ОБЪЕДИН
И
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р5-5620

С.И.Сердюкова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕК СПЕКТРА НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1971

Р5-5620

С.И.Сердюкова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕК СПЕКТРА НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

Направлено в ДАН СССР

Следуя H.-O. Kreiss [1], рассмотрим явную разностную аппроксима-цию гиперболической системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{1}$$

A – постоянная матрица размерности (k, k), u – вектор-функция размерности k. Без ограничения общности можно считать, что A – д гональная матрица.

Предположение 1. A – невырожденная матрица, неизвестные $u^{(\nu)}$ упорядочены так, что A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} A^{I} & 0 \\ 0 & A^{II} \end{pmatrix}, \quad A^{I} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_\ell \end{pmatrix} \quad A^{II} = \begin{pmatrix} a_{\ell+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{\ell+2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_k \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Решается смешанная краевая задача: заданы начальные данные $u(x,0) = f($ $x \geq 0$ и краевые условия

$$u^{I}(0, t) = S\, u^{II}(0, t), \quad t \geq 0.$$

Вектора u^{I}, u^{II} определены согласно разбиению A, S – прямоугольная постоянная матрица размерности $(\ell, k-\ell)$. Рассматривается равномерная сетка с шагами τ, h, отношение $a=\tau/h$ фиксировано. В узлах сетки (1) заменяется согласованной разностной аппроксимацией:

$$v_\nu(t+\tau) = \sum_{j=-r}^{p} A_j \, v_{\nu+j}(t),$$
$$v_\nu(0) = f_\nu, \quad \nu = 1,2,\dots \qquad (3)$$

Здесь A_j – постоянные матрицы размерности (k, k).

Предположение 2. $p \geq 1$, A_p, A_{-r} невырожденные.

Обозначим через $Q(\xi)$ характеристическую матрицу (3):

$$Q(\xi) = \sum_{j=-r}^{p} A_j \, e^{ij\xi}, \quad -\pi \leq \xi \leq \pi .$$

Предположение 3. Аппроксимация (3) диссипативная: существуют постоянная $\delta > 0$ и натуральное $2s > 0$, такие, что собственные значения (с.з.) $Q(\xi)$ удовлетворяют оценке:

$$|\mu(\xi)| < 1 - \delta |\xi|^{2s}, \quad -\pi \leq \xi \leq \pi .$$

Предположение 4. Соответствующая (3) задача Коши устойчива. Рассматриваются однородные краевые условия вида:

$$v_\mu(t) = \sum_{j=1}^{s} C_{j\mu} \, v_j(t), \quad \mu = 0, -1, \dots, -r+1 . \qquad (4)$$

Здесь $C_{j\mu}$ – постоянные матрицы размерности (k, k). Обозначим через H гильбертово пространство суммируемых с квадратом последовательностей, удовлетворяющих (4):

$$v = \{ v_{-r+1}, \dots, v_0, v_1, \dots \}, \quad \| v \|^2 = \sum_{1}^{\infty} |v_\nu|^2 .$$

Разностная аппроксимация устойчива, если существует постоянная K, не зависящая от τ, такая, что

$$\| v(t) \| < K \| v(0) \|$$

для всех $t = h\tau$ и всех $v(0) \subset H$.

Разностную аппроксимацию (3), (4) запишем в операторном виде:

$$v(t+\tau) = G v(t); \quad v(t), v(t+\tau) \subset H. \tag{5}$$

Для того чтобы разностная аппроксимация была устойчива, необходимо /1/, чтобы оператор G не имел точек спектра вне единичного круга. Обозначим через D множество точек: $|z| > 1$, $z \neq 1$. H.–O.Kreiss доказывает устойчивость (5) при условии, что G не имеет точек спектра в D и $z = 1$ не является "обобщенной точкой" спектра. (z_0 – точка спектра оператора G, если существует $v \neq 0$, $v \subset H$, такая, что $Gv = z_0 v$. Определение "обобщенной точки" спектра можно посмотреть в /1/).

В предлагаемой работе решается вопрос об устойчивости (5) в случае, когда $z = 1$ является точкой спектра (или обобщенной точкой спектра) оператора G.

Для того чтобы исследовать устойчивость (5), достаточно оценить порядок роста норм степеней оператора G. Если $\| G^n \|$ ограничена равномерно по n, то аппроксимация (5) устойчива. Если $\| G^n \|$ растет с ростом n, то порядок роста $\| G^n \|$ характеризует степень неустойчивости (5).

Следуя H.–O. Kreiss, представим G^n в виде контурного интеграла от резольвенты:

$$G^n = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} z^n (G - zI)^{-1}\, dz. \tag{6}$$

Здесь $\Gamma = \{ |z-1| = \rho \cap |z| \geq 1-\epsilon \} \cup \{ |z| = 1-\epsilon \cap |z-1| \geq \rho \} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (см. /1/).

Если выполняются предположения 1–4 и G не имеет точек спектра в D, то интеграл по Γ_2 экспоненциально убывает с ростом n. Оценку интеграла по Γ_1 получим с помощью явного представления резольвенты для z, близких к 1. Чтобы получить такое представление, необходимо выписать в явном виде решение системы разностных уравнений:

$$\sum_{j=-r}^{p} A_j f_{\nu+j} - z f_{\nu} = v_{\nu}, \quad \nu = 1,2,\dots,$$

$$f_{\mu} = \sum_{j=1}^{s} C_{j\mu} f_j, \; \mu = 0,-1,\dots,-r+1, \; f \subset H .$$

После замены $y_{\nu} = (f_{\nu+p-1},\dots,f_{\nu-r})$ получаем одношаговую формулу: $y_{\nu+1} = M y_{\nu} + g_{\nu}$,

$$M = \begin{pmatrix} -A_p^{-1}A_{p-1} & -A_p^{-1}A_{p-2} & \dots & -A_p^{-1}(A_0\, zI) & \dots & -A_p^{-1}A_{-r} \\ I & 0 & \dots & 0 & \dots\ 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & \dots\ 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & \dots\ . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots\ I & 0 \end{pmatrix}; g_{\nu} = \begin{pmatrix} A_p^{-1} v_{\nu} \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Краевые условия могут быть записаны в таком виде:

$$[0\, I]\, y_1 = \sum_{\ell=r}^{s} [0\, C_{\ell}]\, y_{\ell+1} ,$$

где

$$C_r = \begin{bmatrix} C_{r,0} & \dots & C_{1,0} \\ \cdot & & \cdot \\ \vdots & & \vdots \\ \cdot & & \cdot \\ C_{r,-r+1}, & \dots & C_{1,-r+1} \end{bmatrix}, \quad C_{r+1} = \begin{bmatrix} C_{r+1,0} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_{r+1,-r+1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \quad C_s = \begin{bmatrix} C_{s,0} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_{s,-r+1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Для z, близких к 1, с.з. M разбиваются на 4 класса. $kr-\ell$ с.з. находятся внутри единичного круга (K_1), эти собственные значения отнесем к классу S_1; k с.з. стремится к 1 при $z \to 1$. Эти собственные значения устроены так:

$$\kappa_j = 1 + (\alpha a_j)^{-1}(z-1) + 0((z-1)^{1+\frac{1}{k}}), \quad j = 1,\dots,k.$$

Здесь a_j – диагональные элементы исходной непрерывной задачи (2). При $|z| > 1$ первые ℓ из числа рассматриваемых с.з. находятся в K_1, эти с.з. отнесем к S_2, остальные $k-\ell$ с.з. составляют S_3. Наконец, $pk-k+\ell$ с.з. лежат вне K_1 и остаются вне K_1 при $z = 1$. Эти с.з. принадлежат классу S_4.

Лемма H.-O. Kreiss /1/. Существует постоянная ρ и несингулярная аналитическая в круге $|z-1| \le \rho$ матрица $T(z)$, такая, что

$$T(z)M(z)T^{-1}(z) = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4 \end{pmatrix} = \bar{M}(z).$$

Блокам M_1, M_2, M_3, M_4 отвечают классы с.з. S_1, S_2, S_3, S_4. После замены $w_\nu = T y_\nu$ уравнение $y_{\nu+1} = M y_\nu + g_\nu$ принимает вид:

$$w_{\nu+1} = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} w_\nu + T g_\nu.$$

Его общее (в H) решение дается формулами:

$$w_j^I = \sum_{\nu=1}^{j-1} M_{11}^{j-\nu-1} (Tg_\nu)^I + M_{11}^{j-1} w_1^I \quad ,$$

$$w_j^{II} = -\sum_{\nu=j}^{\infty} M_{22}^{j-\nu-1} (Tg_\nu)^{II} \ .$$

Вектора w_j^I , w_j^{II} определены согласно разбиению $\bar{M}$ на блоки. w_1^I определяется из краевых условий, которые после замены переменных преобразуются к виду: $K_1(z)\, w_1^I = K_2(z)\, w_1^{II} + \sum_{\nu=1}^{s} (B_\nu^I(z)(Tg_\nu)^I + B_\nu^{II}(z)(Tg_\nu)^{II})$.
Здесь K_1, K_2, B_ν^I, B_ν^{II} – аналитические в $|z-1|\le\rho$ матрицы:

$$K_1(z) = T_{21}^- - \sum_{\nu=r}^{s} C_\nu T_{21}^- M_{11}^\nu \ , \quad B_\nu^I(z) = \sum_{\ell=\max(r,\nu)}^{s} C_\nu T_{21}^- M_{11}^{\ell-\nu} \quad ,$$

$$K_2(z) = -(T_{22}^- - \sum_{\nu=r}^{s} C_s T_{22}^- M_{22}^\nu \ ), \quad B_\nu^{II}(z) = \sum_{\ell=\max(r,\nu)}^{s} C_\nu T_{22}^- M_{22}^{\ell-\nu} \ .$$

Матрица $T^{-1}(z)$ следующим образом разбита на блоки:

$$T^{-1}(z) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} rk & pk \end{array} \\ \begin{pmatrix} T_{11}^- & T_{12}^- \\ T_{21}^- & T_{22}^- \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ pk \\ rk \end{array} \ .$$

H.–O.Kreiss предполагает, что $z=1$ не является обобщенной точкой спектра, тогда $K_1^{-1}(z)$ определена в окрестности $z=1$ и w_1^I является линейной комбинацией w_1^{II} , $(Tg_\nu)^I$, $(Tg_\nu)^{II}$, $\nu=1,\dots, s$ с аналитическими коэффициентами. Мы рассматриваем случай сингулярной $K_1^{-1}(z)$. Для такого случая удалось получить необходимое и достаточное условие устойчивости (3), (4) в L_2 .

З а м е ч а н и е. В работе St. Osher /4/ получено достаточное условие устойчивости при некоторых требованиях на разностную аппроксимацию, одним из которых является так называемое требование "разделенности нулей". В предлагаемой работе такого требования нет.

Основная теорема. Пусть выполняются предположения 1–4 и пусть G не имеет точек спектра в D ($|z|\geq 1$, $z\neq 1$). Тогда для того чтобы аппроксимация (3), (4) была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия.

1. Матрица K_1^{-1} не должна иметь особенностей при $z=1$ в нижних ℓ строках и не должна иметь особенностей выше 1-го порядка в остальных строках.

2. Матрица $K_1^{-1}K_2$ не должна иметь особенностей при $z=1$ в первых $k-\ell$ столбцах.

При нарушении условия 1 нижними ℓ строками имеет место неустойчивость порядка не ниже $n^{q-\frac{1}{2}}$, где q – максимальный порядок особенностей элементов нижних ℓ строк $K_1^{-1}(z)$. Если элементы верхних $kr-\ell$ строк имеют особенности выше первого и максимальный порядок особенностей равен q, то имеет место неустойчивость порядка не ниже n^{q-1}. Если 1 выполнено, а 2 нарушается, то имеет место неустойчивость порядка не ниже чем $\sqrt{n}$.

Доказательство необходимости условия 1. Рассмотрим специальные начальные данные: $g_j=0$ для $j\geq r+1$. Для таких начальных данных краевые условия могут быть преобразованы к такому виду:

$$w_1^I=-\sum_{\nu=1}^{r} M_{11}^{-\nu}(Tg_\nu)^I+K_1^{-1}(z)\Big[\sum_{\nu=1}^{r} M^{-\nu}g_\nu\Big]_{rk}=-\sum_{\nu=1}^{r} M_{11}^{-\nu}(Tg_\nu)^I+K_1^{-1}(z)\chi(z).$$

Через $[g]_{rk}$ обозначен вектор, состоящий из нижних rk компонент вектора g. Подбирая специальным образом $v_1,\dots,v_r$, мы можем устроить произвольный при $z=1$ вектор $\chi(1)$. Это дает нам возможность выделить любую особенность матрицы $K_1^{-1}(z)$. Интеграл по Γ_1 можно заменить интегралом по $\Gamma_3=\{|z-1|\leq\rho\}\cap\{|z|=1-\epsilon\}$, добавляя при этом соответствующий вычет. Заменяя таким образом контур интегрирования в (6) и используя (8), доказываем следующую лемму.

Лемма 1. Для любого достаточно малого ϵ найдутся постоянные c_1 и c_2 такие, что при $j \le c_1$

$$\int_{\Gamma_1} z^n w^I_j (z) dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1} (z^n M^{j-1}_{11}(z) w^I_1(z)) + R_j, \quad |R_j| \le c_2 (1-\epsilon)^{\frac{n}{2}}.$$

Отсюда получаем оценки роста $\|G^n\|$ при нарушении условия 1.

Доказательство необходимости условия 2.

Пусть выполняется условие 1, но условие 2 не выполняется. Тогда среди элементов верхних $rk-\ell$ строк и левых $k-\ell$ столбцов матрицы $K^{-1}_1 K_2$ есть элементы, имеющие при $z=1$ полюс первого порядка. Из представления (8) следует, что для достаточно малых ρ, ϵ найдется B такое, что на дуге $\{|z|=1-\epsilon \cap |z-1| \le \rho\}$ с.з. матриц $M^j_{11}(z)$, $M^{-j}_{22}(z)$ по модулю не превосходит $(1-\epsilon)^{-n/2}$. Рассмотрим специальные начальные данные: $v_\nu = \xi/\sqrt{n}$ при $s+1 \le \nu \le Bn$; $v_\nu = 0$ при $1 \le \nu \le s$, $\nu > Bn$. При таких начальных данных краевые условия принимают вид

$$w^I_1 = -K^{-1}_1(z) K_2(z) \sum_{\nu=s+1}^{Bn} M^{-\nu}_{22} (Tg_\nu)^{II}.$$

Вектор ξ можно подобрать так, что при $z=1$ в верхних $k-\ell$ компонентах векторов $\sqrt{n}\ (Tg_\nu)^{II}$, $s+1 \le \nu \le Bn$ будет находиться произвольный вектор.

Лемма 2. Пусть в окрестности $z=1$

$$K^{-1}_1(z) K_2(z) = \frac{1}{z-1} (A_0 + (z-1) A_1(z)), \quad A_0 \ne 0.$$

Тогда для достаточно малого ϵ найдутся постоянные C_1, C_2, такие, что

$$\int_{\Gamma_1} z^n w^I_1 \, dz = 2\pi i \operatorname{Res} (z^n w^I_1(z)) + R_1 = 2\pi i A_0 B \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} + R_2,$$

$$|R_1| \le C_1 (1-\epsilon)^{\frac{n}{2}}, \quad |R_2| \le C_2/\sqrt{n}, \quad \chi = (Tg_\nu)^{II}_{z=1}.$$

Остается таким образом подобрать χ , чтобы выделить один из ненулевых элементов матрицы A_0 .

Доказательство достаточности. Если условия 1 , 2 выполняются, то L_2 - устойчивость аппроксимации (3), (4)-доказывается довольно просто при дополнительном требовании : матрицы $M_2(e^{i\phi})$, $M_3^{-1}(e^{i\phi})$ должны удовлетворять критерию устойчивости H.–O.Kreiss– Урма /5,6/. На самом деле, если это дополнительное требование не выполняется, то нарушается L_2 -устойчивость задачи Коши. Автором были предприняты попытки доказать " L_2 -устойчивость" матриц M_2 , M_3^{-1} непосредственно из L_2 -устойчивости задачи Коши. Однако эти попытки не увенчались успехом. Пришлось идти окольным путем. Доказательство достаточности свелось к доказательству двух теорем. Введем обозначения:

$$G^{\nu}_{n\epsilon} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{in\phi} M^{\nu}(e^{i\phi}) d\phi, \quad \gamma_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \| G^{\nu}_{n\epsilon} \|^2 .$$

Теорема 1. Если матрица $M(e^{i\phi})$ L_2- устойчива, то γ_n ограничена равномерно по n .

Для доказательства достаточно воспользоваться оценками, полученными в работе /5/. После того как теорема 1 доказана, L_2 -устойчивость аппроксимации (3), (4) при дополнительном требовании L_2-устойчивости матриц $M_2(e^{i\phi})$, $M_3^{-1}(e^{i\phi})$ доказывается без труда.

Теорема 2. Пусть $M(e^{i\phi})$ - аналитическая матрица и пусть ее с.з. в окрестности $\phi = 0$ допускают разложения:

$$\lambda_k(\phi) = \exp\{ i a^{(k)} \phi + i \sum_{\nu=p(k)}^{2\mu(k)} a^{(k)}_{\nu} \phi^{\nu} - \beta^{(k)} \phi^{2\mu(k)} (1 + 0(\phi)) \};$$

$a^{(k)}$, $a^{(k)}_{\nu}$ - действительные, $\beta^{(k)} > 0$. Собственные значения λ_ℓ, λ_k принадлежат одному классу относительно $\phi = 0$, если совпадают следующие параметры:

$$p(\ell) = p(k), \quad \mu(\ell) = \mu(k), a^{(\ell)} = a^{(k)}, \; a^{(\ell)}_{\nu} = a^{(k)}_{\nu}, \; \nu = 1, \dots, 2\mu; \; \beta^{(\ell)} = \beta^{(k)} .$$

В малой окрестности $\phi=0$ матрица $M(e^{i\phi})$ невырожденным аналитическим преобразованием подобия приводится к треугольному виду. Пусть среди внедиагональных элементов треугольной матрицы есть "дефектные", не удовлетворяющие условию Урма /4/, элементы. Фиксируем ближайшую к главной диагональ, содержащую дефектные элементы. Обозначим через $a_{\ell k}$ один из дефектных элементоы фиксированной диагонали. Тогда, если λ_ℓ и λ_k из одного класса и $a_{\ell k}=\phi^{2\mu-\kappa}\rho(\phi), \kappa<2\mu, \rho(0)\neq 0$, то $\gamma_n > cn^{\frac{2\kappa-1}{2\mu}}$. Если λ_ℓ и λ_k из разных классов и $\ln\lambda_\ell - \ln\lambda_n = \phi^\gamma \rho_1(\phi)$, $a_{\ell k}=\phi^{\gamma-k}\rho_2(\phi)$, $\rho_1(0)\neq 0$, $\rho_2(0)\neq 0$, $\kappa<\gamma$, то $\gamma_n > cn^{\frac{2\kappa-1}{\gamma}}$.

При доказательстве теоремы использовались оценки, полученные в работах /5,6/, и аналогичные им оценки. В частности, из этих оценок следует, что существенный вклад в γ_n дают области, прилегающие к "характеристикам" $n=\nu/a|a_j|$. Благодаря этому, можно подобрать такие начальные данные, чтобы на n-ом слое по времени, в области $\nu>(p+r+1)n$, где решение краевой задачи совпадает с решением задачи Коши, оно имело тот же порядок роста в L_2, что и γ_n. Основная теорема доказана.

Алгоритм построения $T(z)$. Пусть известны с.з. $M(1)$. Построим (см., например, /7/) ряды по степеням $(z-1)^{1/m}$, представляющие с.з. для z, близких к 1. Многочлен $\det(M(z)-\lambda)$ может быть представлен в виде произведения четырех многочленов с аналитическими по z коэффициентами:

$$\det(M(z)-\lambda)=D_1 D_2 D_3 D_4 .$$

Многочлену $D_1(\lambda, z)$ отвечают с.з. класса S_1. Обозначим через n_1 размерность соответствующего собственного подпространства (с.п.). Стобцы матрицы $D(M(z),z)$ содержат базис ортогонального дополнения к рассматриваемому с.п. Чтобы выделить этот базис, положим $z=1$. Среди столбцов $D_i(M(1),1)$ есть ровно $(p+r)k-n_i$ линейно независимых. По непрерывности соответствующие столбцы матрицы $D_i(M(z),z)$ дают аналитический базис в окрестности $z=1$. Имея аналитический базис ортогонального дополнения, нетрудно построить аналитический базис самого с.п.. Базисы с.п. берем в качестве столбцов матрицы $M^{-1}(z)$.

Пример. Рассматривается разностная аппроксимация первой краевой задачи для уравнения $u_t+u_x=0$:

$$\begin{cases} u_\nu^{n+1}=u_\nu^n-\dfrac{a}{2}(u_{\nu+1}^n-u_{\nu-1}^n)+\dfrac{a^2}{2}(u_{\nu+1}^n-2u_\nu^n+u_{\nu-1}^n), \quad \nu\geq 1, \\ u_0^n=2u_1^n-u_2^n, \quad u_\nu^0=\phi_\nu, \quad a=\tau/h. \end{cases}$$

Схема диссипативна при $a<1$, рассмотрим $a=0,5$. Тогда

$$M(z)=\begin{bmatrix} 6-8z & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1=1-2(z-1)+3(z-1)^2+\ldots, \quad \lambda_2=-3-6(z-1)-3(z-1)^2+\ldots$$

Далее находим $T^{-1}(z)$, $K_1(z)$, $K_2(z)$,

$$T^{-1}(z)=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 \end{bmatrix}, \quad K_1(z)=-\lambda_2(1-\lambda_1)^2, \quad K_2=\lambda_1(1-\lambda_2)^2.$$

Таким образом, $K_1^{-1}(z)$ имеет при $z=1$ полюс 2-го порядка, $K_1^{-1}K_2$ имеет полюс 2-го порядка при $z=1$. Нарушается условие 1 основной теоремы. Согласно этой теореме следствием такого нарушения должна быть L_2-неустойчивость порядка не ниже $n^{3/2}$. Причем такой порядок роста в L_2 должно иметь решение со следующими начальными данными: $u_1^0=1$, $u_\nu^0=0$, $\nu\geq 2$.

Автором был проделан соответствующий численный эксперимент, рассчитывалась величина $\sigma_n=(\sum_{\nu=0}^{\infty}|u_\nu^n|^2)^{1/2}/n^{3/2}$ и были получены следующие результаты: $\sigma_{500}=0,2754$; $\sigma_{1500}=0,2732$; $\sigma_{4000}=0,2725$; $\sigma_{4500}=0,2725$.

Литература

1. H.-O. Kreiss. Stability Theory for Difference Approximations of Mixed Initial Boundary Value Problems. 1. Mathematics of Computation, vol.22, number 104, 1968, pp 703-714.
2. Stanley Osher. Systems of differece equations with general homogeneans boundary conditions. Transactions of the Amarican Mathematical, vol. 137. March, 1969, pp.177-201.
3. H.-O. Kreiss. Über die Matrizen die beschrankte Halbgruppen erzeugen, Math.Scand, 7, 1959, pp.71-80.
4. В.Я. Урм. О необходимом и достаточном условии устойчивости систем разностных уравнений. ДАН СССР, 139, 1, 40-43, 1961.
5. С.И. Сердюкова. Об устойчивости в равномерной матрице систем разностных уравнений. ЖВМ и МФ, 7, 3, 497-509, 1967.
6. С.И. Сердюкова. Об осцилляциях, возникающих при численных расчетах разрывных решений дифференциальных уравнений. Препринт ОИЯИ, Р11-4748, Дубна, 1969.
7. А.И. Маркушевич. Теория аналитических функций. ГИТТЛ, гл. VIII, 6,3, 1950.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 февраля 1971 года.