СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5 - 5213

Л. Александров

# К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1970

P5 - 5213



Л. Александров

# К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Метод дифференцирования по параметру /I,2,3,4,5,6/ дает общий подход сведения нелинейных задач к задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, что представляет интерес как с теоретической (исследования существования решения), так и с вычислительной точки зрения. Кроме того существует возможность использовать этот метод как общий способ описания переходных процессов (в частности управления физическим экспериментом и промышленным процессом).

В настоящей работе рассматривается новая модификация метода дифференцирования по параметру, при которой не предполагается обратимость производной $f'(x)$ (обозначения см. в пункте I) в начальной точке $x_0$ или в некоторой сфере вокруг нее. В результате построение решения данного уравнения (I) (см. п.I) можно сделать вообще не зависимым от начального приближения $x_0$.

I. Будем рассматривать уравнение первого рода

$$f(x)=\theta, \tag{I}$$

где $f$ - нелинейный оператор, действующий из банахова пространства $E_1$ в банахово пространство $E_2$ $(Y=f(E_1)\subseteq E_2)$, дважды непрерывно дифференцируемый по Фреше в $E_1$ и обладающий свойством $\sup\limits_{x\in E_1}\|f(x)\|<\infty$.

Предполагаем, что уравнение (I) имеет одно или несколько решений в $E_1$. Обозначим множество этих решений через $X^*$. В дальнейшем будем использовать идею метода дифференцирования по параметру /6, стр. I58/ на основе связи между точкой $\bar{x} \in E_1$ и параметром $t \in P_1 = (t_1, t_2)$, $t_1 < 0$, $1 < t_2$, введенной соотношением

$$\varphi(\bar{x}, x_0; t; \omega] \equiv$$

$$f(\bar{x}) + (t-1) f(x_0) + \omega(t)(\bar{x} - x_0) = \theta . \qquad (2)$$

Здесь $\omega(t)$- линейный оператор, действующий из $E_1$ в $E_2$, не зависящий от точки $x$ и дважды непрерывно дифференцируемый в $P_1$.

Имеет силу следующая теорема о нахождении решений уравнения (I) методом дифференцирования по параметру.

<u>Теорема I</u>

Пусть выполнены условия

а) $X^* \subseteq X = \{ x \in E_1 \,/\, f'(x)$ - обратимый $\}$;

б) оператор $\omega(t)$ обладает свойствами

I) оператор $f'(x) + \omega(t)$ обратим для каждой пары

$$(x, t) \in (E_1 \setminus X^*) \times (P_1 \setminus \{1\}) \; ;$$

2) $\omega(1) = \theta$.

Тогда для каждой фиксированной точки $x_0 \in E_1$ существует единственное решение $x(t)$, $t \in P = [0,1]$ задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\left(f'(x) + \omega(t)\right)^{-1}\left(f(x_0) + \omega_t'(t)(x - x_0)\right) \equiv g(x, x_0; t; \omega) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \qquad (3)$$

причем решение $x(t)$ обладает свойством $x(1) \in X^*$.

Доказательство

$\alpha$) Оператор $\varphi$ непрерывно дифференцируем по Фреше в произведении $E_1 \times P_1$:

$$\varphi'_{\bar{x}} = f'(\bar{x}) + \omega(t), \quad \varphi'_t = f(x_0) + \omega_t'(t)(x - x_0).$$

Из условий $a$) и $\delta_1$) следует, что частная производная $\varphi'_{\bar{x}}$ – линейный гомеоморфизм пространства $E_1$ на $Y$. На основе непосредственно получаемого из (2) равенства $\varphi(x_0, x_0; 0; \omega) = 0$ применяем к соотношению (2) теорему о неявной функции /7, стр.3II/. Находим, что в достаточно малой окрестности точки $t = 0$ существует единственное решение $\bar{x}(t)$ уравнения (2), которое является решением задачи Коши (3) в этой окрестности.

$\beta$) Оператор $(\varphi'_x)^{-1}$ непрерывно дифференцируем по Фреше в произведении $E_1 \times P_1$.

Это вытекает из непрерывной дифференцируемости операторов $f'(x)$ и $\varphi(t)$ соответственно в $E_1$ и $P_1$

$$\left( (\varphi_x'^{-1})'_x = -(f'(x)+\omega(t))^{-1} f''(x)(f'(x)+\omega(t))^{-1}, \right.$$

$$\left. (\varphi_x'^{-1})'_t = -(f'(x)+\omega(t))^{-1}\omega'_t(x)(f'(x)+\omega(t))^{-1} \right)$$

Очевидно, что композиционный оператор $g(x, x_0; t; \omega)$ непрерывно дифференцируемый в произведении $E_1 \times P_1$ для каждого $x_0 \in E_1$, откуда заключаем, что локальная теорема о существовании решения задачи Коши (3) /7, стр.329/ применима для каждой пары $(x,t) \in E_1 \times P_1$ и каждой точки $x_0 \in E_1$.

$\gamma$) Имеет место неравенство

$$\| g(x, x_0; t; \omega)\| \leq A + B \| x - x_0 \| , \tag{4}$$

где $A = \| \varphi_x'^{-1} \| \| f(x_0)\|$, $B = \| \varphi_x'^{-1} \| \| \omega'_t \|$.

Из непрерывности линейного оператора $\varphi_x'^{-1}$ в $E_1 \times P$ и предположения $\sup\limits_{x_0 \in E_1} \| f(x_0) \| < \infty$ следует ограниченность функционала $A$ в $E_1 \times P$ для каждой точки $x_0 \in E_1$, т.е. существует такая константа $a \geq 0$, что $A \leq a$. Аналогично из непрерывности оператора $\omega'_t(t)$ в $P$ следует, что существует такая константа $b \geq 0$, что $B \leq b$. Отсюда находим, что для всех $(x,t) \in E_1 \times P$ и для всех $x_0 \in E_1$ имеет место неравенство

$$\| g \| \leq a + b \| x - x_0 \| . \tag{5}$$

На основе заключения из $\beta$) и неравенства (5) приходим к выводу /6, стр.160/ о глобальном существовании (на всем сегменте $P$.) решения $x(t)$ задачи Коши (3).

Это решение удовлетворяет и уравнению (2), т.е. $\bar{x}(t) = x(t)$ на всем $P$. С другой стороны, из (2) при условии $\delta 2)$ непосредственно получается $\bar{x}(1) \in X^*$. Этим теорема I доказана.

2. При предположении, что $E_1$ и $E_2$ - гильбертовы пространства, в ряде применений метода дифференцирования по параметру можно использовать следующее следствие теоремы I.

Теорема 2

Пусть существует выпуклый функционал $\varphi(x)$, определенный в $E_1$, для которого

$$\operatorname{grad} \varphi(x) = f(x) , \tag{7}$$

и пусть кроме условия $a)$ теоремы I выполнено условие $\delta')$. $\alpha(t)$, определенная в $P_1$, два раза непрерывно дифференцируемая действительная функция, обладающая свойствами:

1) $\alpha(t) > 0 \ , \ t \in P_1 \setminus \{1\}$ ;

2) $\alpha(1) = 0$ .

Тогда в силе утверждение теоремы I.

Доказательство теоремы 2 основывается на том, что из условия (7) следует неотрицательная определенность оператора $f'(x)$ во всем $E_1$ и что из условия $\delta')$ вытекает условие $\delta)$ теоремы I.

3. Задачу Коши (3) можно использовать для построения приближенного решения уравнения (I) и в том случае, когда условие $a)$ невыполнимо. Для этого функцию $x(t)$ надо взять не в точке $t = 1$, а в достаточно близкой к ней точке $t^* \ (x^* \approx x(t^*))$ .

Как критерий нахождения необходимого значения параметра $t^*$ можно использовать величину невязки уравнения (I).

Специально для облегчения численного интегрирования задачи (3) и уменьшения численных эффектов "накопления ошибки" и др. можно использовать аналоги задачи Коши (3) и аналоги теоремы I и 2, полученные на основе соотношения

$$f(x) + (t-1) f(x_0) + \omega(t)(x - x_0) + \int_0^t h(s)\, ds = 0,$$

где $h(s)$ непрерывно дифференцируемая действительная функция $(s \in P)$, для которой имеет место равенство $\int_0^1 h(s)\, ds = 0$. Функция $h(s)$ подбирается в зависимости от оператора $f(x)$ и от численного метода интегрирования задачи (3).

В обыкновенной вычислительной практике при применении теоремы 2 можно использовать функцию $\alpha(t)$ в виде

$\alpha(t) = a(1-t)\rho(t) + \alpha_0$, где

$\rho(t) = e^{-bt}$ или $\rho(t) = e^{-b(t-c)^2}$ и др.

( $a > 0$, $\alpha_0, b \geq 0$, $0 \leq c \leq 1$ - константы).

С помощью $\alpha_0 \neq 0$ можно приближенно решать уравнение(I)и при $X^* \cap X = \emptyset$. Необходимое $\alpha_0$ подбирается, например, на основе величины невязки уравнения (I).

## Литература


I. Кирия В.С. Движение тел в сопротивляющихся средах. Труды Тбил. ун-та 44 (I95I), (I-20).

2. Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений, ДАН 88, №4, (I953), (60I-603).

3. Яковлев М.Н. К решению систем нелинейных уравнений методом дифференцирования по параметру. Журнал вычисл. мат. и матем. физики, т.4, №I, 1964.

4. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов, М. 1966 г. (342-348).

5. Свирский И.В. Методы типа Бубнова-Галеркина, М. 1968, (174-176).

6. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений., М. 1969, (158-161).

7. Ж.Дьедоне. Основы современного анализа. М, 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 июля 1970 года.