\mu_j)$.

VII. $\gamma_i=\gamma_j=0$, $p_i\leq p_j$, $q_{ij}=1/p_j$, $\omega=\theta$. При $\omega=0$ неустойчивость типа $\sqrt{\ln n}$ наблюдается в двух случаях, указанных в V .

VIII. $\gamma_i=\gamma_j=0$, $p_i=p_j=p$, $1\leq pq_{ij}\leq \min(2\mu_i, 2\mu_j)-p+1$, $\xi=1+(pq_{ij}-1)/p$. $\theta=\omega/\xi$ при $\omega<\xi$. Если $\omega=\xi$, то $\|G^n\|>cn\sqrt{\ln n}$. При $\omega>\xi$ $\theta=\omega-(pq_{ij}-1)/p$. Если $\omega=0$ и $pq_{ij}\leq \max(2\mu_i, 2\mu_j)-p+1$, то $\|G^n\|\geq c\sqrt{\ln n}$.

Все оценки являются точными по порядку. Аналогичные оценки верны, когда нарушаются условия на матрицу $K_1^{-1}K_2^*$. В целом имеет место неустойчивость максимального порядка. Частично результаты этой работы пересекаются с результатами работы /7/ .

Л и т е р а т у р а

1. H.O.Kreiss. Stability Theory of Difference Approximations of Mixed Initial Boundary Value Problems. 1. Mathematics of Computation, 22, 104, 1968, 703-714.

2. T.Kato. Perturbation Theory for Linear Operators. Chapter 2. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York,

3. В.Я. Урм. О приведении систем разностных уравнений к каноническому виду. ДАН СССР, 134, 6, 1960, 1309-1312.

4. С.И. Сердюкова. Об устойчивости первой краевой задачи при наличии точек спектра на единичной окружности. ДАН СССР, 200, 1, 1971, 39-42.

5. H.O.Kreiss. Difference Approximations for the Initial Boundary value Problem for Hyperbolic Differential Equations. Numerical Solutions of nonlinear Differential Equations. Proc. Adv. Sympos., Madison, Wis., 1966, Wiley, New York, 1966, MR 35-5156, 141-166.

6. В.Я. Урм. О необходимом и достаточном условиях устойчивости систем разностных уравнений. ДАН СССР 139, 1, 1961, 40-43.

7. Bertil Gustafsson, H.-O.Kreiss, Arne Lundstrom. Stability Theory of Difference Approximations for Mixed Initial Boundary Value Problems. II. Uppsala University, Department of Computer Sciences, 1971, Report NR 30.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 марта 1972 года.