P5 - 5107

Е.Д. Федюнькин

ТЕМ-ВОЛНЫ В НЕКОТОРЫХ ВОЛНОВОДНЫХ СИСТЕМАХ

Направлено в журнал "Радиотехника и электроника"

1. Введение

Плоская ТЕМ-волна, распространяющаяся вдоль оси z, определяется условием $E_z = H_z = 0$. Уравнения Максвелла в этом случае имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} E_{x,y} \pm \frac{\partial}{\partial y} E_{y,x} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} H_{x,y} \pm \frac{\partial}{\partial y} H_{y,x} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E_{x,y} \pm \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} H_{y,x} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial z} H_{x,y} \mp \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_{y,x} = 0; \tag{1}$$

$$E_z = H_z = 0.$$

Здесь $\epsilon = \mathrm{const}$, $\mu = \mathrm{const}$ - диэлектрическая и магнитная проницаемость среды соответственно, c - скорость света.

Из (1) следует, что каждая компонента поля удовлетворяет системе уравнений:

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}F - \frac{\partial^2}{\partial z^2}F = 0\ ; \tag{2а}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}F + \frac{\partial^2}{\partial y^2}F = 0. \tag{2б}$$

Уравнение (2б) показывает, что компоненты поля являются гармоническими функциями двух переменных. Краевые задачи для таких гармонических функций сводятся к краевым задачам теории голоморфных функций. Это счастливое обстоятельство позволяет отыскать точные решения для широкого класса волноводных систем, используя мощные методы, развитые в теории голоморфных функций /1,2/.

Задачи о распространении ТЕМ-волн анализировались без привлечения указанных выше методов. Известно, например, элементарное решение для случая коаксильного волновода. Для более сложных систем либо отыскивалось приближенное решение /3/, либо рассматривался предельный случай /4/.

Здесь мы обсудим некоторые вопросы, касающиеся применения методов теории голоморфных функций, и решим задачу о распространении ТЕМ-волны в системе типа "беличье колесо".

2. О постановке краевых задач

Общее решение системы (1) может быть представлено в виде:

$$E_{x,y}(x,y,z,t) = E^{+}_{x,y}(x,y,\sigma^{+}) + E^{-}_{x,y}(x,y,\sigma^{-});$$

$$H_{x,y}(x,y,z,t) = H^{+}_{x,y}(x,y,\sigma^{+}) + H^{-}_{x,y}(x,y,\sigma^{-});$$

$$H^{\pm}_{x} = \pm\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\,E^{\pm}_{y}\,;\quad H^{\pm}_{y} = \pm\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\,E^{\pm}_{x}\,. \tag{3}$$

Здесь $\sigma^{\pm} = z \mp \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}\,t$. Действительные функции $E^{\pm}_{x}$, $E^{\pm}_{y}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{\partial}{\partial x}E^{\pm}_{y} = \frac{\partial}{\partial y}E^{\pm}_{x}\;;\quad \frac{\partial}{\partial y}E^{\pm}_{y} = -\frac{\partial}{\partial x}E^{\pm}_{x}\,. \tag{4}$$

Для переменных во времени полей разбиение на компоненты со знаком + и − является, очевидно, разбиением на волны, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлении оси z соответственно. В каждой такой волне магнитные поля однозначно выражаются через электрические, как это следует из (3). Используя (3), легко показать, что линейное относительно E_x , E_y , H_x , H_y краевое условие распадается на краевое условие для пары E^{+}_{y} , E^{+}_{x} и краевое условие для пары E^{-}_{y} , E^{-}_{x} . Следовательно, и исходная краевая задача распадается на две краевые задачи. Имея это в виду, мы будем в дальнейшем обозначать через u, v либо пару E^{+}_{y} , E^{+}_{x} , либо пару E^{-}_{y} , E^{-}_{x} . Тогда соотношения (4) можно переписать так:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,. \tag{4a}$$

Чтобы отыскать поля, нужно решить две краевые задачи для системы (4а). Найденные решения будут зависеть от конечного числа произвольных постоянных. Эти постоянные мы должны считать произвольными функциями параметра σ^+ в E_x^+, E_y^+ и параметра σ^- в E_x^-, E_y^-. Полученные $E_{x,y}^{\pm}$ следует подставить в (3). Произвольные функции определятся однозначно, если задан способ возбуждения, т.е. если в плоскости $z=0$ заданы поля $E_{x,y}(x,y,t)$, $H_{x,y}(x,y,t)$, удовлетворяющие уравнениям, выписанным в первой строке (1), и исходным краевым условиям.

Будем рассматривать гладкие волноводы, т.е. волноводы, у которых форма и электромагнитные свойства поверхности сохраняются с изменением z. В других волноводах плоская ТЕМ-волна не может существовать. Для того чтобы удовлетворялось уравнение (2б), поля должны зависеть от z только через посредство параметров σ^+ и σ^- так, как это записано в (3). Но такие поля невозможно построить при зависящих от z и не зависящих от t краевых условиях.

Итак, пусть сечение волновода плоскостью $z=\mathrm{const}$ является связной областью S с границей L, где L – совокупность замкнутых непересекающихся ляпуновских контуров $L_0, L_1, \dots, L_n$, из которых первый охватывает все остальные (рис. 1). Контур L_0 может быть удален в бесконечность. Через τ обозначим точку (x,y), принадлежащую границе L, и будем записывать τ_j, если эта точка принадлежит контуру L_j. Примем, что на границе L задана функция $a(\tau)$, если на каждом из составляющих границу контуров L_j задана функция $a_j(\tau_j)$. Символами $a(\tau)$, $b(\tau)$, $c(\tau)$ обозначим заданные на L действительные функции, удовлетворяющие условию Гельдера на каждом из составляющих L контуров и положим $a^2+b^2 \neq 0$ всюду на L.

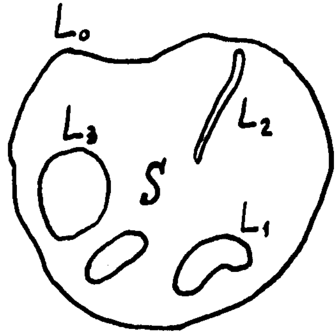

Рис. 1.

Равенства (4а) реализуют условия Коши–Римана, поэтому функция $\Phi(\xi) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ является голоморфной в области S функцией комплексного переменного $\xi = x + i\,y$. Наиболее общее граничное условие, линейное относительно u, v, запишем в виде:

$$a(\tau)\,u(\tau) - b(\tau)\,v(\tau) = c(\tau). \tag{5}$$

Мы приходим таким образом к задаче Римана–Гильберта: найти функцию $\Phi = u + i\,v$, голоморфную в S и непрерывно продолжимую на L, по граничному условию (5). Если L_0 удален в бесконечность, мы требуем на L_0 вместо (5) ограниченности функции $\Phi(\xi)$.

Если ввести векторный $\vec{A}$ и скалярный ϕ потенциалы согласно равенствам

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\ ;\quad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}\ ;$$

$$\begin{aligned}
&\phi(x, y, z, t) = \phi^{+}(x, y, \sigma^{+}) + \phi^{-}(x, y, \sigma^{-});\\
&A_z(x, y, z, t) = A_z^{+}(x, y, \sigma^{+}) + A_z^{-}(x, y, \sigma^{-});\\
&A_x = A_y = 0\ ;\ A_z^{\pm} = \pm\sqrt{\epsilon\mu}\ \ \phi^{\pm}
\end{aligned} \tag{6}$$

($\phi^{\pm}$ удовлетворяют уравнению (2б)), то можно поставить гораздо более общую задачу Пуанкаре (с условием на границе, связывающим линейными соотношениями компоненты полей и потенциалов), из которой как частные случаи следуют задача Дирихле (отыскание гармонической функции по ее значению на границе) и задача Римана-Гильберта. Нам, однако, достаточно будет ограничиться последней.

Методы решения указанных здесь краевых задач изложены в [1,2,5]. Задача Пуанкаре для области с многосвязной границей решена в [6]. Некоторые общие соображения имеются в работе [7].

3. Случай идеального металла

Краевые условия в этом случае: $E_t = H_n = 0$ на L. Указанные условия составляют полную систему граничных условий, одного из них недостаточно, поскольку постоянные и изотропные по z поля являются одним из решений системы (1).

Пусть $\vec{N}$ – направленная внутрь S нормаль к границе L, θ – угол между осью x и этой нормалью. Тогда краевые условия можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} &E_y \cos\theta - E_x \sin\theta = 0 \\ &H_y \sin\theta + H_x \cos\theta = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{на} \quad L. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (3), приходим к следующим граничным условиям для функций $E^{\pm}_{x,y}$:

$$E^{\pm}_y \cos\theta - E^{\pm}_x \sin\theta = 0 \quad \text{на} \quad L \;. \tag{7a}$$

Для того чтобы отыскать поля, нам осталось решить задачу Римана-Гильберта с однородным краевым условием (7а).

Из сравнения с (6) ясно, что эта задача эквивалентна задаче Дирихле об отыскании гармонической функции, принимающей на каждом из контуров L_j значения $C_j = \mathrm{const}$. Из принципа максимума для уравнения Лапласа сразу же следует, что задача имеет тривиальное решение лишь в том случае, когда область S ограничена единственным контуром. Таким образом, внутри полых металлических волноводов плоская ТЕМ-волна не может существовать. Во всех остальных волноводах рассматриваемого класса плоская ТЕМ-волна существует.

Обратимся еще к случаю реального металла. Граничными условиями здесь являются условия Леонтовича /8/:

$$\vec{\mathcal{E}}_t = -\zeta\,[\vec{\mathcal{H}}_t\,\vec{N}]. \tag{8}$$

$\vec{N}$ – нормаль к поверхности, направленная из металла, ζ – поверхностный импеданс, курсивными буквами обозначены фурье-компоненты соответствующих полей. Если мы положим в (8) $E_z = H_z = 0$, то придем к граничным условиям $E_y^{\pm} = E_x^{\pm} = 0$ на L, или $u = v = 0$ на L, следовательно, голоморфная функция $\Phi = u + i v$ обращается в нуль на L, но такая функция равна нулю всюду. В волноводах, изготовленных из реального металла, плоская ТЕМ-волна распространяться не может. Однако, если ζ мал, то в таких волноводах может распространяться волна, у которой $H_z = 0$, $E_z \neq 0$, но мало (и, следовательно, скорость волны близка к скорости света). Таким образом, формализм ТЕМ-волны можно интерпретировать как формализм, приближенно описывающий распространение волн с малым E_z. В этом смысле можно согласиться с /4/, где утверждается, что ТЕМ-волна является, по сути дела, волной E -типа.

4. Решение задачи Римана-Гильберта для системы типа "беличье колесо"

"Беличьим колесом" принято называть круговой металлический цилиндр с прорезями, параллельными образующей. Положим, что ось цилиндра совпадает с осью z, радиус равен единице. Введем полярные координаты:

$$x=\rho\cos\theta;\quad y=\rho\sin\theta\ . \qquad (9)$$

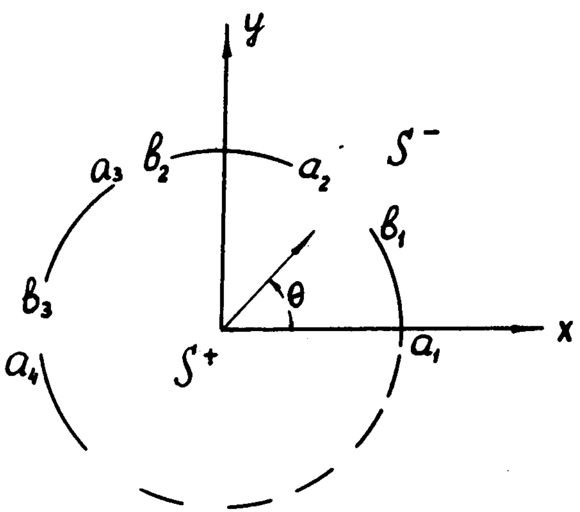

Рис. 2.

Сечение цилиндра плоскостью $z=\mathrm{const}$ изображено на рис. 2. Здесь металлу соответствуют дуги $a_j\, b_j$. Комплексную координату $x+iy=$ $=\rho\exp(i\theta)$ точки a_j (точки b_j) будем обозначать той же буквой $a_j\,(b_j)$. Предположим для определенности, что число всех дуг $a_j\, b_j$ равно n. Окружность $\rho=1$ обозначим L, прерывистую линию, составленную из дуг $a_j\, b_j\ (j=1,2,\dots,n)$, обозначим L', ее дополнение до окружности $-L''$.

Круг, ограниченный окружностью L, обозначим S^+, остальную часть плоскости – S^-. Предельное значение функции комплексного переменного $\Phi=u+iv$ при ее стремлении к L из S^+, S^- обозначим соответственно Φ^+, Φ^-. Теми же знаковыми индексами снабдим предельные значения действительной и мнимой частей Φ . Индексы $+$, $-$, использованные здесь, не следует путать с такими же индексами в разделах 2 и 3.

В соответствии с тем, что было сказано в разделах 2 и 3, нам нужно решить следующую однородную задачу Римана-Гильберта: найти голоморфную в $S^{+}+S^{-}+L''$ функцию $\Phi = u + iv$ по краевому условию:

$$u^{\pm} \cos\theta - v^{\pm} \sin\theta = 0 \quad \text{на} \quad L'. \tag{10}$$

Отличие от случая, рассмотренного в разделе 2, состоит в том, что $\Phi(\xi)$ может иметь особенности в точках a_j , b_j . Предполагается, что в окрестности точек a_j, b_j $\Phi(\xi)$ допускает оценку:

$$|\Phi(\xi)| < C\,|\xi - a_j|^{-a}; \quad |\Phi(\xi)| < C\,|\xi - b_j|^{-a};$$
$$C = \text{const} > 0; \quad 0 \le a < 1. \tag{10a}$$

Функции, голоморфные в любой конечной части области $S^{+}+S^{-}+L''$, допускающие оценку (10a) вблизи концов линии L' , принято называть кусочно-голоморфными.

Предположение (10a) существенно. Допущение расходимостей порядка ≥ 1 привело бы к совсем иной физической модели, отличной от той, которую мы хотим рассмотреть. (Расходимость порядка 1, например, соответствует двойному слою).

Введем понятие о классе решений. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_{2n}$ – концы a_j , b_j , перечисленные в каком-нибудь порядке (в соответствии с принятым ранее соглашением комплексную координату точки r_j мы обозначаем той же буквой r_j). Будем говорить, что решение $\Phi(\xi)$

принадлежит классу $h(r_1, r_2, \dots, r_q)$, или коротко h_q, $q \le 2n$, если $\Phi(\xi)$ ограничена вблизи концов $r_1, r_2, \dots, r_q$; на поведение решения вблизи остальных концов никаких дополнительных ограничений не накладывается. Очевидно, класс h_q содержит в себе классы $h_{q+1}, h_{q+2}, \dots, h_{2n}$, класс h_0 содержит в себе все остальные, класс h_{2n} содержится во всех остальных.

Краевое условие (10) можно записать в виде:

$$\mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\,\Phi^{\pm}) = 0 \qquad \text{на } L' . \tag{11}$$

Если $\Phi(\xi)$ - решение задачи (11), то, очевидно, функция

$$\Lambda(\xi) = \xi\,\Phi(\xi) \tag{12}$$

удовлетворяет условиям:

$$\mathrm{Re}\,\Lambda^{\pm} = 0 \qquad \text{на } L'; \tag{13}$$

$$\Lambda(0) = 0. \tag{13a}$$

$\Lambda(\xi)$ голоморфна в $S^+ + S^- + L''$ всюду за исключением бесконечно удаленной точки, где она имеет полюс первого порядка, и допускает оценку (10a) в окрестности концов r_j . В свою очередь, если $\Lambda(\xi)$ - общее решение задачи (13), (13a), то $\Phi(\xi) = \xi^{-1}\Lambda(\xi)$ будет общим решением задачи (11).

Для дальнейшего нам потребуется операция инверсии. Пусть $W(\xi)$- некоторая функция комплексного переменного. Сопоставим ей зеркально сопряженную (относительно L) функцию $W_*(\xi)$, определенную следующим образом:

$$W_*(\xi) = \overline{W\left(\frac{1}{\bar\xi}\right)}. \tag{14}$$

Операция инверсии, примененная дважды, переводит функцию в себя:

$$W_{**}(\xi) = W(\xi). \tag{15}$$

Если $W(\xi)$ голоморфна или мероморфна в S^+ (в S^-), то $W_*(\xi)$ голоморфна или мероморфна в S^- (в S^+); в частности, если $W(\xi)$ имеет полюс в бесконечности, то $W_*(\xi)$ имеет полюс того же порядка в нуле. Если W^+, W^- – предельные значения функции $W(\xi)$ на L, то соответствующие предельные значения функции $W_*(\xi)$ определяются так:

$$W_*^{\pm} = \overline{W^{\mp}} \quad \text{на} \quad L. \tag{16}$$

Приступим теперь к решению задачи (13). Обозначим

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{2}[\Lambda(\xi) + \Lambda_*(\xi)]; \quad \Omega(\xi) = \frac{1}{2}[\Lambda(\xi) - \Lambda_*(\xi)]. \tag{17}$$

Из (15) следует:

$$\Psi_*(\xi) = \Psi(\xi); \tag{18}$$

$$\Omega_*(\xi) = -\Omega(\xi). \tag{19}$$

Граничные условия (13) сводятся с учетом (16) к следующим:

$$\Psi^+ + \Psi^- = 0 \quad \text{на} \quad L', \tag{20}$$

$$\Omega^+ - \Omega^- = 0 \qquad \text{на} \qquad L'. \tag{21}$$

Функции $\Psi(\xi)$, $\Omega(\xi)$ голоморфны по определению в $S^+ + S^- + L''$ всюду за исключением точек $\xi = 0$ и $\xi = \infty$, где они имеют полюсы первого порядка. В окрестности концов r_j функции $\Psi(\xi)$, $\Omega(\xi)$ допускают оценку (10a); это легко получить из (17), (14).

Соотношение (21) показывает, что L' не является линией скачков для $\Omega(\xi)$, поэтому $\Omega(\xi)$ голоморфна во всей плоскости за исключением точек 0 и ∞, где она имеет полюсы первого порядка. Следовательно, $\Omega(\xi)$ имеет вид:

$$\Omega(\xi) = C\,\xi^{-1} + i\,A - \bar{C}\,\xi. \tag{22}$$

Здесь C – комплексная, A – действительная константы, подобранные так, чтобы выполнялось (19).

Отыскание $\Psi(\xi)$ по условию (20) сводится к решению простейшей задачи сопряжения. Все сказанное о классах решений целиком переносится на задачу (20).

Канонической функцией задачи (20) принято называть функцию $X(\xi)$, удовлетворяющую (20) и такую, что как $X(\xi)$, так и $[X(\xi)]^{-1}$ –кусочно-голоморфны. Из этого определения в частности следует, что $X(\xi)$ не может обращаться в нуль в точках L', отличных от концов.

Перечисленными выше условиями каноническая функция класса h_q определяется с точностью до умножения на произвольную комплексную постоянную /1/:

$$X_q(\xi) = \text{const}\,\sqrt{\frac{\prod\limits_{j=1}^{q}(\xi - r_j)}{\prod\limits_{j=q+1}^{2n}(\xi - r_j)}} = \text{const}\,R(\xi). \tag{23}$$

Под указанным выше радикалом подразумевается ветвь, голоморфная в $S^{+}+S^{-}+L'$; разложение которой в окрестности бесконечно удаленной точки по убывающим степеням ξ имеет вид:

$$R(\xi)=\xi^{q-n}+\ldots \tag{24}$$

Значение определенного так радикала в точке $\xi=0$ обозначим:

$$R(0)=\sqrt{\frac{\prod_{j=1}^{q}r_j}{\prod_{j=q+1}^{2n}r_j}}=e^{-i\gamma} \quad ; \mathrm{Im}\,\gamma=0. \tag{25}$$

Разложение указанного радикала в окрестности точки $\xi=0$ представим в виде:

$$R(\xi)=e^{-i\gamma}(1+\delta\xi+\ldots);$$

$$\delta=\frac{1}{2}\left[\sum_{j=q+1}^{2n}\bar{r}_j-\sum_{j=1}^{q}\bar{r}_j\right]. \tag{26}$$

Выберем константу в (23) так, чтобы выполнялось соотношение:

$$X_{q*}(\xi)=\xi^{n-q}X(\xi). \tag{27}$$

Учитывая, что $\bar{r}_j=r_j^{-1}$ ($r_j=\exp(i\theta_j)$, где θ_j – полярный угол, соответствующий точке r_j), находим $\mathrm{const}=\exp(i\frac{\gamma}{2})$ и поэтому

$$X_q(\xi)=e^{\frac{i\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\prod_{j=1}^{q}(\xi-r_j)}{\prod_{j=q+1}^{2n}(\xi-r_j)}}. \tag{23a}$$

Общее решение класса $h_q (q < n+2,\ q \leq 2n)$ задачи (20), допускающее полюсы не выше первого порядка в точках $\xi = 0$ и $\xi = \infty$, имеет вид:

$$\Psi_q(\xi) = X_q(\xi)[C_{-1}\xi^{-1} + C_0 + C_1\xi + \ldots + C_{n-q+1}\xi^{n-q+1}]. \tag{28}$$

При $q > n+2$ не существует решений, допускающих полюсы не выше первого порядка в указанных точках. C_j здесь - комплексные константы. Чтобы выполнялось соотношение (18), следует положить (учитывая (27)):

$$C_{n-q-k} = \bar{C}_k;\ k = -1, 0, 1, 2, \ldots, n-q+1. \tag{29}$$

Как следует из (17),

$$\Lambda(\xi) = \Psi(\xi) + \Omega(\xi). \tag{30}$$

Из (22) и (28) имеем:

$$\Lambda_q(\xi) = X_q(\xi)[C_{-1}\xi^{-1} + C_0 + C_1\xi + \ldots + C_{n-q+1}\xi^{n-q+1}] + C\xi^{-1} + iA - \bar{C}\xi. \tag{31}$$

Мы еще должны обеспечить выполнение условия (13а). Для этого нужно подставить в (31) разложение $X(\xi)$ в окрестности точки $\xi = 0$ и в полученном выражении приравнять нулю коэффициенты при членах нулевой и минус первой степени. Используя (23а) и (26), получаем:

$$e^{-\frac{i\gamma}{2}} C_{-1} + C = 0;\ e^{-\frac{i\gamma}{2}}(C_0 + \delta C_{-1}) + iA = 0. \tag{32}$$

Следовательно, подставляя (32) в (31) и переходя к $\Phi(\xi)$ в соответствии с (12), имеем:

$$\Phi_q(\xi) = X_q(\xi)\,[-e^{\frac{i\gamma}{2}} C\,\xi^{-2} + e^{\frac{i\gamma}{2}}(\delta C - iA)\xi^{-1} + C_1 + C_2\xi + \ldots + C_{n-q-1}\xi^{n-q-2} + e^{-\frac{i\gamma}{2}}(\delta\overline{C} + iA)\xi^{n-q-1} - e^{-\frac{i\gamma}{2}}\overline{C}\,\xi^{n-q}] + C\,\xi^{-2} + iA\,\xi^{-1} - \overline{C}\,. \tag{33}$$

Здесь C, C_j – комплексные константы, A – действительная. Константы C_j удовлетворяют соотношению (29) при $k = 1,2,\ldots,n-q-1$. $X_q(\xi)$ определена формулой (23а), γ – формулой (25), δ – формулой (26). $\Phi_q(\xi)$ зависит от $(n-q+2)$ произвольных действительных констант и существует в классах h_q при $q \le n+1$. В полярных координатах, как уже было сказано раньше, $\xi = \rho\exp(i\theta)$, $r_j = \exp(i\theta_j)$.

5. Интерпретация полученных результатов. Предельный переход к анизотропно проводящему цилиндру.

Как показано выше, решение (33) зависит от $(n-q+2)$ действительных констант, это действительные и мнимые части констант C, C_j и константа A. Обозначим указанные действительные константы B_j $(j = 1,2,\ldots,n-q+2)$. Решение класса h_q $(q \le n+1)$ задачи (10), определяемое формулой (33), обозначим символом:

$$\Phi_q(B_1, B_2, \ldots, B_{n-q+2}; \xi).$$

Возвращаясь к обозначениям раздела 2 в смысле использования индексов + и –, можно написать:

$$E_y^{\pm} + iE_x^{\pm} = \Phi_{q^{\pm}}[B_1^{\pm}(\sigma^{\pm}), B_2^{\pm}(\sigma^{\pm}), \ldots, B^{\pm}_{n-q^{\pm}+2}(\sigma^{\pm}); \xi]. \tag{34}$$

Решение класса $h(q^+; q^-)$ краевой задачи для уравнений Максвелла (1) зависит, таким образом, от $(2n-q^+-q^-+4)$ произвольных функций $B^{\pm}(\sigma^{\pm})$. Решение класса $h(0;0)$ зависит от $(2n+4)$ произвольных функций, которые соответствуют n токам, n потенциалам, заданным на n проводниках, и четырем компонентам внешних, т.е. не исчезающих на бесконечности, полей.

В выражении (33) за внешние поля ответственна, как легко заметить, константа C. Внешние поля соответствуют обыкновенной плоской волне в свободном пространстве, только согласованной с волноводной системой.

Из (23а) следует, что решение класса h_q автоматически обращается в нуль вблизи концов $r_1, r_2, \dots, r_q$, поэтому и поля соответствующей волны будут обращаться в нуль вблизи ребер $r_1, r_2, \dots, r_q$.

Анализ выражения (33) показывает, что, имея достаточное число проводников, можно построить поля, сколь угодно быстро убывающие на бесконечности. Решение $\Phi(\xi)$, наиболее быстро убывающее на бесконечности, при $n>1$ имеет вид (класс h_0):

$$n \text{ - четное, } n=2m; \quad \Phi(\xi) = X_0(\xi) A \xi^{m-1}, \tag{35}$$

$$n \text{ - нечетное, } n=2m+1; \quad \Phi(\xi) = X_0(\xi)(D\xi^{m-1} + \bar{D}\xi^{m}). \tag{36}$$

Решение (35) убывает на бесконечности как ξ^{-m-1}, решение (36) - как ξ^{-m-2}. Столь же быстро указанные решения убывают при $\xi \to 0$, оба как ξ^{m-1}. В (35), (36) A - действительная константа, D - комплексная.

Мы умеем, таким образом, создавать ТЕМ-волны, распространяющиеся в непосредственной близости от системы проводников. Если теперь поместить "беличье колесо" внутрь коаксиального волновода, то получим систему, рассмотренную в [3]. Если генерировать ТЕМ-волны с $\Phi(\xi)$ типа (35), (36) с большим показателем спада и поместить экраны достаточно далеко от "беличьего колеса", то наличие экранов почти не изменит вида решения. Полученное решение можно, следовательно, интерпретировать как приближенное для системы [3], если показатель спада велик, а экраны достаточно далеко. В некоторых случаях это приближение будет лучшим, чем в [3].

Для того чтобы перейти к предельному случаю анизотропно проводящего волновода, необходимо устремить число полос к бесконечности. Мы можем избежать трудностей, связанных с предельным переходом, поскольку сразу ясно, как в этом случае ставить краевую задачу: тангенциальную компоненту электрического поля (для волны, бегущей в определенном направлении) следует приравнивать заданной функции полярного угла θ и параметра σ. Мы приходим к задаче Римана-Гильберта:

найти голоморфную в S^+ (рис. 2) функцию $\Phi = u + iv$, непрерывно продолжимую на L, по краевому условию

$$\operatorname{Re}(e^{i\theta}\Phi^+) = f(\theta, \sigma) \quad \text{на} \quad L, \tag{37}$$

где $f(\theta, \sigma)$ - функция, гельдеровская по переменной θ всюду на L. Аналогично ставится краевая задача для внешней области S^-. Ясно, что внешняя и внутренняя задачи в данном случае независимы.

Чтобы решить задачу (37), введем так же, как в разделе 4, функцию $\Lambda(\xi) = \xi\Phi(\xi)$, условия для которой имеют вид:

$$\operatorname{Re}\Lambda^+ = f(\theta, \sigma) \quad \text{на} \quad L; \tag{38}$$

$$\Lambda(0) = 0. \tag{38a}$$

Решение задачи (38) сразу дается интегралом Шварца, в результате имеем:

$$\Phi(\xi) = \xi^{-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau,\sigma)\frac{e^{i\tau}+\xi}{e^{i\tau}-\xi}\,d\tau. \tag{39}$$

Из (38а) следует:

$$\int_0^{2\pi} f(\tau,\sigma)\,d\tau = 0. \tag{39a}$$

Используя (39а), решение (39) можно преобразовать к виду (вводим полярные координаты):

$$\Phi(\rho e^{i\theta}) = \frac{\exp(-i\theta)}{\pi\rho}\int_0^{2\pi}\frac{f(\tau,\sigma)}{1-\rho\exp[i(\theta-\tau)]}\,d\tau. \tag{40}$$

Как видно из окончательной формы решения, нет необходимости требовать, чтобы $f(\theta,\sigma)$ была гельдеровской. Условие (39а) означает, что фурье-разложение (по переменной θ) функции $f(\theta,\sigma)$ не содержит нулевого члена. Последнее эквивалентно требованию непрерывности для распределения потенциала на L.

Решение (39) является функционалом от f, запишем его в виде:

$$\Phi(\xi) \equiv \Phi(f,\sigma;\xi).$$

Тогда, очевидно:

$$E_y^{\pm} + iE_x^{\pm} = \Phi(f^{\pm},\sigma^{\pm};\xi). \tag{41}$$

Функции $f^{\pm}$ ответственны за распределение токов и потенциалов по контуру L.

В работе /4/ решена задача о распространении ТЕМ-волны в коаксиальном волноводе, когда составляющие волновод цилиндры (один или оба) анизотропно проводящие.

6. Некоторые другие задачи

Используя решения, полученные в разделах 4 и 5, легко отыскать поля ТЕМ-волны в "беличьем колесе" с тонкой металлической нитью, расположенной на оси, и рассмотреть соответствующий предельный случай. Как известно, поля при этом должны иметь на оси расходимость порядка ρ^{-1}, и, следовательно, функция $\Phi(\xi)$ должна иметь полюс при $\xi = 0$. Решения строятся совершенно так же, как и при отсутствии нити, за тем исключением, что вместо (13а), (38а) следует теперь положить: $|\Lambda(0)| < \infty$.

Решение (умноженное на ξ) краевой задачи для "беличьего колеса" с нитью на оси дается формулой (31), причем мы должны теперь требовать выполнения только первого из условий (32). Решение для анизотропно проводящего цилиндра с нитью на оси имеет вид:

$$\Phi(\xi) = \xi^{-1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau, \sigma) \frac{e^{i\tau} + \xi}{e^{i\tau} - \xi} d\tau + i A(\sigma) \xi^{-1}. \tag{42}$$

Здесь $A(\sigma)$ – действительная константа, зависящая от параметра σ. Эта константа определяет потенциал нити. Мы и здесь должны требовать выполнения условия (39а), если хотим, чтобы распределение потенциала на L было непрерывным.

Отметим еще, что легко получить поле ТЕМ-волны в металлическом волноводе квадратного сечения с тонкой проволокой, расположенной на оси, если воспользоваться известным /9/ решением уравнения Лапласа для соответствующей области и формулами (6), (3).

Автор благодарит В. Павлова за полезную информацию, Ю. Дерендяева, Э. Перельштейна и Э. Уразакова за обсуждение настоящей работы.

Литература

1. Н.И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, ГИФМЛ, М., 1962.
2. Ф.Д. Гахов. Краевые задачи, ГИФМЛ, М., 1958.
3. Л.Н. Лошаков. Радиотехника и электроника, 5, №7, 1092 (1960).
4. Л.П. Игушкин, Э.И. Уразаков. Вест.Моск. ун-та, физ.астрон., №4, 95 (1969).
5. А.В. Бицадзе. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, "Наука", М., 1966.
6. Б.В. Хведелидзе. Сообщ. АН Груз. ССР, 2, №7, 571, №10, 865 (1941).
7. C. Serpentis. Math. Fic., 1, No 2, 266 (1970).
8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, ГИФМЛ, М., 1959.
9. R.W. Hocney. J. Soc. Indust. Appl. Math., 12, No 1, 1 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
8 мая 1970 года.