СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р5 - 5515

Л. Александров

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

АВТОРЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ТИПА НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА

1970

P5 - 5515

Л.Александров

АВТОРЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ТИПА НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА

В работах[1,2] для решения нелинейного операторного уравнения

$$f(x) = \theta \tag{1}$$

вводятся на основе метода регуляризации А.Н. Тихонова регуляризованные итерационные процессы типа Ньютона-Канторовича. Для этих процессов характерно то, что не предполагается обратимость производной $f'(x)$ в сфере вокруг начальной точки x_0.

В настоящей работе выделяется важный подкласс указанных регуляризованных процессов, называемых "авторегуляризованными", для которых регуляризация на каждой итерации процесса выполняется в зависимости от величины невязки уравнения на основе предыдущей итерации. В работе более подробно изучается один из авторегуляризованных процессов типа Ньютона-Канторовича (далее обозначается как $\mathfrak{R}^{\ell}_{\epsilon_n}$), характерный своими конструктивными свойствами. В работе также рассматриваются численные примеры, решения которых найдены программой для ЭВМ на основе процесса $\mathfrak{R}^{\ell}_{\epsilon_n}$.

На этих примерах показана ослабленная зависимость авторегуляризованных процессов от начального приближения, а также способность этих процессов избегать области вырождения оператора $f'(x)$. Кроме того, показана возможность строить классы процессов, достигающих различных решений задачи путем варьирования одного из начальных параметров процесса.

На основе метода Унгера задачу о собственных значениях предлагается решать введенными авторегуляризованными процессами.

§1. Авторегуляризованные процессы типа Ньютона-Канторовича

Пусть S -полное линейное L -суперметрическое пространство /3/, f -нелинейный оператор, отображающий выпуклое подмножество $X \subseteq S$ в пространстве S ($Y = f(X) \subseteq S$) и пусть существует первая производная Фреше $f'(x)$.

Итерационный процесс $\mathfrak{R}_{\omega_n}[f; x_0; \omega_0]$. x_0, $x_{n+1} = x_n - (f'(x_n) + \omega_n)^{-1} f(x_n)$, $x_n \in X$, ($n = 0,1,2,\dots$), где линейные операторы ω_n (действующие из X в Y) таковы, что операторы $f'(x_n) + \omega_n$ регулярные, называется регуляризованным итерационным процессом Ньютона-Канторовича /1/.

Пусть S -гильбертово пространство. К регуляризованным процессам отнесем и процесс /2/

$$\mathfrak{R}^{\ell}_{\omega_n}: x_0, x_{n+1} = x_n - (f'^*(x_n) f'(x_n) + \omega_n)^{-1} f'^*(x_n) f(x_n),$$

$$x_n \in X \quad (n = 0,1,2,\dots),$$

а также процесса

$$\mathfrak{R}^{r}_{\omega_n}: x_0, x_{n+1} = x_n - f'^*(x_n)(f'(x_n) f'^*(x_n) + \omega_n)^{-1} f(x_n),$$

$$x_n \in X \quad (n = 0,1,2,\dots),$$

где линейные операторы ω_n, действующие из X в Y, положительно определены для всех конечных n.

2. В некоторых случаях уравнение (1) решается посредством некоторого другого уравнения типа

$$af(x) = \theta \tag{2}$$

(a действует из Y в X), эквивалентного (1) или даже в случае, когда только решения уравнения (1) являются решениями уравнения (2).

Теперь назовем процессы типа $\mathcal{R}_{\omega_n}$, $\mathcal{R}^{\ell}_{\omega_n}$ и $\mathcal{R}^{r}_{\omega_n}$ авторегуляризованными процессами Ньютона, если нормы $\|\omega_n\|$ ($n = 0,1,2,\ldots$) являются монотонно неубывающими функциями нормами $\|a_n f(x_n)\|$ (a_n – подходящим образом выбранные операторы, действующие из Y в X; в случае процесса $\mathcal{R}_{\omega_n}$ можно положить $a_n = E$, а в случае $\mathcal{R}^{\ell}_{\omega_n}$ – $a_n = f'^{*}(x_n)$).

Ниже исследуется и применяется следующая модификация авторегуляризованного процесса $\mathcal{R}^{\ell}_{\omega_n}$

$$\mathcal{R}^{\ell}_{\epsilon_n} : x_0,\ \epsilon_0 \geq 0\ ;\ x_{n+1} = x_n - (f'^{*}(x_n)\, f'(x_n) + \epsilon_n E)^{-1} f'^{*}(x_n)\, f(x_n),$$

$$x_n \in X,\ (n = 0,1,2,\ldots),$$

где числа ϵ_n суть

$$\epsilon_n = a_2\left(\sqrt{\frac{\|f'(x_n)\|^4}{4} + \frac{a_1}{\rho_0}(\|f'(x_0)\|^2\epsilon_0 + \epsilon_0^2)\|f'^{*}(x_n)f(x_n)\|} - \frac{1}{2}\|f'(x_n)\|^2\right)$$

$$a_1 \in [0,1],\quad a_2 \in (0,1],$$

– произвольные фиксированные числа.

§2. Сходимость процесса $\mathcal{R}^{\ell}_{\epsilon_n}$

1. Введем обозначения:

$$g_n = f'^{*}(x_n)\, f(x_n),\ \rho_n = \|g_n\|,\ h_n = f'^{*}(x_n)\, f'(x_n),$$

$$r_n = \frac{1}{2} \| f'(x_n) \|^2 , \quad b_n = \| (h_n + \epsilon_n E)^{-1} \| ,$$

$$N_0 = \frac{a_1}{\rho_0} (2 r_0 \epsilon_0 + \epsilon_0^2) , \quad \| f'(x) \| \le T < \infty \quad X .$$

Рассмотрим следующие условия, связанные с процессом $\mathfrak{R}_{\epsilon_n}^{\ell}$.

А. В X существует ограниченная вторая производная Фреше

$$\frac{1}{2} \| f''(x) \| \le M < \infty .$$

Б. Существует константа $P \subseteq [0, \infty)$ (параллельно будем рассматривать и второй случай, когда существует константа $Q \subseteq [0,1)$), так что для любых точек x , $y \subseteq X$ и любой точки $z \subseteq \{ x + (1-t) y \mid t \subseteq [0,1] \}$ выполнено неравенство

$$\| (f'^*(x) - f'^*(y)) f(z) \| \leqslant u(x,y) , \qquad (Б.1)$$

где для функционала u имеем

$$u(x,y) = P \| x - y \|^2$$

(или, во втором случае $u(x,y) = Q \| f^*(z) f(z) \|$).

В. Для начальных x_0 и ϵ_0 выполняются неравенства (начальные условия)

$$0 \le \phi_0 \le 1 - \beta < 1 , \quad \beta < 1 , \qquad (В.1)$$

$$\beta + \frac{\phi_0}{1-\phi_0} \frac{\gamma^2}{(\gamma - b_0) b_0} \le 1 , \qquad (В.2)$$

где $\gamma > b_0$ – заданное действительное число и $\nu = (MT + P + N)\gamma^2$ (или, во втором случае $\nu = \frac{MT + N_0}{1 - Q}\gamma^2$), $\beta = \nu\rho_0$, $\phi_0 = (2MT+ +N_0)\gamma\ b_0\rho_0$.

Г. Для чисел ϵ_n выполняются неравенства

$$|\epsilon_n - \epsilon_{n+1}| \le \epsilon_n \quad (n = 0,1,2,\ldots) . \tag{Г.1}$$

$$\text{Д.}\quad W = \{ x \ / \ \| x_1 - x \| \leqslant \frac{\gamma\ \beta\ \rho_0}{1 - \beta^2} \} \subseteq X .$$

Имеет место следующее основное утверждение о сходимости процесса $\Re^{\ell}_{\epsilon_n}$.

Теорема

Пусть для процесса $\Re^{\ell}_{\epsilon_n}$ выполнены условия А–Д. Тогда этот процесс сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\epsilon \subseteq W$. Точка x_ϵ является решением уравнения

$$f'^*(x)\quad f(x) = \theta \tag{3}$$

в области X . Справедлива оценка

$$\| x_\epsilon - x_n \| \le \frac{\gamma\ \rho_0\ \beta^{2^n - 1}}{1 - \beta^{2^n}} \quad (n = 1,2,\ldots) .$$

Доказательство

Для процесса $\Re^{\ell}_{\epsilon_n}$ имеем

$$\| x_n - x_{n+1} \| = \| (h_n + \epsilon_n E)^{-1} g_n \| \le b_n \rho_n \quad (n = 0,1,2,\ldots) .$$

Из очевидного равенства

$$(\epsilon_n - a_2\sqrt{r_n^2 + N_0 \rho_n} + a_2 r_n)(\epsilon_n + a_2\sqrt{r_n^2 + N_0 \rho_n} + a_2 r_n) = 0$$

следует равенство

$$2 r_n a_2 \epsilon_n + \epsilon_n^2 = a_2^2 N_0 \rho_n$$

и неравенства

$$\epsilon_n \| h_n + \epsilon_n E \| \leq N_0 \rho_n \leq N_0 C_n \rho_n \quad (n = 0,1,2,\dots), \tag{5}$$

где

$$C_n = \| (h_n + \epsilon_n E)^{-1} \| \, \| h_n + \epsilon_n E \| \geq 1$$

– число обусловленности оператора $h_n + \epsilon_n E$ /3, стр.105/.

Из неравенства (5) получаем окончательно

$$\epsilon_n \leq N_0 b_n \rho_n \quad (n = 0,1,2,\dots). \tag{6}$$

Исходя из этих неравенств, находим

$$\epsilon_n \| (h_n + \epsilon_n E)^{-1} g_n \| \leq N_0 b_n^2 \rho_n^2 ,$$

и используя обозначения

$$\delta_n = x_{n+1} - x_n = -(h_n + \epsilon_n E)^{-1} g_n , \tag{7}$$

можем записать

$$\epsilon_n \| \delta_n \| \leq N_0 b_n^2 \rho_n^2 \quad (n = 0,1,2,\dots).$$

Из (6) следуют соотношения

$$\rho_{n+1} = \| g_{n+1} - g_n - (h_n + \epsilon_n E)\,\delta_n \| \le$$

$$\le \| (f'^*(x_{n+1}) - f'^*(x_n))\, f(x_{n+1}) \| +$$

$$+ \| f'^*(x_n) \| \; \| f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)\,\delta_n \| + \epsilon_n \|\delta_n\| .$$

На основе формулы Тейлора и неравенств (Б1) и (4) получаем неравенства

$$\rho_{n+1} \le (MT + P + N_0)\; b_n^2\; \rho_n^2 \qquad (n = 0,1,2,\ldots) \tag{9}$$

(или во втором случае неравенство

$$\rho_{n+1} \le \frac{MT + N_0}{1 - Q}\; b_n^2\; \rho_n^2 \qquad (n = 0,1,2,\ldots) . \qquad 9')$$

С помощью полной математической индукции доказываются следующие утверждения

a) $\rho_n \le \rho_0\, \beta^{2^n - 1} < \rho_0$;

b) $\phi_n \le \phi_0 < 1$, где $\phi_n = (2MT + N_0)\,\gamma\, b_n\, \rho_n$;

c) $b_n \le 1 - (\gamma - b_0)\, \beta^{2^n - 1} \le \gamma$;

d) $x_n \subset X$.

Дальнейшее доказательство теоремы с необходимыми изменениями проводится по схеме доказательства теоремы 3/1/. Приведем здесь только доказательство утверждения b) :

Для $n = 0$ b) верно в силу (B1).

Пусть b) верно для n . Рассматриваем линейный оператор

$$p = E - (h_n + \epsilon_n E)^{-1} (h_{n+1} + \epsilon_{n+1} E) .$$

Для его нормы имеем:

$$\| p \| \leq b_n \| h_n - h_{n+1} \| + b_n | \epsilon_n - \epsilon_{n+1} | \leq$$

$$\leqslant b_n \| f'^*(x_n) - f'^* (x_{n+1}) \| \| f'(x_n) \| +$$

$$+ b_n \| f'(x_n) - f'(x_{n+1}) \| \| f'^*(x_n) \| + b_n | \epsilon_n - \epsilon_{n+1} | .$$

На основе формулы Тейлора и неравенств (6), (Г1) и b) получаем

$$\| p \| \leqslant (2MT + N_0) \gamma b_n \rho_n = \phi_n < 1$$

и, следовательно, ряд $\sum_{i=0}^{\infty} p^i v$ сходится для всех $v \subset X$.

Отсюда заключаем, что $\| (E - p)^{-1} \| < \frac{1}{1 - \phi_n}$. В результате имеем

$$b_{n+1} = \| (E - p)^{-1} (h_n + \epsilon_n E)^{-1} \| < b_n \frac{1}{1 - \phi_n} .$$

Из соотношений (9) (или, во втором случае из соотношений (9')) получаем

$$\phi_{n+1} = (2MT + N_0)\gamma\, b_{n+1}\, \rho_{n+1} \le$$

$$\le (2MT + N_0)\gamma \frac{b_n}{1-\phi_n} \nu\, \rho_n^2 = \frac{\phi_n}{1-\phi_n} \nu\, \rho_n ,$$

отсюда с учетом a) и b) и того, что $\beta \le 1 - \phi_0$ находим окончательно

$$\phi_{n+1} \le \frac{\phi_n}{1-\phi_n} \nu\, \rho_0 = \frac{\phi_n}{1-\phi_n} \beta \le \phi_n < 1 ,$$

т.е. утверждение b) верно и для $n + 1$.

2. Так как условия А–Д доказанной теоремы трудно проверяемые, то в вычислительной практике (как и в случае других итерационных процессов) процесс $\mathfrak{R}^{\ell}_{\epsilon_n}$ часто употребляется эвристически. В таком случае эта теорема служит для поддержки гипотезы применяемости процесса $\mathfrak{R}^{\ell}_{\epsilon_n}$.

§ 3. Численные примеры применения процесса $\mathfrak{R}^{\ell}_{\epsilon_n}$

1. На основе процесса $\mathfrak{R}^{\ell}_{\epsilon_n}$ создана программа для ЭВМ БЭСМ-6 (SUBROUTINE AUTORE – на языке DUBNA FORTRAN /4/). В этой программе в качестве нормы вектора употребляется норма Чебышева с весами и согласованная с ней норма для нормы матрицы. Программа AUTORE кроме решения по итерации вычисляет главные

характеристики поведения процесса ρ_n, ϵ_n, c_n, $d_n = \det(h_n + \epsilon_n E)$ и также число $r_n = \| f(x_n) \|$.

Константы α_1 и α_2 – постоянные для всего процесса. В программе AUTORE они являются "управляющими" вычислительного процесса: делая нужные комбинации между $\alpha_1 \subset [0,1]$ и $\alpha_2 (0,1]$, можно получать процессы с разными степенями "авторегуляризации" и с разной скоростью сходимости. Меняя начальное число ϵ_0 в этой программе, можно построить процессы, доходящие до разных решений задачи.

Рассмотрим некоторые характерные примеры решения нелинейных систем уравнений программой AUTORE.

2. Решаем систему уравнений

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 - 2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2 = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Она имеет два действительных решения

$(x_1 = -1, x_2 = 1)$ и $(x_1 = -1,83117721,\ x_2 = -1,35320996)$.

Матрица $f'(x)$ системы (10) вырождается ($\det f'(x) = 0$) на ветвях гиперболы

$$S: \quad x_1 x_2 = \frac{1}{4}$$

и вследствие этого классическим методом Ньютона невозможно построить решения системы начиная с начальной точки, лежащей на S, или начиная с точки, для которой решение достигается только пересечением S (например, с точки $x_1 = 1$, $x_2 = 1$).

Методом $\Re^{\ell}_{\epsilon_n}$ система (10) решается посредством системы

$$f'^{*}(x)\, f(x) = \begin{cases} 2x_1(x_1^2 + x_2 - 2) + x_1 + x_2^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2 - 2 + 2x_2(x_1 + x_2^2) = 0\,, \end{cases} \tag{11}$$

для которой матрица $f'^{*}(x) f'(x)$ вырождается опять на гиперболе S .

В таблицах 1 и 2 даны решения по итерации системы (11) и критерии процесса в случаях, когда x_0 является "плохой" точкой ($x_1^0 = -0{,}5$, $x_1^0 = -0{,}5) \subset S$ и ($x_1^0 = -2.5$, $x_2^0 = -0{,}1) \subset S$ (см. рис. 1).

В таблице 3 показан вычислительный процесс по итерации, достигающий решения системы (11), который стартует от "очень плохой" точки ($x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 1$) (см. рис. 1).

3. Покажем на примере эффект вариации начального числа ϵ_0 для построения разных итерационных процессов $\Re^{\ell}_{\epsilon_n}$, достигающих разных решений заданной системы нелинейных уравнений.

Пусть решаем систему

$$\left.\begin{aligned} &(x_1 - 0{,}4)\, x_2 + 0{,}4\, x_3 = 0 \\ &(x_1 - 0{,}3)\, x_3 + 0{,}4\, x_4 = 0 \\ &(x_1 - 0{,}2)\, x_4 + 0{,}4\, x_5 = 0 \\ &(x_1 - 0{,}1)\, x_5 = 0 \\ &x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Таблица I

$\alpha_1 = I, \ \alpha_2 = 0{,}7$

n	критерии процесса $R_{\varepsilon_n}^{\ell}$				решение	
	ρ_n	τ_n	c_n	ε_n	x_1^n	x_2^n
0	I,407II5	I,78875406	I5,5070688	I0,00000000	-0,50000000	0,50000000
I	I,098I6II2	0,44354081	87,2596I54	0,09537677	-I,45I387I2	0,45I387I23
2	0,22I35767	0,I4848I99	II,7646562	0,0I573 82II	-I,0I676544	I,I5295742
3	0,00352465	0,0006I380	I4,3738444	0,00595530	-0,9953030I	I,0I0I5I03
4	0,00002705	0,00002694	I4,7439503	0,00009809	-0,99998675	I,00004846
5	0,00000000	0,00000000	I4,7455226	0,00000000	-I,00000000	I,00000000

Таблица 2

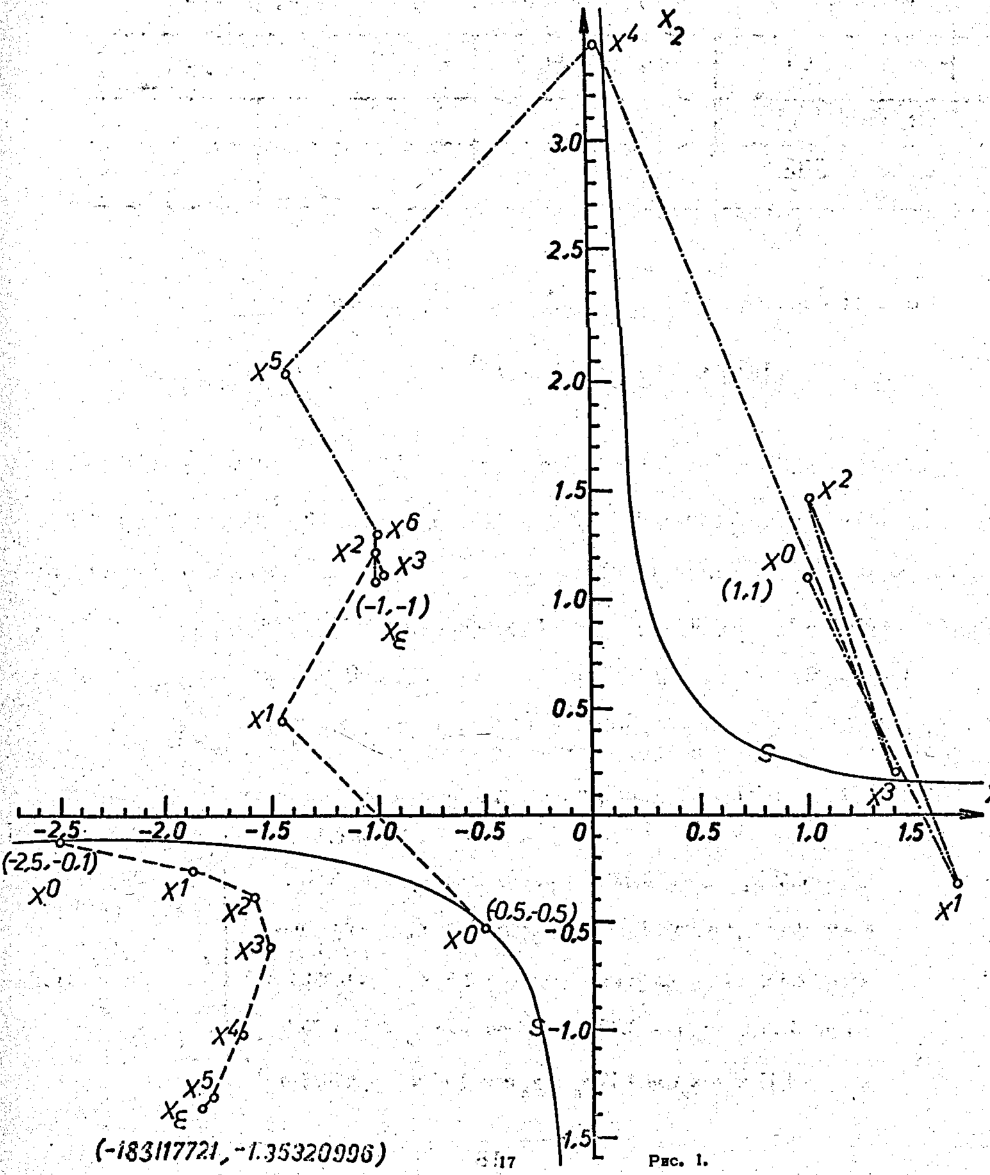
$\alpha_1 = 0{,}8, \ \alpha_2 = 0{,}8$

n	ρ_n	τ_n	c_n	ε_n	x_1^n	x_2^n
0	23,24000000	4,I5000000	4,33685558	I,00000000	-2,50000000	-0,I0000000
I	6,84579528	I,8350I35I	5,2I888380	I0,7340978	-I,8847636	-0,2230473
2	I,897I8247	I,4542I69	8,52603I58	5,39I89973	-I,579I49I6	-0,353457575
3	I,03897III	I,I563663I	9,700I06I8	2,2I959289	-I,5047I864	-0,5902I380I
4	0,90362244	0,5839352I	6,40354485	I,34432920	-I,65230395	-I,0336I924
5	0,I9738957	0,I0525775	5,570328I0	I,0040I93I	-I,79547935	-I,30008523
6	0,00545099	0,0026II90	5,44057859	0,I99987759	-I,8302I474	-I,35I88862
7	0,00000356	0,00000I78	5,43777377	0,00548I56	-I,83II7656	-I,35320907
8	0,00000000	0,00000000	5,43777I7I	0,00000353	-I,83II772I	-I,35320996

Таблица 3

$\alpha_1 = 0.8,\ \alpha_2 = 0.8$

n	критерии процесса $R^{\ell}_{\varepsilon_n}$				решение	
	ρ_n	τ_n	c_n	ε_n	x_1^n	x_2^n
0	4,00000000	2,00000000	8,97957727	0,000I0000	I,00000000	I,00000000
I	3,23441893	1,77356164	2I,I8839335	0,00255937	I,66420859	-0,330685728
2	>	2,906532I0	8,3683958I	0,00I26346	I,020I9888	I,37343849
3	I,839652I2	I,4340336I	I6329,0.398	0,00362736	I,40275547	0,I7685628
4	>	I2,0097324	3672,400I6	0,00088084	0,02563007	3,46I80623
5	>	2,29303663	I,7567I5	0,0087I6I5	-I,52554246	I,954II850
6	I,53806743	0,5I553279	I,58205574	0,00377958	-I,0I328582	I,23645405
7	0,097I6343	0,04740522	I,06900469	0,00I7I5I4	-0,99078039	I,0I89I394
8	0,00078999	0,00035277	I,00046754	0,000I0745	-0,999963I7	I,000I5796
9	0,00000005	0,00000002	I,00000004	0,0000009I	-I,00000000	I,0000000I
I0	0,00000000	0,00000000	I,00000000	0,00000000	-I,00000000	I,00000000



X_2
X_1
X^4
X^5
X^6
X^2
X^3
(-1,-1)
X_ε
X^1
X^0
(1,1)
X^2
X^3
X^1
S
(-2.5,-0.1)
X^0
X^1
X^2
X^3
X^4
X^5
X_ε
(-1.83117721, -1.35320996)
(0.5,-0.5)
X^0
S
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
-0.5
-1.0
-1.5
-2.5
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0
0.5
1.0
1.5

Рис. 1.

Она имеет следующие действительные решения:

	I решение	2 решение	3 решение	4 решение
x_1	0,I	0,2	0,3	0,4
x_2	0,764428148	0,88888888	0,97014250	I,0
x_3	-0,5732I86I	-0,44444444	-0,24253562	-0,0
x_4	0,28660930	0,IIIIIII	0,0	0,0
x_5	-0,07I65232	-0,0	-0,0	-0,0

Решаем систему (12) с начальным приближением

$$x_1^0 = 0{,}0001\,, \quad x_2^0 = x_3^0 = x_4^0 = x_5^0 = 0{,}1\ .$$

Варьированием начального числа ϵ_0 от 0 до 0,1 выделяются четыре типа авторегуляризованных процессов $\mathfrak{R}^{\ell}_{\epsilon_n}$ по признаку достижимости одного из четырех решений системы (12). В таблице 4 приведены представители этих процессов, полученные соответственно при $\epsilon_0^1 = 0{,}0004$, $\epsilon_0^2 = 0{,}000256$, $\epsilon_0^3 = 0{,}00016384$ и $\epsilon_0^4 = 0{,}0001054$ (в этом численном примере замечалось ухудшение скорости сходимости при $\epsilon_0 \to 0$).

4. Решаем систему нелинейных уравнений /5/

$$\left.\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 1{,}6000000\\
&x_1 \cos 0{,}83\, x_4 + x_2 \cos 0{,}83\, x_5 + x_3 \cos 0{,}83\, x_6 = 0{,}452413\\
&x_1 \cos 1{,}67\, x_4 + x_2 \cos 1{,}67\, x_5 + x_3 \cos 1{,}67\, x_6 = -0{,}679691\\
&x_1 \cos 2{,}5\, x_4 + x_2 \cos 2{,}5\, x_5 + x_3 \cos 2{,}5\, x_6 = -0{,}820313\\
&x_1 \cos 3{,}33\, x_4 + x_2 \cos 3{,}33\, x_5 + x_3 \cos 3{,}33\, x_6 = -0{,}367504\\
&x_1 \cos 4{,}17\, x_4 + x_2 \cos 4{,}17\, x_5 + x_3 \cos 4{,}17\, x_6 = -0{,}381874
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Эта система уравнений характерна тем, что обыкновенный метод Ньютона расходится, стартуя от очень близких (например, точка $x_1 = 0,9$, $x_2 = 0,6$, $x_3 = 0,2$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$, $x_6 = 3$) к решению начальных точек. На основе/5, стр. 132/ можно заключить, что это имеет место и относительно метода квазилинеаризации Белмана-Калабы.

Многочисленные эксперименты построения процессов $\mathcal{R}^{\ell}_{\epsilon_n}$ для нахождения решения системы (13) показывают ослабленную зависимость этих процессов от начального приближения. В таблице 5 приводится пример процесса $\mathcal{R}^{\ell}_{\epsilon_n}$ для построения решения системы (13), стартуя от относительно далекой от решений начальной точки.

§4. Решение задачи о собственных значениях авторегуляризованными процессами типа Ньютона-Канторовича

1. Пусть a – заданный линейный оператор, преобразующий линейное пространство R само в себя. Рассмотрим уравнение

$$au = \lambda u, \tag{14}$$

где λ – число поля K и $au \neq \theta_R$.

Метод Унгера/3,6/ для нахождения собственных чисел λ и собственных векторов и приводит к решению нелинейной задачи.

Для уравнения (13) вводится нормировка вида $gu = 1$, где g – заданный функционал такой, что $g\theta \neq 1$.

Рассмотрим пару элементов $w = [\begin{smallmatrix} v \\ \mu \end{smallmatrix}]$, где $v \in R$, $\mu \in K$ как элемент нового пространства S, определив сложение и умножение на скаляр так же, как и для числовых пар. Определим преобразованием f элементов S формулой

Таблица 4

$\alpha_1' = 0.8$; $\alpha_2 = 0.8$

n	критерии процесса $\mathcal{R}_{\varepsilon_n}^{\ell}$			решение				
	τ_n	c_n	ε_n	x_1^n	x_2^n	x_3^n	x_4^n	x_5^n
0	0,96000000 0,96000000 0,96000000 0,96000000	2I26,696 2599,995 3I6I,803 382I,524	0,00040000 0,00025600 0,000I6384 0,000I0545	0,000I 0,000I 0,000I 0,000I	0,I 0,I 0,I 0,I	0,I 0,I 0,I 0,I	0,I 0,I 0,I 0,I	0,I 0,I 0,I 0,I
I	73,5950658 I0I,572036 I40,75283I I95,03456	192,697 545,965 3498,924 35III8,8.	0,00042948 0,00034327 0,00027442 0,0002I94	2,17782766 I,673925I2 I,067286GI 0,348439925	5,67810829 6,54I90036 7,56493388 8,7642I532	-4,84527492 -5,8430689 -7,02657834 -8,4753669	4,21475706 4,83464480 5,56826344 6,42784I52	-I,05512368 -I,50343983 -2,03623229 -2,6622450
2	I8,I765003 25,I802650 35,020879I 48,6625798	448,792 I848,0579 36008,56 7920I,25	0,0044975 0,004I926 0,0039365 0,003705I8	I,0943499I 0,84426I66 0,54292486 0,I8I50655	2,93688II2 3,38I5999 3,9564896 4,4864462	-2,327849I6 -2,79927998 -3,3I500804 -4,23879465	2,I9763982 2,506I9I42 2,85642268 2,985070I5	-0,550206387 -0,7925I694 -I,I0392056 -I,629833I6
3	4,3963446 6,25I3456 9,2579909 I2,778309	2572,8I3 I6260,44 6776I,I2 67766,92	0,00219546 0,00205950 0,00I94224 0,00I8I36	0,55594030 0,44410600 0,32083I407 0,I42I3356	I,7I237578 2,0405628 2,6704464 2,90546796	-0,980I9290 -I,III42904 -I,22892938 -2,03569993	I,I8932087 I,28977809 I,I30I8226 I,02908045	-0,29807975 -0,4269408 -0,582346706 -3,65355I28
4	I,6729377 2,26I209I 2,3358037 2,9699944	4309,508 292II,86 I8344,94 48629,9I	0,00I0226 0,00I0008 0,00I0267 0,000997I	0,408609908 0,36632347 0,24276257 0,I25I75607	I,589842I I,7828I889 I,60I8482 I,5526669	-0,00886904 -0,I979774 -8,37658498 -I,I2404208	0,36683753 0,I64666I9 I,9596238I 0,530I77I47	-0,I0339908 -0,I2828034 -0,I72664I3 -0,I2I08369
5	0,332074I3 0,4I35449 0,433926 0,55574609	6I07,804 34385,47 588I9,29 I4225,I6	0,0007895I 0,00077466 0,0005I25 0,0004369	0,406230329 0,35964683 0,2346744 0,II329609	I,I54039I5 I,I8I7564 I,I002563 0,96420I7	0,0I552I56 -0,I29043I7 -0,465I788 -0,7085443I	0,005I7826 -0,0I67583 0,0834382 0,3430III7	-0,00020400 -0,0079794 0,00295756 -0,07980898

Продолжение таблицы 4

n	критерии процесса R^{ℓ}			решение				
	τ_n	C_n	$\mathcal{E}_n$	x_1^n	x_2^n	x_3^n	x_4^n	x_5^n
6	0,0208I706	7374,6946	0,00027607	0,402I5453	I,0I034672	0,003976957	0,00083I9928	0,00023572
	0,03033952	203943,3	0,00024063	0,3539I08I5	I,00799035	-0,II85245I	-0,0I5I57I0I	-0,004I422
	0,0330I349	I50839,2	0,000I6078	0,22665I58	0,928722I	-0,4059039	0,07557366	0,004397273
	0,049885984	I2294,94	0,000I2829	0,I029I6088	0,7640I3363	-0,5869609	0,292344554	-0,0722533415
7	0,000I2065	8202,744	0,00002004	0,400II26	I,0000603	0,00022895	0,000036009	0,000009479
	0,0I399864	357I4,00	0,00002054	0,30607422	0,9794I875	-0,23332648	-0,0I68427	-0,00355I53
	0,00423238	6I287,I0	0,0000I4I9	0,2004II7	0,89040507	-0,44679364	0,I0854494	0,002I5055
	0,000596853	I2280,08	0,0000I374	0,I0004605	0,76448308	-5,734I4322	0,286738I95	-0,07I69I6
8	0,00000006	8248,820	0,000000I2	0,400000I7	I,00000003	0,0000004	0,0000004	0,00000000
	0,00035357	68562I,52	0,00000872	0,30I37646	0,97I29307	-0,23862544	-0,00II085	-0,000I0464
	0,0000I888	68494,06	0,00000I73	0,200026I4	0,8889237I	-0,444405	0,III07453	0,0000096
	0,00000009	I2280,080	0,000000I6	0,I0000002	0,76429I53	-0,5732I863	0,28660937	-0,07I6523266
9	0,00000000	8248,868	0,00000000	0,40000000	I,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000
	0,0000I759	686238,397	0,0000000I	0,3000I283	0,970I57I8	-0,2425I3I5	-0,00002477	-0,00000I34
	0,00000000	68480,0	0,00000000	0,20000000	0,8888889	-0,44444443	0,IIIIII05	0,00000000
	0,00000000	I2280,08	0,00000000	0,I0000000	0,76429I48	-0,5732I86I	0,286609306	-0,07I652326
I0	0,00000000	8248,888	0,00000000	0,40000000	I,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000
	0,00000000	68623,84	0,00000000	0,30000000	0,970I4250	-0,24253562	0,00000000	0,00000000
	0,0000000	68480,00	0,00000000	0,20000000	0,88888888	-0,4444444	0,IIIIIIII	0,00000000
	0,00000000	I2280,08	0,00000000	0,I0000000	0,76429I48	-0,5732I86I	0,286609306	-0,07I652326

Таблица 5

$\alpha_1 = 0.8,\ \alpha_2 = 0.8$

n	критерии процесса $R_{\varepsilon_n}^t$: τ_n	σ_n	ε_n	решение	
0	I,03304806	4393,88665	0,0095279968	x_1^0 =0,642143638 x_2^0 =-0,0697281853 x_3^0 =0,995305604	x_4^0 = 0,597048572 x_5^0 = I,84227163 x_6^0 = I,89635162
I	0,406026439	I0I70,7I07	0,0078421442	0,679726027 -0,0046I756023 0,7603I6037	0,953I2985 2,58382359 I,78234386
2	0,220237026	22567,894I	0,0024475837	0,936547976 0,07I73220I93 0,54I797013	I,0937848 2,40065375 I,86603976
3	0,384665844	659,4038II	0,0023384008	I,0I092868 -0,I3428I2I 0,6749305I4	I,07868097 3,23543279 2,06856974
4	0,I03I470I9	I374,I5954	0,0028570083	0,9972I33I8 -0,0990007371 0,504004302	I,I0735065 3,I0649093 2,03783607
5	0,0508545I43	24II,86487	0,000249460	I,00440775 0,0852281296 0,5I0433389	I,IIII80I7 3,476537I8 2,048I6360
6	0,00547I46332	I397,I9922	0,00044I467	I,0002585I 0,I00057397 0,499587885	I,II020893 3,40464I09 2,03057729
7	0,00003472959	I432,05I58	0,00002690I	0,999800599 0,I00I26734 0,500073330	I,I0992536 3,4I838I58 2,029593I7

$$f(w) = \begin{bmatrix} au - \lambda u \\ gu - 1 \end{bmatrix}.$$

Если $\begin{bmatrix} \theta_R \\ 0 \end{bmatrix} = \theta_S$ – нулевой элемент S, то уравнение

$$f(w) = \theta_S$$

эквивалентно уравнению (14), но теперь f – нелинейный оператор.

В случае, когда оператор $f'(w)$ плохо обусловлен, мы предлагаем решение уравнения (15) строить авторегуляризованными процессами типа Ньютона–Канторовича.

2. Продемонстрированное в численном примере 3 (система уравнений (12)) "нащупывание" всех решений данной нелинейной задачи авторегуляризованным процессом $\mathcal{R}^{\ell}_{\epsilon_n}$ является важным достоинством при решении задачи о собственных значениях.

Систему уравнений (12) можно рассматривать как уравнение (15) при обозначениях

$$u = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \subset R_4, \quad \lambda = x_1, \quad gu = x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2,$$

$$a = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

Литература

1. Л. Александров. ЖВМиМФ, 11, №1, стр.36-43 (1971).
2. Л. Александров. Сообщение ОИЯИ Р5-5137, Дубна 1970.
3. Л. Колатц. Функциональный анализ и вычислительная математика, М., 1969.
4. Язык ФОРТРАН (под редакцией В.П. Ширикова). Препринт ОИЯИ 11-4818, Дубна 1969.
5. Р. Белман, Р. Калаба. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., 1968.
6. H. Unger, Z. Angew. Math.Mech., 30 (1950), 281-282.

Рукопись поступила в издательский отдел

15 декабря 1970 года.