СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р5 - 4927

А.А. Арсеньев

О РЕЗОНАНСНОМ РАССЕЯНИИ НА ПОТЕНЦИАЛЕ ТИПА "ЛОВУШКИ" И ФОРМУЛЕ БРЕЙТА-ВИГНЕРА

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1970

P5 - 4927

А.А. Арсеньев

О РЕЗОНАНСНОМ РАССЕЯНИИ НА ПОТЕНЦИАЛЕ ТИПА "ЛОВУШКИ" И ФОРМУЛЕ БРЕЙТА-ВИГНЕРА

Арсеньев А.А. P5-4927

О резонансном рассеянии на потенциале типа "ловушки" и формуле Брейта-Вигнера

Доказан резонансный характер потенциального рассеяния нерелятивистской частицы на потенциале специальной формы и доказана формула Брейта-Вигнера для волновой функции рассеиваемой частицы.

Сообщения Объединенного института ядерных исследований

Дубна, 1970

P5-4927

Arseniev A.A.

On the Resonance Scattering on the Potential of the "Trap" Type and Breit-Wigner Formula

The resonance character of the potential scattering of a nonrelativistic particle on the potential of a special form and the Breit-Wigner formula for the wave function of a scattered particle are proved.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna, 1970

1. Мы рассматриваем рассеяние нерелятивистской частицы на потенциале типа изображенного на рис. 1. В работе [1] было показано, что аналитическое продолжение по энергии решения задачи рассеяния (р.з.р.) имеет на втором листе полюсы, расположенные вблизи действительной оси, и что действительная часть этих полюсов определяет энергию квазистационарных состояний, а мнимая – их время жизни. Цель этой работы состоит в доказательстве существования резонансов у р.з.р. при энергиях, равных энергиям квазистационарных состояний и в доказательстве справедливости формулы Брейта-Вигнера в окрестности этих резонансов.

Нам бы хотелось подчеркнуть, что предположение о резонансном характере р.з.р. в силу причин, объясненных ниже, не может быть подтверждено существованием полюсов с достаточно малой мнимой частью и формулой Брейта-Вигнера, а должно быть доказано независимо.

Используемый нами метод является реализацией идеи о составном ядре в теории ядерных реакций [2-3]. Предположим, что потенциал $V(x)$ описывает взаимодействие частицы с ядром. Система ядро+частица может образовывать связные состояния с положительной энергией лишь в том случае, если потенциал $V(x)$ равен $+\infty$ на множестве вида $\{x; R_1 < |x| < R_2\}$. Если он велик, но конечен на этом множестве, то устойчивых связных состояний система образовать не может, однако, как доказано в [1], при определенных энергиях она будет образовывать состояния, которые живут достаточно долго. Как известно [2], при этих же энергиях решение задачи рассеяния должно иметь резонансы. Чтобы доказать последнее утверждение, мы включим потенциал в однопараметрическое семейство потенциалов $V\ (x)$ и рассмотрим поведение интересующих нас величин при $M \to \infty$.

Напомним обозначения, введенные в работе [1]. R_N - это N-мерное евклидово пространство, $N \geq 3$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, Δ - оператор Лапласа, $V(x)$ - неотрицательная скалярная функция (потенциал), $\Omega = \{x, V(x) = \infty\}$, Ω_1 - связная компонента множества $R_N \setminus \Omega$, содержащая бесконечно-удаленную точку, $\Omega_2 = R\,(\Omega \cup \Omega_1)$, $V_M(x) = \min\{V(x), M\}$. Мы будем предполагать, что потенциал $V(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) при каждом фиксированном $M > 0$ функция $V_M(x)$ удовлетворяет локально условию Гельдера и неотрицательна;

2) существует такое $R < \infty$, что при $|x| \geq R$ выполнено неравенство $V(x) < C\,|x|^{-N-a}$;

3) $\operatorname{mes} \Omega_2 > 0$ и оператор H (см. ниже) имеет нетривиальный дискретный спектр $\{\lambda_j\}$.

Предположение о неотрицательности потенциала принято нами только из-за желания упростить написание формул. Оно может быть заменено на следующее:

$$\text{функция} \quad V^-(x) = \max\{0, -V(x)\} \in L^q, \quad q > 0{,}5\,N.$$

Пусть H и H_M - самосопряженные расширения операторов, определенных на финитных в $R_N \setminus \Omega$ и в R_N функциях формулой

$$Hu = -\Delta u + V(x)u, \quad H_M u = -\Delta u + V(x)u. \qquad (1)$$

Спектральное разложение оператора H построено в [4-6]. Пусть $G_M(x,y,t)$ и $G(x,y,t)$ - ядра операторов $\exp(-tH_M)$ и $\exp(-tH)$; операторы g_M и $T_M^+(\lambda)$ определены формулами

$$g_M = G_0 - G_M, \quad T_M^+(\lambda) = -\lim_{\epsilon \to +0} [\exp(-(\lambda + i\epsilon)t) - G(t)]^{-1} g.$$

$T_M^+(\lambda)^*$ - оператор, сопряженный в L^p к $T_M^+(\lambda)$. $\psi(x, \lambda_j)$ - сосредоточенные в Ω_2 собственные функции дискретного спектра оператора H, $u_M(x,k)$ - решение задачи рассеяния (р.з.р.) для оператора H_M:

$$H_M u_M = \lambda u_M, \quad \lambda = k^2,$$

$$u_M(x,k) = \exp(ikx) + \phi_M(x,k),$$

$$\phi_M(x,k) = O(|x|^{(1-N)/2});\ \left(\frac{\partial}{\partial |x|} - i\sqrt{\lambda}\right)\phi \underset{|x|\to\infty}{=} o(|x|^{(1-N)/2}),$$

$u(x,k)$ – р.э.р. для оператора H,

$$(\tilde{\tilde{f}})_M(k) = \int u_M(x,k) f(x)\,dx,\ (\tilde{\tilde{\psi}})_M(k,\lambda_j) = \int u_M(x,k)\psi(x,\lambda_j)\,dx.$$

Изучим асимптотику функции $u(x,k)$ при $M\to\infty$ в окрестности сферы $k^2=\lambda$. Положим

$$\rho_j(\lambda, M) = (|\lambda-\lambda_j|^2 + M^{-2})^{1/2}.$$

Отправным пунктом для нас будет доказанная в[6] Теорема 1.

1. Если λ_j – простое собственное значение дискретного спектра оператора H, то существует такое $\delta_j>0$, что при всех $(k,M)\in \in \{k, M;\ 0<\rho_j(k^2,M)<\delta_j\}$ функция $u_M(x,k)$ представима в виде

$$u_M(x,k) = \exp(ikx) + \psi(x,\lambda_j|k^2,M)\omega_j(k,M) + \kappa_j(x,k,M), \tag{2}$$

где

$$\omega_j(k,M) = \mu_j(k^2,M)(1-\mu_j(k^2,M))e(k,\lambda_j,M),$$

$$e(k,\lambda_j,M) = \int \exp(ikx)\psi^*(x,\lambda_j|k^2,M)\,dx. \tag{3}$$

2. Функции $\psi(x,\lambda_j|k^2,M), \psi^*(x,\lambda_j|k^2,M)$ и число $\mu_j(k^2,M)$ удовлетворяют равенствам

$$T_M^+(\lambda)\psi = \mu_j(k^2,M)\psi,\quad T_M^+(\lambda)^*\psi^* = \mu_j(k^2,M)\psi^*,\quad \lambda=k^2$$

и обладают тем свойством, что

$$\| \psi(x, \lambda_j \,|k^2, M) - \psi(x, \lambda_j)\|_p \to 0, \quad 2N/N-1 < p < \infty ,$$

$$\| \psi^*(x, \lambda_j | k^2, M) - \psi^*(x, \lambda_j)\|_q \to 0, \qquad \psi^* : T^*(\lambda)|\, \psi^* = \psi^* ,\ 1 \le q < \infty ; \quad (4)$$

$$\mu_j(k^2, M) \to 1, \quad M \to \infty .$$

3. Существует такая функция $\kappa_j(x,k) \in L^p$, что
$\| \kappa_j(x, k, M) - \kappa_j(x,k)\|_p \to 0$, $|k - k_0|^2 + M^{-2} \to 0$, $k_0^2 = \lambda_j$.

Простой подсчёт (см. ниже) показывает, что

$$\psi^*(x, \lambda_j) = [\exp(-\lambda_j t) - G_0(t)]\, \psi(x, \lambda_j) . \qquad (5)$$

Положим

$$m(\lambda_j, \sigma) = \{ k,\ \lambda_j - \sigma \le k^2 \le \lambda_j + \sigma \} ,$$

$$I(\lambda_j, \sigma, M) = (2\pi)^{-N} \int_{m(\lambda_j,\sigma)} |\omega_j(k,M)|^2 \, dk ,$$

$$\theta^2(M) = \int |g_M(x, y, t) - g(x,y,t)|\, dx\, dy .$$

Докажем <u>Теорему 2.</u>

Пусть λ_j – простое собственное значение оператора H, функция $\sigma(M) \to +0$ при $M \to \infty$ и удовлетворяет соотношению

$$\sigma^{-1}(M)\, \theta(M) \to 0, \quad M \to \infty . \qquad (6)$$

Тогда

$$I(\lambda_j, \sigma(M), M) \to 1 \qquad \text{при} \qquad M \to \infty . \qquad (7)$$

Из теоремы 2 следует, что функция $\omega_j(k,M)$, при достаточно больших M имеет резкий пик в окрестности точки $k^2=\lambda_j$.

Сначала напомним две леммы, доказанные в/6/ и /1/.

<u>Лемма 1.</u> Справедливо неравенство

$$\limsup_M I(\lambda_j,\sigma(M),M)\leq 1. \tag{8}$$

<u>Лемма 2.</u> Справедлива оценка

$$\int\limits_{|k^2-\lambda_j|\geq\sigma} |(\tilde{\psi})_M(k,\lambda_j)|^2\, dk \leq (\pi/t)^{N/2} \exp(2t\lambda_j)(1-\exp(-t\sigma(M)))^{-2}\theta^2(M). \tag{9}$$

Покажем, что из (8) и (9) следует (7). Ниже символ $o(M)$ обозначает величину, которая стремится к нулю при $M\to\infty$.

Справедливо равенство

$$1=\int|\psi(x,\lambda_j)|^2\, dx=(2\pi)^{-N}\int|(\tilde{\tilde{\psi}})_M(k,\lambda_j)|^2\, dk=$$

$$=(2\pi)^{-N}\int\limits_{m(\lambda_j,\sigma(M))}|(\tilde{\tilde{\psi}})_M(k,\lambda_j)|^2\, dk+(2\pi)^{-N}\int\limits_{|k^2-\lambda_j|\geq\sigma(M)}|(\tilde{\tilde{\psi}})_M(k,\lambda_j)|^2\, dk. \tag{10}$$

В силу формулы (2) справедливо равенство

$$(2\pi)^{-N}\int\limits_{m(\lambda_j,\sigma(M))}|(\tilde{\tilde{\psi}})_M(k,\lambda_j)|^2\, dk=(2\pi)^{-N}\int\limits_{m(\lambda_j,\sigma(M))}|(\tilde{\tilde{\psi}})_0(k,\lambda_j)+\int\psi(x,\lambda_j)\kappa_j(x,k,M)\,dx|^2\, dk+$$

$$+(2\pi)^{-N}2\,\mathrm{Re}\int\limits_{m(\lambda_j,\sigma(M))}\omega_j(k,M)\left[\int\psi(x,\lambda_j)\psi(x,\lambda_j|k^2,M)\,dx\right]\left[(\tilde{\tilde{\psi}})_0(k,\lambda_j)+\int\psi(x,\lambda_j)\kappa(x,k,M)dx\right]dk+ \tag{11}$$

$$+(2\pi)^{-N}\int\limits_{m(\lambda_j,\sigma(M))}|\omega_j(k,M)|^2\,|\int\psi(x,\lambda_j)\psi(x,\lambda_j|k^2,M)dx|^2\, dk.$$

Из теоремы 1 и леммы 1 вытекают следующие оценки:

$$(2\pi)^{-N} \int_{m(\lambda_j,\sigma(M))} |\omega_j(k^2,M)|^2 \left| \int \psi(x,\lambda_j)\psi(x,\lambda_j\,|\,k^2,M)\,dx \right|^2 dk = I(\lambda_j,\sigma(M),M)(1+o(M)), \quad (12)$$

$$(2\pi)^{-N} \int_{m(\lambda_j,\sigma(M))} |(\tilde{\tilde{\psi}})_0(k,\lambda_j) + \int \psi(x,\lambda_j)\kappa\,(x,k,M)\,dx|^2\,dk \le C \int_{m(\lambda_j,\sigma(M))} dk = o(M), \quad (13)$$

$$\left| \int \omega_j(k,M)\left[\int \psi(x,\lambda_j)\psi(x,\lambda_j\,|\,k^2,M)\,dx\right]\left[(\tilde{\tilde{\psi}})_0(k,\lambda_j) + \int \psi(x,\lambda_j)\kappa_j(x,k,M)\,dx\right] dk \right| \le$$

$$\le C \int_{m(\lambda_j,\sigma(M))} |\omega_j(k,M)|\,dk \le C\left(\int_{m(\lambda_j,\sigma(M))} |\omega_j(k,M)|^2\,dk\right)^{1/2}\left(\int_{m(\lambda_j,\sigma(M))} dk\right)^{1/2} = o(M). \quad (14)$$

Подставив (12), (13) и (14) в (11), мы получим

$$(2\pi)^{-N} \int_{m(\lambda_j,\sigma(M))} (\tilde{\tilde{\psi}})_M(k,\lambda_j)|^2\,dk = I(\lambda_j,\sigma(M),M) + o(M). \quad (15)$$

Теперь заметим, что из (9) и (6) следует оценка

$$\int_{|k^2-\lambda_j|>\sigma(M)} |(\tilde{\tilde{\psi}})_M(k,\lambda_j)|^2\,dk = o(M). \quad (16)$$

Из (10), (15) и (16) следует равенство

$$I(\lambda_j,\sigma(M),M) = 1 + o(M).$$

Теорема доказана.

Преобразуем формулу (2). Предположим, что потенциал финитен (было бы достаточно предположить, что он убывает быстрее экспоненты) и что M достаточно велико. В силу леммы 1.13 из/1/, функция $u_M(x,k)$, рассматриваемая как функция переменной $\lambda = k^2$, имеет аналитическое продолжение через разрез $\operatorname{Re}\lambda = 0$, и в окрестности точки λ_j это аналитическое продолжение имеет простые полюсы в точках $\lambda_j^{\pm}(M)$, ($\operatorname{Im}\lambda_j^+(M)<0$, $\operatorname{Im}\lambda_j^-(M)>0$), которые суть единственные особые точки аналитического продолжения функции $u_M(x,k)$ в окрестности действительной оси.

<u>Лемма 3.</u> Существует такое $\delta_j' > 0$, что при всех $(k,M) \in \{k, M; 0<\rho_j(k^2,M) <\delta_j'\}$ справедливо равенство

$$1-\mu_j^+(k^2,M) = (\lambda-\lambda_j^+(M))C_j(\lambda,M), \quad \lambda = k^2, \tag{17}$$

где функция $C_j(\lambda,M)$ голоморфна по λ в некотором, содержащем точку $\lambda_j^+(M)$, круге $\{\lambda_j | \lambda-\lambda_j| < \epsilon_j\}$, причем минимум модуля функции $C_j(\lambda,M)$ в этом круге ограничен снизу и сверху константами, не зависящими от M.

<u>Доказательство.</u> В силу леммы 1.9 из/1/ функция $\mu_j^+(\lambda,M)$ голоморфна по λ в некотором круге $\{\lambda, |\lambda-\lambda_j|<\Delta\}$, который содержит точку $\lambda_j^+(M)$, и справедливо равенство

$$\mu_j^+(\lambda, M)-1 = \mu_j^+(\lambda,M) - \mu_j^+(\lambda_j^+(M),M) =$$

$$= \frac{\partial\mu_j^+}{\partial\lambda}(\lambda_j^+(M),M)(\lambda-\lambda_j^+(M)) + O((\lambda-\lambda_j^+(M))^2).$$

В силу лемм 1.9 и 1.10 из/1/ справедливы неравенства

$$\epsilon^{-1} \geq \left|\frac{\partial\mu_j^+}{\partial\lambda}(\lambda_j^+(M),M)\right| \geq \epsilon > 0, \quad M \geq M_j.$$

Так как $\lambda_j^+(M)\to\lambda_j$ при $M\to\infty$, то отсюда следует утверждение леммы.

Подставив (17) в (3) и (2), мы получим формулу, которую часто называют формулой Брейта-Вигнера:

$$u_M(x,k) = \exp(ikx)+\psi(x,\lambda_j|k^2,M)e(k,\lambda_j,M)(k^2-\lambda_j^+(M))^{-1}C_j^{-1}(k^2,M)+\kappa_j(x,k,M). \tag{2'}$$

Так как $\operatorname{Im}\lambda_j^+(M)\to 0$ при $M\to\infty$, то можно было бы думать, что из (2') уже следует резонансный характер функции $u_M(x,k)$. Покажем, что такое заключение было бы преждевременным.

Лемма 4. Функция $e(k,\lambda_j,M)$, определенная равенством (3), удовлетворяет соотношению:

$$|e(k,\lambda_j,M)|\to 0 \qquad \text{при} \quad \rho_j(k^2,M)\to 0\,.$$

Доказательство. Сначала докажем формулу (5). По определению, $T^+(\lambda)^*=-g[\exp(-(\lambda_j+i0)t)-G_0(t)]^{-1}$, и из равенства $T^+(\lambda)^*\psi^*=\psi^*$ следует, что функция

$$\eta(x)=[\exp(-(\lambda_j+i0)t)-G_0(t)]^{-1}\psi^*(x) \tag{19}$$

удовлетворяет уравнению

$$\exp(-\lambda_j\, t)\,\eta(x)=G(t)\,\eta(x)\,. \tag{20}$$

Так как $\eta(x)$ удовлетворяет условиям излучения, то из (20) следует /4/, что $\eta(x)=\psi(x,\lambda_j)$. Умножив обе части (19) на $\exp(-\lambda_j t)-G_0(t)$, получим (5).

Воспользовавшись равенством (5), получаем

$$|e(k,\lambda_j M)|=|\int \exp(ikx)[\psi^*(x,\lambda_j\,|\,k^2,M)-\psi^*(x,\lambda_j)]\,dx\,+$$

$$+\int \exp(ikx)\psi^*(x,k,M)dx\,|\le||\psi^*(x,\lambda_j)\,|\,k^2,M)-\psi^*(x,\lambda_j)||_1+$$

$$+|\exp(-k^2t)-\exp(-\lambda_j t)|\,|\psi(k,\lambda_j)|\to 0 \qquad \rho_j(k^2,M)\to 0\,.$$

Лемма доказана.

Из леммы 4 следует, что максимум р.з.р. внутри ловушки растет медленнее, чем $|\operatorname{Im}\lambda_j^+(M)|^{-1}$, поэтому на основе малости величины $|\operatorname{Im}\lambda_j^+(M)|^{+1}$ еще нельзя делать вывода о появлении резонанса.

Литература

1. А.А. Арсеньев. ЖТМФ, т. 1, № 1, стр. 147 (1969).
2. Дж.Т. Блатт, В. Вайскопф. Теоретическая ядерная физика. Издат. Ин. лит. Москва, 1954.
3. Г. Брейт. Теория резонансных ядерных реакций. Издат. ин.лит. Москва, 1961.
4. А.А. Арсеньев. ЖВМ и МФ, т. 8, №3, стр. 544–572 (1968).
5. А.А. Арсеньев. ЖВМ и МФ, т. 8, №6, стр. 1232–1241 (1968).
6. А.А. Арсеньев. ЖВМ и МФ, т. 9, №1, стр. 137–163 (1969).

Рукопись поступила в издательский отдел

13 февраля 1970 года.

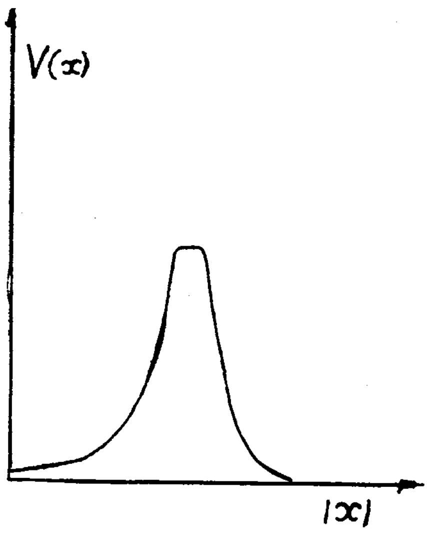

Рис. 1