

С17а

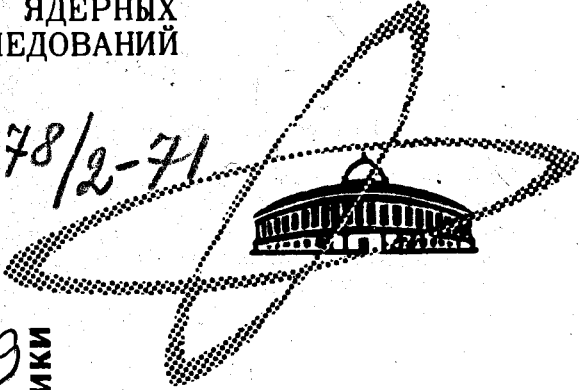
5/111-71

Б-941  
СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2178/2-71

P5 - 5789



5789

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ  
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Б. Бухберггер

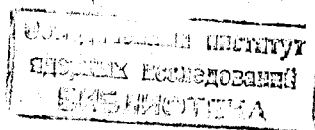
О ВЕЛИЧИНАХ  $S_i$ , ОПРЕДЕЛЕННЫХ  
РЕКУРСИЕЙ  $S_{i+1} = u_i S_i + v_i S_{i-1}$

1971

P5 - 5789

Б. Бухбергер

О ВЕЛИЧИНАХ  $S_i$ , ОПРЕДЕЛЕННЫХ  
РЕКУРСИЕЙ  $S_{i+1} = u_i S_i + v_i S_{i-1}$



Бруно Бухбергер

P5-5789

О величинах  $S_i$ , определенных рекурсией  $S_{i+1} = U_i S_i + V_i S_{i-1}$

В работе дается явный вид величин  $S_i$ , определенных рекурсией  $S_{i+1} = U_i S_i + V_i S_{i-1}$  ( $i \geq 2$ ), как функций от аргументов  $S_1, S_2, U_2, V_2, \dots, U_{i-1}, V_{i-1}$ . Полученная формула применяется к числам Фибоначчи и определителям трехдиагональных матриц.

Сообщения Объединенного института ядерных исследований  
Дубна, 1971

Bruno Buchberger

P5-5789

On Values  $S_i$  Determined by Recursion  $S_{i+1} = U_i S_i + V_i S_{i-1}$

An explicit form of value  $S_i$ , determined by recursion  $S_{i+1} = U_i S_i + V_i S_{i-1}$  ( $i \geq 2$ ) as a function of  $S_1, S_2, U_2, V_2, \dots, U_{i-1}, V_{i-1}$  arguments, is given. The obtained formula is applied to Fibonacci numbers and to three-diagonal matrix determinants.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.  
Dubna, 1971

## I. Постановка задачи

Рассмотрим величины  $S_i$ , определенные рекурсией:

$$(I.1) \quad S_{i+1} = u_i S_i + v_i S_{i-1} \quad (i \geq 2),$$

где  $u_i, v_i$  ( $i \geq 2$ ) и  $S_1, S_2$  — элементы произвольного кольца  $K$ , например, вещественные числа. Естественно, тогда и  $S_i \in K$  для  $i \geq 3$ . Обозначим зависимость величин  $S_i$  ( $i \geq 3$ ) от  $S_1, S_2, u_2, \dots, u_{i-1}, v_2, \dots, v_{i-1}$  следующим образом:

$$(I.2) \quad S_i = \sigma_i(S_1, S_2, u_2, \dots, u_{i-1}, v_2, \dots, v_{i-1}), \quad (i \geq 3).$$

Наша цель — дать явное представление этих функций  $\sigma_i$ .

Можно представить  $\sigma_i$  в виде:

$$(I.3) \quad \begin{aligned} \sigma_1(S_1) &= S_1, \\ \sigma_2(S_1, S_2) &= S_2, \\ \sigma_i(S_1, S_2, u_2, \dots, u_{i-1}, v_2, \dots, v_{i-1}) &= \\ &= v_2 \sigma_{i-2}(1, u_3, u_4, \dots, u_{i-1}, v_4, \dots, v_{i-1}) S_1 + \sigma_{i-1}(1, u_2, u_3, \dots, u_{i-1}, v_3, \dots, v_{i-1}) S_2, \end{aligned}$$

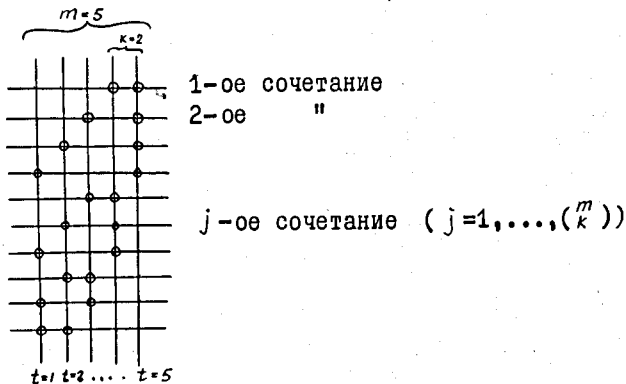
что легко проверяется подстановкой (I.3) в (I.1).

Поскольку в правой части равенства (I.3) первым аргументом функций  $\sigma_{i-1}$  и  $\sigma_{i-2}$  является 1, ограничимся в дальнейшем рассмотрением рекурсий вида (I.1), где  $S_1 = 1$ . Переобозначим тогда  $S_2$  через  $u$ , (см. теорему 3.1).

## 2. Вспомогательные функции

Предварительно введем функции  $\beta$  и  $\gamma$ , которые в третьей главе будут играть важную роль. Наглядно функцию  $\beta$  можно описать следующей процедурой. Для нахождения значения  $\beta(m, k, j, t)$  ( $m, k, j, t$  - целые числа, где  $1 \leq m$ ,  $0 \leq k \leq m$ ,  $1 \leq j \leq \binom{m}{k}$ ,  $1 \leq t \leq m$ ) запишем  $j$ -ое сочетание среди всех сочетаний  $k$  элементов из  $m$ , причем сочетания должны быть упорядочены способом, указанным ниже для случая  $m=5$ ,  $k=2$ . Если при этом на нашем рисунке на  $t$ -ом месте  $j$ -ого сочетания стоит знак  $\circ$ , то полагаем  $\beta(m, k, j, t)=2$ , в противном случае  $\beta(m, k, j, t)=1$ .

Пример:



$\beta(5, 2, 7, 2)=1$ , а  $\beta(5, 2, 3, 2)=2$ .

Такое наглядное описание функции  $\beta$ , конечно, имеет только вспомогательный характер. Сейчас дадим строгое определение этой функции ( $m \geq 1, k, j, t \geq 0$ ):

$$(2.1) \quad \beta(m, k, j, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } k=0 \\ \beta(m-1, k-1, j, t), & \text{если } k>0, j \leq \binom{m-1}{k-1}, t \neq m \\ 2, & \text{если } k>0, j \leq \binom{m-1}{k-1}, t = m \\ \beta(m-1, k, j - \binom{m-1}{k-1}, t), & \text{если } k>0, j > \binom{m-1}{k-1}, t \neq m \\ 1, & \text{если } k>0, j > \binom{m-1}{k-1}, t = m. \end{cases}$$

Простой индукцией по  $m$  доказываем, что, по крайней мере, для всех  $m, k, j, t$  с  $0 \leq k \leq m$ ,  $1 \leq j \leq \binom{m}{k}$ ,  $1 \leq t \leq m$  — (2.1) дает точно одно значение  $\beta(m, k, j, t)$ .

Указанное выше наглядное представление функции  $\beta$  удовлетворяет определению (2.1) для  $0 \leq k \leq m$ ,  $1 \leq j \leq \binom{m}{k}$ ,  $1 \leq t \leq m$ .

С помощью функции  $\beta$  введем новую функцию  $\gamma$ :

$$(2.2) \quad \gamma(m, k, j, t) = \sum_{z=1}^t \beta(m, k, j, z).$$

Справедливы следующие отношения:

$$(2.3) \quad \beta(1, 0, 1, 1) = 1,$$

$$(2.4) \quad \beta(1, 1, 1, 1) = 2,$$

$$(2.5) \quad \gamma(m, k, j, m) = m+k, \quad \text{если } 0 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq \binom{m}{k}.$$

(2.3) и (2.4) видны из (2.1). (2.5) легко проверяется для  $m=1$ ,  $k=0,1$  и для произвольного  $m$  и  $k=0$ . Для произвольного  $m$  и  $k>0$  (2.5) доказываем индукцией по  $m$ , причем надо выделить случаи  $1 \leq j \leq \binom{m-1}{k-1}$  и  $\binom{m-1}{k-1} < j \leq \binom{m}{k}$  и, соответственно, использовать вторую и третью, либо четвертую и пятую строки в (2.1).

Подробности опускаем.

В этой работе договоримся пользоваться следующими соотношениями:

$$(2.6) \quad \binom{0}{0} = 1$$

$$(2.7) \quad \binom{n}{k} = 0 \quad \text{для } k < 0,$$

$$(2.8) \quad \prod_{t=2}^p c_t = 1, \text{ если } q > p.$$

Кроме того, часто будем ставить номера используемых соотношений над знаком равенства, справедливого благодаря этим соотношениям, например,

$$\beta(1, 0, 1, 1) \stackrel{(2.1)}{=} 1.$$

### 3. Явное описание величин $S_i$

Введем сокращенную запись

$$(3.1) \quad (u, v)_2^p = \begin{cases} u_2, & \text{если } p=1 \\ v_2, & \text{если } p=2, \end{cases}$$

с помощью которой формулируем следующую теорему.

Теорема 3.1: Пусть величины  $S_i$  ( $i \geq 1$ ) определяются рекурсией:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} S_1 &= 1, \\ S_2 &= u_1, \\ S_{i+1} &= u_i S_i + v_i S_{i-1} \quad (i \geq 2), \end{aligned}$$

тогда

$$(3.4) \quad S_i = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} \sum_{j=1}^{i-k-1} \prod_{t=1}^{i-k-1} (u, v)_{\gamma(i-k-1, k, j, t)}^{\beta(i-k-1, k, j, t)} \quad (i \geq 1).$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} i=1: \quad S_1 &= \prod_{t=1}^0 (u, v)_{\gamma(0, 0, 1, t)}^{\beta(0, 0, 1, t)} \stackrel{(2.6), (2.8)}{=} 1. \\ i=2: \quad S_2 &= \prod_{t=1}^1 (u, v)_{\gamma(1, 0, 1, t)}^{\beta(1, 0, 1, t)} \stackrel{(2.5)}{=} u_1. \end{aligned}$$

Далее мы докажем, что для  $i \geq 2$  величины  $S_{i+1}$ ,  $S_i$ ,  $S_{i-1}$ , определенные формулой (3.4), удовлетворяют (3.3).

Используя следующую сокращенную запись:

$$(3.5) \quad P_{m,k,j} = \prod_{t=1}^m (u, v)_{\beta(m,k,j,t)}^{\beta(m,k,j,t)},$$

установим два равенства (3.6) и (3.10) для величин  $P_{m,k,j}$ .

$$(3.6) \quad u_i \cdot P_{i-k-1,k,j} = P_{i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1}}, \quad \text{если } 2 \leq i, 0 \leq k \leq \left[\frac{i-1}{2}\right]-1, \\ 1 \leq j \leq \binom{i-k-1}{k}$$

Сначала докажем (3.6) для  $k=0$ . В этом случае  $j=1$

$$u_i \cdot P_{i-1,0,1} = u_i \cdot \prod_{t=1}^{i-1} (u, v)_{\beta(i-1,0,1,t)}^{\beta(i-1,0,1,t)} \stackrel{(2.1)}{=} u_i \cdot \prod_{t=1}^{i-1} u_t = \prod_{t=1}^i u_t,$$

и также

$$P_{i-0,0,1+0} = \prod_{t=1}^i (u, v)_{\beta(i,0,1,t)}^{\beta(i,0,1,t)} = \prod_{t=1}^i u_t.$$

При  $k > 0$  справедливы следующие равенства:

$$(3.7) \quad (u, v)_{\beta(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},i-k)}^{\beta(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},i-k)} \stackrel{(2.1),(2.5)}{=} u_i$$

(принимая во внимание, что  $1 \leq j \Rightarrow j + \binom{i-k-1}{k-1} > \binom{i-k-1}{k-1}$ ,  
 $0 \leq k \leq \left[\frac{i-1}{2}\right]-1 \Rightarrow k \leq i-k$ ,  
 $1 \leq j \leq \binom{i-k-1}{k-1} \Rightarrow 1 \leq j + \binom{i-k-1}{k-1} \leq \binom{i-k-1}{k}$ ).

$$(3.8) \quad \beta(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},t) \stackrel{(2.7)}{=} \beta(i-k-1,k,j,t) \quad \text{для } 1 \leq t \leq k.$$

и

$$(3.9) \quad \gamma(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},t) = \gamma(i-k-1,k,j,t) \quad \text{для } 1 \leq t \leq k.$$

Теперь

$$P_{i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1}} = \left( \prod_{t=1}^{i-k-1} (u, v)_{\beta(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},t)}^{\beta(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},t)} \right) \cdot (u, v)_{\beta(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},i-k)}^{\beta(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},i-k)} \\ \stackrel{(3.7),(3.8),(3.9)}{=} u_i \cdot \prod_{t=1}^{i-k-1} (u, v)_{\beta(i-k-1,k,j,t)}^{\beta(i-k-1,k,j,t)} = u_i \cdot P_{i-k-1,k,j}.$$



т.е. (3.6) доказано.

$$(3.10) \quad v_i \cdot P_{i-k-2, k, j} = P_{i-k-1, k+1, j}, \quad \text{если } 2 \leq i, 0 \leq k \leq \lfloor \frac{i}{2} \rfloor - 1, \\ 1 \leq j \leq \binom{i-k-2}{k}.$$

Для доказательства равенства (3.10) сначала заметим, что

$$(3.11) \quad (u, v)_{\beta(i-k-1, k+1, j, i-k-1)}^{(2.1), (2.5)} = v_i,$$

(используя  $j \leq \binom{i-k-2}{k}$ ,  
 $k \leq \lfloor \frac{i}{2} \rfloor - 1 \Rightarrow k+1 \leq i-k-1$ , и  
 $1 \leq j \leq \binom{i-k-2}{k} \Rightarrow 1 \leq j \leq \binom{i-k-1}{k+1}$ ),

$$(3.12) \quad \beta(i-k-1, k+1, j, t) \stackrel{(2.1)}{=} \beta(i-k-2, k, j, t) \quad \text{для } 1 \leq t < i-k-1, \quad \text{и}$$

$$(3.13) \quad \gamma(i-k-1, k+1, j, t) = \gamma(i-k-2, k, j, t) \quad \text{для } 1 \leq t \leq i-k-1.$$

Теперь

$$P_{i-k-1, k+1, j} = \left( \prod_{t=1}^{i-k-2} (u, v)_{\beta(i-k-1, k+1, j, t)} \right) \cdot (u, v)_{\beta(i-k-1, k+1, j, i-k-1)} = \\ \stackrel{(3.11), (3.12), (3.13)}{=} v_i \cdot \prod_{t=1}^{i-k-2} (u, v)_{\beta(i-k-2, k, j, t)} = v_i \cdot P_{i-k-2, k, j},$$

т.е. (3.10) тоже доказано.

Итак, можем теперь вычислять

$$u_i S_i + v_i S_{i-1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k}} u_i \cdot P_{i-k-1, k, j} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor - 1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-2}{k}} v_i \cdot P_{i-k-2, k, j} = \\ \stackrel{(3.6), (3.10)}{=} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k}} P_{i-k, k, j} + \binom{i-k-1}{k-1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor - 1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-2}{k}} P_{i-k-1, k+1, j} = Y.$$

Выделим два случая

а)  $i = 2n$  ( $n \geq 1$ ). При этом

$$\left[ \frac{i+1}{2} \right] = \left[ \frac{i}{2} \right] - \left[ \frac{i+1}{2} \right] - 1 = n \quad \text{и} \quad \binom{i - \left[ \frac{i}{2} \right] - 1}{\left[ \frac{i}{2} \right] - 1} = \binom{i - \left[ \frac{i}{2} \right]}{\left[ \frac{i}{2} \right]} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Итак, } Y &= \sum_{k=0}^{\left[ \frac{i}{2} \right] - 1} \frac{\binom{i-k-1}{k} + \binom{i-k-1}{k-1}}{\sum_{j=1+\binom{i-k-1}{k-1}}^{\binom{i-k-1}{k}} P_{i-k, k, j}} + \sum_{k=1}^{\left[ \frac{i}{2} \right]} \frac{\binom{i-k-1}{k-1}}{\sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k-1}} P_{i-k, k, j}} = \\ &= \sum_{k=1}^{\left[ \frac{i}{2} \right] - 1} \left( \sum_{j=1+\binom{i-k-1}{k-1}}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k, k, j} + \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k-1}} P_{i-k, k, j} \right) + \sum_{j=1+0}^{\binom{i-1}{0}+0} P_{i-0, 0, j} + \sum_{j=1}^{\binom{\left[ \frac{i}{2} \right] - 1}{\left[ \frac{i}{2} \right] - 1}} P_{i - \left[ \frac{i}{2} \right], \left[ \frac{i}{2} \right], j} = \\ &= \sum_{k=1}^{\left[ \frac{i}{2} \right] - 1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k, k, j} + \sum_{j=1}^{\binom{i-0}{0}} P_{i-0, 0, j} + \sum_{j=1}^{\binom{\left[ \frac{i}{2} \right]}{\left[ \frac{i}{2} \right]}} P_{i - \left[ \frac{i}{2} \right], \left[ \frac{i}{2} \right], j} = \\ &= \sum_{k=0}^{\left[ \frac{i}{2} \right]} \sum_{j=1}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k, k, j} = \sum_{k=0}^{\left[ \frac{i+2}{2} \right] - 1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k, k, j} = S_{i+1}. \end{aligned}$$

б)  $i = 2n + 1$  ( $n \geq 1$ ). В этом случае  $\left[ \frac{i+1}{2} \right] - 1 = \left[ \frac{i}{2} \right] = \left[ \frac{i+2}{2} \right] - 1$ ,

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{k=0}^{\left[ \frac{i}{2} \right]} \frac{\binom{i-k-1}{k} + \binom{i-k-1}{k-1}}{\sum_{j=1+\binom{i-k-1}{k-1}}^{\binom{i-k-1}{k}} P_{i-k, k, j}} + \sum_{k=1}^{\left[ \frac{i}{2} \right]} \frac{\binom{i-k-1}{k-1}}{\sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k-1}} P_{i-k, k, j}} = \\ &= \sum_{k=1}^{\left[ \frac{i}{2} \right]} \left( \sum_{j=1+\binom{i-k-1}{k-1}}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k, k, j} + \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k-1}} P_{i-k, k, j} \right) + \sum_{j=1+0}^{\binom{i-1}{0}+0} P_{i-0, 0, j} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \sum_{j=1}^{(i-k)} P_{i-k, k, j} + \sum_{j=1}^{\binom{i-0}{0}} P_{i-0, 0, j} - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \sum_{j=1}^{(i-k)} P_{i-k, k, j} = \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{i+2}{2} \rfloor - 1} \sum_{j=1}^{(i-k)} P_{i-k, k, j} = S_{i+1}.
\end{aligned}$$

На этом теорема 3.1 доказана.

#### 4. Примечания

Приведем два примера использования представления (3.4).

Пример I: Числа Фибоначчи.

Числа Фибоначчи  $F_i$  ( $i \geq 1$ ) определены рекурсией

$$(4.1) \quad F_1 = F_2 = 1$$

$$F_{i+1} = F_i + F_{i-1} \quad (\text{для } i \geq 2).$$

Подставляя  $u_1 = u_i = v_i = 1$  ( $i \geq 2$ ) в (3.4), получаем известное выражение для  $i$ -ого числа Фибоначчи (см., например [2], стр. 13):

$$(4.2) \quad F_i = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} \binom{i-k-1}{k}.$$

Именно:

$$F_i = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} \sum_{j=1}^{(i-k-1)} \prod_{t=1}^{i-k-1} 1 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} \sum_{j=1}^{(i-k-1)} 1 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor - 1} \binom{i-k-1}{k}.$$

Пример 2: Определитель трехдиагональных матриц.

Пусть

$$(4.3) \quad A = \begin{pmatrix} b_1 & c_2 & & & \\ a_2 & b_2 & c_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{i-1} & b_{i-1} & c_i \\ & & & & a_i & b_i \end{pmatrix}$$

- трехдиагональная матрица. Ее определитель обозначим через  $\det_{i+1}(a_2, \dots, a_i, b_1, \dots, b_i, c_2, \dots, c_i)$ . Разлагая определитель по последней строке и минор, принадлежащий  $a_i$ , по последнему столбцу, получаем:

$$(4.4) \quad \det_{i+1}(a_2, \dots, a_i, b_1, \dots, b_i, c_2, \dots, c_i) = \\ = b_i \det_i(a_2, \dots, a_{i-1}, b_1, \dots, b_{i-1}, c_2, \dots, c_{i-1}) - \\ - a_i c_i \det_{i-1}(a_2, \dots, a_{i-2}, b_1, \dots, b_{i-2}, c_2, \dots, c_{i-2}).$$

Знаем, что

$$(4.5) \quad \det_2(b_1) = b_1.$$

Кроме того, полагаем

$$(4.6) \quad \det_1 = 1.$$

Таким образом, (4.4), (4.5) и (4.6) дают рекурсию вида (3.3) для вычисления  $\det_{i+1}(a_2, \dots, a_i, b_1, \dots, b_i, c_2, \dots, c_i)$ , где теперь

$$u_i = b_i \quad (i \geq 1) \quad \text{и} \quad v_i = -a_i c_i \quad (i \geq 2).$$

Формула (3.4) дает аналитическое представление для

$$\det_i(a_2, \dots, a_{i-1}, b_1, \dots, b_{i-1}, c_2, \dots, c_{i-1}):$$

$$(4.7) \quad \det_i (a_2, \dots, a_{i-1}, b_1, \dots, b_{i-1}, c_2, \dots, c_{i-1}) = \\ = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor - 1} \sum_{j=1}^{i-k-1} \prod_{t=1}^{i-k-1} (b, a_c)_{\beta(i-k-1, k, j, t)} \gamma(i-k-1, k, j, t) \quad (i \geq 1),$$

где

$$(4.8) \quad (b, a_c)_2^p = \begin{cases} b_2 & , \text{ если } p = 1 \\ -a_2 c_2 & , \text{ если } p = 2. \end{cases}$$

Этими определителями можно, например, выразить элементы обратной матрицы  $A^{-1}$  (см. /I/), так что отношение (4.7) позволяет и явное представление для обратной матрицы  $A^{-1}$ .

Проблема возникла в ходе общей работы с Г.Емельяненко /I/. В.Душский (Москва) и Г.Ососков (Дубна) дали ценные советы. В.Галактионов просмотрел русский текст работы. Им всем я выражаю глубокую благодарность.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 . Б.Бухбергер, Г.А.Емельяненко.  
Препринт ОИЯИ, РИИ-5686, Дубна, 1971.
- 2 . Н.Н.Воробьев. Числа Фибоначчи. Изд. "Наука", М., 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел

19 мая 1971 года.