СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р5 - 5136

Л. Александров

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1970

Р5 - 5136

Л. Александров

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА

Методом Ньютона-Канторовича /1/ можно построить решение операторного уравнения

$$f(x) = \theta \tag{1}$$

без предположения обратимости операторов $f'(x)$ в начальной точке x_0 или в некоторой сфере вокруг нее/2,3,4/.

В настоящей работе предлагается общий подход к построению процессов Ньютона-Канторовича указанного класса. Вводится понятие регуляризованных вычислительных процессов, которые, помимо своего более общего характера, имеют преимущество перед рассматриваемыми в работах/2,3,4/ процессами в конструктивности и удобстве реализации на ЭВМ.

Основное внимание уделяется вопросу сходимости регуляризованных процессов.

§1. Регуляризованные вычислительные процессы

1. Пусть S – полное линейное L –суперметрическое пространство /5, стр. 263/, f – нелинейный оператор, отображающий выпуклое подмножество $X \subseteq S$ в пространстве S ($Y = f(X) \subseteq S$).

Пусть существуют первая и вторая производные Фреше оператора f.

Вводим (пока формально) следующий вычислительный процесс типа Ньютона-Канторовича:

$$\mathfrak{R}[f; x_0; \omega_n]: x_0, x_{n+1} = x_n - (f'(x_n) + \omega_n)^{-1} f(x_n),$$

$$x_n \subseteq X \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где линейные операторы ω_n действуют из X в Y.

Определение

Если операторы ω_n ($n = 0,1,2,\ldots$) процесса $\mathfrak{R}$ таковы, что операторы $f'(x_n) + \omega_n$ ($n = 0,1,2,\ldots$) регулярные, то последовательность $\mathfrak{R}$ называется регуляризованным вычислительным процессом Ньютона-Канторовича для приближенного решения уравнения (1).

2. Сделаем некоторые утверждения о существовании регуляризованных процессов. На основе обобщения в псевдометрических пространствах известной теоремы о геометрической прогрессии/5, стр. 96/ и определении регуляризованных процессов получаем следующую теорему.

Теорема 1

Пусть в линейном L-суперметрическом пространстве S операторы ω_n ($n = 0,1,2,\ldots$) процесса $\mathfrak{R}$ таковы, что имеют место неравенства

$$\| E - f'(x_n) - \omega_n \| \leq q < 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тогда процесс $\mathfrak{R}$ является регуляризованным вычислительным процессом и для него имеют место соотношения

$$(f'(x_n) + \omega_n)^{-1} u = \sum_{i=0}^{\infty} (E - f'(x_n) - \omega_n)^i u, \quad u \subseteq X,$$

$$\| (f'(x_n) + \omega_n)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - q} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

В ряде применений регуляризованных процессов можно использовать следующую теорему.

Теорема 2

Пусть в гильбертовом пространстве S существует выпуклый функционал $h(x)$, определенный на X, обладающий свойством

$$\operatorname{grad} h(x) = f(x) \tag{2}$$

($\operatorname{grad} h$ – градиент Фреше функционала h), и пусть $\omega_n (n=0,1,2,\dots)$ – положительно определенные операторы /1, стр. 173/ процесса $\mathfrak{R}$, не зависящие от точек x_n в их достаточно малых окрестностях. Тогда процесс $\mathfrak{R}$ является регуляризованным вычислительным процессом.

Доказательство

В достаточно малых окрестностях точек x_n рассматриваем функционалы

$$h_1(x) = h(x) + \frac{1}{2}(\omega_n x_n, x_n) \quad (n=0,1,2,\dots)$$

(через (,) обозначено скалярное произведение в S).

Так как операторы ω_n – положительно определенные, то функционалы $(\omega_n x_n, x_n)$ – строго выпуклые. Используя предположение о выпуклости $h(x)$, заключаем, что и функционалы $h_1(x)$ –строго выпуклые. Из (2) следует, что в достаточно малых окрестностях точек x_n имеет место

$$\operatorname{grad} h_1(x_n) = f(x_n) + \omega_n x_n (n=0,1,2,\dots). \tag{3}$$

Очевидно, операторы $f'(x_n) + \omega_n$ процесса $\mathfrak{R}$ можно рассматривать как гессианы функционалов $h_1(x)$ в достаточно малых окрестностях точек x_n. Из строгой выпуклости функционалов $h_1(x_n)$ и равенства (3) вытекает /6, стр. 155/, что операторы $f'(x_n)+\omega_n$ ($n=0,1,2,\dots$) положительно определены и, следовательно, обратимы. Теперь доказываемая теорема следует из определения регуляризованных процессов.

§2. Сходимость регуляризованных процессов

Пусть $\rho(u,v)$, $u, v \in S$ – расстояние в суперметрическом пространстве S и $\|u\| = \rho(u, \theta)$.

Введем обозначения:

$$\rho_n = \| f(x_n) \|, \quad b_n = \| (f'(x_n) + \omega_n)^{-1} \| .$$

Рассмотрим следующие условия:

А) вторая производная Фреше, $f''(x)$, ограничена в X :

$$\frac{1}{2} \| f''(x) \| \le M \qquad (M = \text{const.},\ M \in [0, \infty)) ;$$

Б) для начальной точки x_0 , начального оператора ω_0 регуляризованного процесса $\mathfrak{R}$ и заданной константы $N \in [0, \infty)$ выполнены неравенства (начальные условия)

$$0 \le \phi_0 \le 1 - \beta < 1 , \ \beta < 1 , \tag{Б1}$$

$$\beta + \frac{\phi_0}{1 - \phi_0} \, \frac{\gamma^2}{(\gamma - b_0) b_0} \le 1 , \tag{Б2}$$

$$\| \omega_0 \| \le N b_0 \rho_0 , \tag{Б3}$$

где $\gamma > b_0$ - заданное действительное число,

$$\nu = (M + N) \gamma^2 , \ \beta = \nu \rho_0 , \ \phi_0 = (2M + N) \gamma b_0 \rho_0 ; \tag{Б4}$$

В) для операторов ω_n процесса $\mathfrak{R}$ выполняются неравенства

$$\| \omega_n \| \le N b_n \rho_n \quad (n = 1, 2, \dots) , \tag{В1}$$

$$\| \omega_n - \omega_{n+1} \| \le \| \omega_n \| \quad (n = 0, 1, 2, \dots) ; \tag{В2}$$

Г) $$W = \{ x / \rho(x_1, x) \le \frac{\gamma \beta \rho_0}{1 - \beta^2} \} \subseteq X .$$

Имеет место следующее основное утверждение о сходимости регуляризованных процессов.

Теорема 3

Пусть для решения операторного уравнения (1) в полном линейном L -суперметрическом пространстве S используется регуляризованный вычислительный процесс $\mathfrak{R}$ и пусть выполнены условия А) -Г). Тогда процесс $\mathfrak{R}$ сходится и $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\omega \in W$. Точка x_ω является решением уравнения (1) в области X . Справедлива оценка

$$\rho(x_\omega, x_n) \le \frac{\gamma \rho_0 \beta^{2^n-1}}{1-\beta^{2^n}} \quad (n = 1,2, \dots).$$

Доказательство

1. Так как $(f'(x_n)+\omega_n)^{-1}\theta = \theta$, то

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho((f'(x_n)+\omega_n)^{-1} f(x_n), (f'(x_n)+\omega_n)^{-1}\theta) \le$$

$$\le \|(f'(x_n)+\omega_n)^{-1}\| \rho(f(x_n), \theta),$$

т.е. в силе неравенство

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \le b_n \rho_n \quad (n = 0,1,2,\dots). \tag{4}$$

С другой стороны, справедливо равенство

$$(f'(x_n)+\omega_n)\delta_n + f(x_n) = \theta, \tag{5}$$

где

$$\delta_n = x_{n+1} - x_n = -(f'(x_n)+\omega_n)^{-1} f(x_n).$$

Из неравенства (Б3) и условия (В1) следуют неравенства

$$\rho(\omega_n(f'(x_n)+\omega_n)^{-1} f(x_n), \theta) \le$$

$$\le \|\omega_n\| \|f'(x_n)+\omega_n)^{-1}\| \|f(x_n)\| \le$$

$$\le N \|(f'(x_n)+\omega_n)^{-1}\|^2 \|f(x_n)\|^2 \le N b_n^2 \rho_n^2.$$

Используя (5), можно написать:

$$\rho(-\omega_n \delta_n, \theta) \le N b_n^2 \rho_n^2,$$

откуда и из определяющего свойства суперметрических пространств/5, стр. 39/ получаем

$$\rho(\theta, \omega_n \delta_n) < N b_n^2 \rho_n^2. \tag{6}$$

Из равенства (5) следует

$$\rho_{n+1} = \rho(f(x_{n+1}), \theta) =$$

$$= \rho(f(x_{n+1}), f(x_n) + (f'(x_n) + \omega_n)\delta_n) \le$$

$$\le \rho(f(x_{n+1}), f(x_n) + f'(x_n)\delta_n) + \rho(\theta, \omega_n \delta_n).$$

По формуле Тейлора, используя неравенства (6), находим

$$\rho_{n+1} \le (M+N) b_n^2 \rho_n^2 \ (n = 0,1,2, \dots). \tag{7}$$

С помощью полной индукции доказываются следующие утверждения:

a) $\rho_n \le \rho_0 \beta^{2^n - 1} < \rho_0$;

b) $\phi_n \le \phi_0 < 1$, где $\phi_n = (2M+N)\gamma b_n \rho_n$;

c) $b_n \le \gamma - (\gamma - b_0)\beta^{2^n - 1} \le \gamma$;

d) $x_{n+1} \subsetneq X$.

(Дальнейшее доказательство теоремы с необходимыми изменениями проводится по схеме/5, стр. 302/ при $k = 2$).

2. Для $n = 0$ утверждения a) – d) верны в силу условий А) – Г). Пусть они верны для некоторого n , тогда они верны и для $n+1$:

a) В силу d) приближение $x_{n+1} \in X$. Из соотношений (7), (4), a) и (Б4) следует

$$\rho_{n+1} \leq (M+N) b_n^2 \rho_n^2 \leq (M+N)\gamma^2 \rho_n^2 = \nu \rho_n^2 \leq$$

$$\leq \nu (\rho_0 \beta^{2^n - 1})^2 = \beta \rho_0 \beta^{2^{n+1}-2} = \rho_0 \beta^{2^{n+1}-1} .$$

Поскольку $\beta < 1$, имеем $\beta^{2^{n+1}} < 1$. Таким образом,

$$\rho_{n+1} < \rho_0 \beta^{2^{n+1}-1} < \rho_0 . \tag{8}$$

b) Пусть

$$g(x_n) = E - (f'(x_n) + \omega_n)^{-1} (f'(x_{n+1}) + \omega_{n+1}) .$$

Для нормы оператора $g(x_n)$ с помощью формулы Тейлора, учитывая неравенства (В2), (Б3) и (В1), получаем (область X выпуклая)

$$\| g(x_n) \| \leq b_n \| f'(x_n) + \omega_n - f'(x_{n+1}) - \omega_{n+1} \| \leq$$

$$\leq b_n \| f'(x_n) - f'(x_{n+1}) \| + b_n \| \omega_n - \omega_{n+1} \| \leq$$

$$\leq 2 b_n M \rho(x_{n+1}, x_n) + N\gamma b_n \rho_n \leq$$

$$\leq 2M\gamma b_n \rho_n + N\gamma b_n \rho_n = (2M+N)\gamma b_n \rho_n .$$

Таким образом, $\| g(x_n) \| \leq (2M+N)\gamma b_n \rho_n = \phi_n < 1$

и, следовательно, ряд $\sum_{i=0}^{\infty} (g(x_n))^i y$ сходится для всех $y \in X$. Отсюда заключаем /5, стр. 96/, что оператор $E - g(x_n)$ имеет обратный и что $\| (E - g(x_n))^{-1} \| \leq \dfrac{1}{1-\phi_n}$. В результате имеем

$$b_{n+1} = \| (E - g(x_n))^{-1} (f'(x_n) + \omega_n)^{-1} \| \leq b_n \frac{1}{1-\phi_n} . \tag{9}$$

Из соотношений (7), (Б4) и (8) получаем

$$\phi_{n+1} = (2M+N)\gamma b_{n+1}\rho_{n+1} \leq (2M+N)\gamma \frac{b_n}{1-\phi_n}\nu\rho_n^2 = \frac{\phi_n}{1-\phi_n}\nu\rho_n ,$$

откуда с учётом a), b), (9) и того факта, что $\beta \leq 1-\phi_0$, следует:

$$\phi_{n+1} \leq \frac{\phi_n}{1-\phi_n}\nu\rho_0 = \frac{\phi_n}{1-\phi_n}\beta \leq \phi_n .$$

c) Согласно b)

$$1-\phi_n > 0,\ 1-\phi_0 > 0,\ \phi_n(\phi_0-\phi_n) \geq 0$$

и

$$\frac{1}{1-\phi_n} = \frac{1-\phi_0}{(1-\phi_n)(1-\phi_0)} < \frac{1-\phi_0+\phi_n(\phi_0-\phi_n)}{(1-\phi_n)(1-\phi_0)} =$$

$$= 1 + \frac{\phi_n}{1-\phi_0} = 1 + \frac{(2M+N)\gamma b_n\rho_n}{1-\phi_0} .$$

Таким образом, из соотношения (9) следует, что

$$b_{n+1} \leq b_n\left(1 + \frac{(2M+N)\gamma b_n\rho_n}{1-\phi_0}\right).$$

Используя неравенство $b_n \leq \gamma$ из условия c), неравенство $\rho_n \leq \rho_0\beta^{2^n-1}$ из условия a) и вводя обозначение

$$q = \frac{(2M+N)\gamma\rho_0}{1-\phi_0} = \frac{\phi_0}{1-\phi_0}\frac{1}{b_0}, \tag{10}$$

получаем

$$b_{n+1} \leq b_n(1+\gamma q\beta^{2^n-1})$$

и в силу c)

$$b_{n+1} \le (\gamma - (\gamma - b_0)\beta^{2^n - 1}) \cdot (1 + \gamma q \beta^{2^n - 1}) =$$

$$= \gamma - (\gamma - b_0)\beta^{2^n - 1} p, \tag{11}$$

где

$$p = 1 + \gamma q \beta^{2^n - 1} - \frac{\gamma^2 q}{\gamma - b_0} \ge 1 - \frac{\gamma^2 q}{1 - b_0}.$$

Если подставить значение q из (10), то с учётом (Б2) получим

$$p \ge 1 - \frac{\gamma^2 \phi_0}{(\gamma - b_0)(1 - \phi_0) b_0} \ge \beta \ge \beta^{2^n}.$$

Отсюда имеем $p\beta^{2^n - 1} \ge \beta^{2^{n+1} - 1}$, и соотношение (11) принимает вид

$$b_{n+1} \le \gamma - (\gamma - b_0)\beta^{2^{n+1} - 1}.$$

Второй член этого неравенства больше нуля, следовательно, $b_{n+1} \le \gamma$.

d) В неравенстве $\rho(x_1, x_{n+2}) \le \sum_{i=1}^{n+1} \rho(x_i, x_{i+1})$ оценим каждый член суммы с помощью (4):

$$\rho(x_i, x_{i+1}) \le b_i \rho_i \le \gamma \rho_0 \beta^{2^i - 1}. \tag{12}$$

Следовательно,

$$\rho(x_1, x_{n+2}) \le \gamma \rho_0 \sum_{i=1}^{n+1} \beta^{2^i - 1}.$$

Поскольку $\beta < 1$, имеем $\beta^{2^i} \le \beta^2 \le \beta < 1$ для $i = 1,2,\ldots$ и, следовательно,

$$\rho(x_1, x_{n+2}) \leq \gamma \rho_0 (\beta + \beta \sum_{i=1}^{n} \beta^{2i}) =$$

$$= \gamma \rho_0 \beta \frac{1-(\beta^2)^{n+1}}{1-\beta^2} < \frac{\gamma \beta \rho_0}{1-\beta^2} .$$

Это означает, что $x_{n+2} \subsetneq W$, откуда следует $x_{n+2} \subsetneq X$. Таким образом, условия a), b), c), d) выполнены для всех $n = 1,2,3,\ldots$

3. На основе (12) получаем

$$\rho(x_n, x_{n+m+1}) \leq \sum_{i=n}^{n+m} \rho(x_i, x_{i+1}) \leq$$

$$\leq \gamma \rho_0 \sum_{i=n}^{n+m} \beta^{2^i - 1} = \gamma \rho_0 \beta^{2^n - 1} \sum_{i=0}^{m} \beta^{2^n (2^i - 1)} \leq \tag{13}$$

$$\leq \gamma \rho_0 \beta^{2^n - 1} \sum_{n \to \infty}^{m} (\beta^{2^n})^i =$$

$$= \gamma \rho_0 \beta^{2^n - 1} \frac{1-(\beta^{2^n})^{m+1}}{1-\beta^{2^n}} < \frac{\gamma \rho_0 \beta^{2^n - 1}}{1-\beta^{2^n}} .$$

При $n \to \infty$ знаменатель остается ограниченным, а числитель $\beta^{2^n - 1}$ стремится к нулю.

Все $x_n \subsetneq W$. Для любых $m = 1,2,3,\ldots$ расстояние $\rho(x_n, x_{n+m+1})$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом, процесс $\Re$ сходится к элементу x_ω, который в силу полноты сферы W также принадлежит W. Далее, вместе с $\beta^{2^n - 1}$ к нулю (на основе a)) стремится и ρ_n, а последовательность $f(x_n)$ при $n \to \infty$ в силу непрерывности оператора f стремится к $f(x_\omega)$. Таким образом, $\rho(f(x_\omega), \theta) = 0$, т.е. x_ω является решением уравнения (1) в области X. Приближение x_{n+m+1} при $m \to \infty$ стремится к x_ω и на основе (13) при фиксированном n приводит к утверждаемой в теореме оценке погрешности.

§3. Следствие теоремы 3 о сходимости

1. При $\omega_n = \theta$ ($n = 0,1,2,\ldots$) и $N = 0$ вычислительный процесс $\Re$ обращается в обыкновенный метод Ньютона-Канторовича, и при предположении, что оператор $f'(x_0)$ обратим, теорема 3 обеспечивает его сходимость.

Начальные условия (Б1), (Б2) и (Б3) теоремы 3 связывают точку x_0, оператор ω_0 и константу N неявным образом, и существование ненулевых ω_0 и N, для которых эти соотношения выполняются и имеют место регуляризованные вычислительные процессы, неочевидно.

Следующее следствие теоремы 3, помимо того, что оно имеет важное самостоятельное значение, можно использовать для доказательства существования ненулевых ω_0 и N, удовлетворяющих начальным условиям.

Теорема 4

Пусть для решения уравнения (1) в банаховом пространстве S используется процесс $\Re$ и пусть выполнены условия А) – Г), где вместо соотношений (Б3) и (В1) в силе

$$\|\omega_0\|^2 + r_0\|\omega_0\| \leq N\rho_0 , \tag{Б3'}$$

$$\|\omega_n\| \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{r_n^2 + 4N\rho_n} - r_n\right) \quad (n = 1,2,\ldots), \tag{Б1'}$$

где

$$r_n = \|f'(x_n)\| \quad (n = 0,1,2,\ldots).$$

Тогда справедливы утверждения теоремы 3.

Доказательство

Из (Б3') следует цепочка неравенств:

$$\|\omega_0\|\,\|f'(x_0) + \omega_0\| \leq \|\omega_0\|(\|f'(x_0)\| + \|\omega_0\|) \leq N\rho_0 \leq N c_0 \rho_0, \tag{14}$$

где $c_0 \geq 1$ – число обусловленности оператора $(f'(x_n)+\omega_0)$/5, стр. 105/. (Для $n = 0,1,2...$ обозначаем: $c_n = \|(f'(x_n)+\omega_n)^{-1}\| \, \|f'(x_n)+\omega_n\|$).

Из (14) следует неравенство $\|\omega_0\| \leq N b_0 \rho_0$, т.е. выполняется условие (Б3).

Из условия (В1') следует неравенство

$$(2\|\omega_n\| + r_n)^2 \leq r_n + 4N\rho_n$$

и неравенства

$$\|\omega_n\| \, \|f'(x_n) + \omega_n\| \leq N\rho_n \leq N\rho_n c_n.$$

На основе этих неравенств находим

$$\|\omega_n\| \leq N b_n \rho_n \quad (n = 1,2, \dots),$$

т.е. выполняется условие (В1).

Далее для доказательства теоремы применяется теорема 3.

2. Пользуясь условием (Б3'), подставляем в выражениях для β и ϕ_0 константу $N = \dfrac{1}{\rho_0}(\|\omega_0\|^2 + r_0\|\omega_0\|)$. Полученные положительные числа

$$\beta' = M\gamma^2\rho_0 + \gamma^2(\|\omega_0\| + r_0)\|\omega_0\|,$$

$$\phi_0' = 2M\gamma b_0\rho_0 + \gamma b_0(\|\omega_0\| + r_0)\|\omega_0\|$$

можно сделать достаточно малыми, если взять числа ρ_0 и $\|\omega_0\|$ достаточно малыми.

Применяем числа β' и ϕ_0' в выражениях для начальных условий (Б1) и (Б2):

$$0 \leq \phi_0' \leq 1 - \beta' < 1, \quad \beta' < 1, \tag{В1'}$$

$$\beta' + \frac{\phi_0'}{1-\phi_0'} \, \frac{\gamma^2}{(\gamma - b_0) b_0} \leq 1. \tag{Б2'}$$

Очевидно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 5

Если в банаховом пространстве S предположить выполнимость начального условия (Б3') и взять начальное приближение x_0 достаточно близким к решению уравнения (1), а число $\|\omega_0\|$ достаточно малым, то всегда можно сделать выполнимыми начальные условия (Б1') и (Б2') при $\omega \neq \theta$, $N \neq 0$.

3. Теорема 4 удобнее для применения, чем общая теорема 3, вследствие простоты связи (В1') по сравнению с (В1). Опишем общую схему возможного применения этой теоремы.

В качестве начальных условий рассматриваются (Б1'), (Б2') и (Б3'). При заданных x_0 и ω_0 вычисляется константа $\tilde{N} = \frac{a_1}{\rho_0}(\|\omega_0\|^2 + r_0\|\omega_0\|)$, где $a_1 \in [0,1]$ (на основании условия (Б3')). Проверяются условия (Б1') и (Б2'). В случае выполнения условий (Б1') и (Б2') строится регуляризованный вычислительный процесс $\mathfrak{R}$ с операторами ω_n, для которых выполнено условие (В2) и имеет место равенство

$$\|\omega_n\| = \frac{a_2}{2}\left(\sqrt{r_n^2 + 4\tilde{N}\rho_n} - r_n\right), \quad a_2 \in (0,1].$$

Автор выражает глубокую благодарность Е.С. Левитину за проявленный интерес к работе и полезную дискуссию.

Литература

1. *Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.*

2. *A. Ben-Israel. A Mewton-Rapson Method for the Solution of Systems of Equations. J. Math. Anal. and Appl., 1966, __15__, No 2, 243-252.*

3. *M. Altman. On the Generalisation of Newtons Method. Bull. Acad. Polon., Sci., 1967, __5__, No 8, 789-795.*

4. *Л. Раковщик. О методе Ньютона-Канторовича. Ж. выч. мат. и мат. физ., __8__, №6, 1209-1217 (1968).*

5. *Л. Коллатц. Функциональный анализ и вычислительная математика, М., 1968.*

6. М.А. Красносельский и др. Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 мая 1970 года.