ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

Р5 - 4924

Ю.Л. Обухов

II. К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ

Дубна 1970

P5 - 4924

Ю.Л. Обухов

II. К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ

В работе рассмотрена возможность решения матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dY}{d\tau} = F(\tau)\,Y \qquad Y/_{\tau=0} = Y_0 ,$$

где матрица $F(\tau)$ – произвольная ограниченная непрерывная антисимметричная матрица четвертого порядка. Показано, что решение данного уравнения может быть сведено к рассмотрению решений двух комплексно сопряженных уравнений Риккати для некоторых специально выбранных аналитических функций ξ и ξ^*.

Решение достигается переходом к кольцевому базису матрицы $F(\tau)$, связанному с диагональным представлением матрицы $F(\tau)$. Переход к такому базису позволяет написать решение исходного уравнения в виде некоторого конечного произведения ортогональных матриц на начальное условие Y_0, если известно решение уравнения Риккати ξ.

В продолжение работы/1/ рассмотрим уравнение движения релятивистской частицы

$$\frac{d^2 x_i}{d\tau^2} = F_{ik}(\tau)\,\frac{d x_k}{d\tau} . \qquad (2.1)$$

Перейдем снова к матричной записи этого уравнения и будем считать, что антисимметричная матрица $F(\tau)$ является некоторой непрерывной дифференцируемой функцией от параметра τ.

В таком виде, очевидно, задача имеет лишь чисто математический интерес, поскольку мы не хотим накладывать никаких дополнительных физических условий (в частности, мы не учитываем здесь уравнений Максвелла, которым должны подчиняться компоненты $F_{ik}(\tau)$).

Положим, далее, $\frac{dX}{d\tau} = Y$, и будем искать решение уравнения

$$\frac{dY}{d\tau} = F(\tau)\,Y \tag{2.2}$$

с начальным условием

$$Y/_{\tau=0} = Y_0 . \tag{2.3}$$

Представим функцию $F(\tau)$ в виде следующей конечной суммы:

$$F(\tau) = \frac{e}{mc}\,(B_i\,\mu_i + E_i\,\nu_i)^{x/}, \tag{2.4}$$

где μ_i и ν_i - инфинитезимальные матрицы поворотов вокруг соответствующих осей, а B_i и E_i - соответствующие компоненты электромагнитного поля.

Матрицы μ_i и ν_i определим следующим образом:

$$\left\{\begin{aligned} \mu_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mu_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mu_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \nu_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \nu_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \nu_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right. \tag{2.5}$$

---

x/ В данном случае это всего лишь удобная запись.

Нетрудно проверить, что для этих матриц можно написать следующие коммутационные соотношения:

$$\left\{\begin{aligned} [\mu_i \mu_j] &= -\epsilon_{ijk}\,\mu_k \\ [\nu_i\ \nu_j] &= \epsilon_{ijk}\,\mu_k \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} [\mu_i \nu_j] &= -\epsilon_{ijk}\,\nu_k \\ [\mu_i \nu_i] &= 0 \end{aligned}\right. \tag{2.6$^{x/}$}$$

(здесь ϵ_{ijk} - полностью антисимметричный тензор третьего ранга).

Рассмотрим далее решение характеристического уравнения

$$|\,F(\tau) - \lambda(\tau)\,E\,| = 0 . \tag{2.7}$$

В разбираемом нами случае можно написать

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm\, i\,\omega(\tau) \\ \lambda_{3,4} &= \pm\,\kappa(\tau) , \end{aligned}\right. \tag{2.8}$$

где $\omega(\tau)$ и $\kappa(\tau)$ даются формулами:

$$\left\{\begin{aligned} \omega(\tau) &= \left\{ \frac{1}{2} F_{ik}^2 + \frac{1}{2}\sqrt{F_{ik}^2 + 4\,\epsilon_{ijk\ell}\,F_{ij}\,F_{k\ell}} \right\}^{1/2} \\ \kappa(\tau) &= \left\{ -\frac{1}{2} F_{ik}^2 + \frac{1}{2}\sqrt{F_{ik}^2 + 4\,\epsilon_{ijk\ell}\,F_{ij}F_{k\ell}} \right\}^{1/2} . \end{aligned}\right. \tag{2.9}$$

В работе [1] было написано преобразование Q, с помощью которого постоянная матрица F может быть приведена к канонической форме F_J. Выберем, далее, некоторое $Q(\tau)$ и запишем:

---

x/ Очевидно, эти соотношения соответствуют алгебре Ли однородной группы Лоренца, хотя мы здесь несколько отступили от общепринятой терминологии.

$$F(r) = Q(r)\{\omega(r)\mu_1 + \kappa(r)\nu_i\}Q^{-1}(r), \qquad (2.10)$$

где индекс i – номер любой выбранной оси, относительно которой производится диагонализация.

Введем следующие ортогональные матрицы конечных поворотов вокруг соответствующих осей

$$\left\{\begin{aligned} e^{\psi_3(r)\mu_3} &= \begin{pmatrix} \cos\psi_3(r) & \sin\psi_3(r) & 0 & 0 \\ -\sin\psi_3(r) & \cos\psi_3(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ e^{\psi_2(r)\mu_2} &= \begin{pmatrix} \cos\psi_2(r) & 0 & -\sin\psi_2(r) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\psi_2(r) & 0 & \cos\psi_2(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ e^{\psi_1(r)\mu_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi_1(r) & -\sin\psi_1(r) & 0 \\ 0 & -\sin\psi_1(r) & \cos\psi_1(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right. \qquad (2.11)$$

(Здесь мы воспользовались известным экспоненциальным представлением оротогональных матриц).

И аналогично:

$$\left\{\begin{aligned} e^{\alpha_1(r)\nu_1} &= \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\alpha_1(r) & 0 & 0 & i\,\mathrm{sh}\,\alpha_1(r) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\,\mathrm{sh}\,\alpha_1(r) & 0 & 0 & \mathrm{ch}\,\alpha_1(r) \end{pmatrix} \\ e^{\alpha_2(r)\nu_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\,\alpha_2(r) & 0 & i\,\mathrm{sh}\,\alpha_2(r) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i\,\mathrm{sh}\,\alpha_2(r) & 0 & \mathrm{ch}\,\alpha_2(r) \end{pmatrix} \\ e^{\alpha_3(r)\nu_3} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{ch}\,\alpha_3(r) & i\,\mathrm{sh}\,\alpha_3(r) \\ 0 & 0 & -i\,\mathrm{sh}\,\alpha_3(r) & \mathrm{ch}\,\alpha_3(r) \end{pmatrix} \end{aligned}\right. \qquad (2.12)$$

Дальнейшие выкладки значительно упрощаются, если воспользоваться известной формулой, которую некоторые авторы/4,5/ называют формулой Беккера-Хаусдорфа[x]. Введем следующий оператор:

$$(DX)Y = [XY]$$

$$(DX)^2 Y = [X[XY]] \qquad (2.13)$$

––––––––––––––и т.д.

Тогда в операторной форме необходимое соотношение будет:

$$e^X Y e^{-X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(DX)^n}{n!} Y = e^{(DX)}Y. \qquad (2.14)$$

---

[x] На самом деле это лишь частный случай формулы Беккера-Кемпбелла-Хаусдорфа/7,8/.

Таким образом, если воспользоваться матрицами (2.11) и (2.12), то преобразование к канонической жордановой форме (2.10) может быть записано в соответствующей операторной форме.

Выберем, далее, систему координат, которая будет следовать за изменением электромагнитного поля. В частности, мы можем потребовать, чтобы в выбранной системе вектор $\vec{B}(\tau)$ все время совпадал с одной из осей координат, а вектор $\vec{E}(\tau)$ лежал бы в плоскости $(x_i x_j)$. Известно, что такое преобразование достигается тремя пространственными поворотами /1/,/9/, что мы можем записать в следующем виде:

$$e^{-\psi_j(\tau)(D\mu_j)}\, e^{\psi_k(\tau)(D\mu_k)}\, e^{-\psi_j(\tau)(D\mu_j)} F(\tau) = \qquad (2.15^{x/})$$

$$= \frac{e}{mc}\{ B'_j(\tau)\mu_j + E'_j(\tau)\nu_j \},$$

где

$$B'_i = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j$$

$$E'_i = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k \neq j$$

(в выражении оператора поворота по j и k не суммируется). Принимая, в качестве исходной, матрицу, полученную в (2.15), без труда убеждаемся, что преобразование к канонической форме будет:

$$e^{-\psi_i(\tau)(D\mu_i)}\, e^{-\alpha_i(\tau)(D\nu_i)}\, F'(\tau) = \omega(\tau)\mu_j + \kappa(\tau)\nu_j \qquad (2.16)$$

$$(i \neq j \neq k).$$

Не нарушая общности рассуждений, мы всегда можем зафиксировать индексы канонического преобразования и рассматривать конкретные преобразования к канонической форме (см. приложения 1 и 2).

Таким образом, полное преобразование матрицы $F(\tau)$ к канонической форме получается с помощью следующих конечных поворотов вокруг соответствующих осей:

$$F(\tau) = e^{\psi_j(D\mu_j)}\, e^{-\psi_k(D\mu_k)}\, e^{\psi'_j(D\mu_j)}\, e^{\alpha_i(D\nu_i)}\, e^{\psi_i(D\mu_i)} \{\omega\mu_j + \kappa\nu_j\}. \qquad (2.17)$$

Воспользуемся полученным преобразованием для того, чтобы вместо величин μ_i и ν_i ввести новый базис. Рассматривая соотношение (2.16), введем следующие матрицы:

$$\begin{cases} \sigma_j = \mu_j + i\nu_j \\ \sigma^*_j = \mu_j - i\nu_j \end{cases} \qquad (2.18)$$

Тогда матрица $F'(\tau)$ может быть записана в виде суммы двух комплексно сопряженных матриц.

$$F'(\tau) = \frac{\omega - i\kappa}{2}\{\sigma_j \cos(\psi_i - i\alpha_i) - \epsilon_{ijk}\sigma_k \sin(\psi_i - i\alpha_i)\} +$$

$$+ \frac{\omega + i\kappa}{2}\{\sigma^*_j \cos(\psi_i + i\alpha_i) - \epsilon_{ijk}\sigma^*_k \sin(\psi_i + i\alpha_i)\}, \qquad (2.19)$$

где матрицы σ_j и σ^*_j подчиняются следующим условиям:

$$[\sigma_i\, \sigma_j] = -2\epsilon_{ijk}\sigma_k \qquad [\sigma^*_i\, \sigma^*_j] = -2\epsilon_{ijk}\sigma^*_k \qquad (2.20)$$

$$[\sigma_i\, \sigma^*_j] = 0\,.$$

Воспользовавшись выражением (2.19) для матрицы $F'(\tau)$ и соотношениями (2.20), запишем исходную матрицу $F(\tau)$ окончательно в следующем виде:

$$F(\tau) = \frac{\omega - i\kappa}{2}\{ k_1 e^{i\psi_j} \mathcal{Y}_1 + k_2 e^{-i\psi_j} \mathcal{Y}_2 + k_3 \mathcal{Y}_3 \} + \frac{\omega + i\kappa}{2}\{ k_1^* e^{-i\psi_j} \mathcal{Y}_1^* + k_2^* e^{i\psi_j} \mathcal{Y}_2^* + k_3^* \mathcal{Y}_3^* \}, \tag{2.21}$$

где положено:

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}(\sigma_i - i\epsilon_{ijk}\sigma_k) \\ k_2 = \frac{1}{2}(\sigma_i + i\epsilon_{ijk}\sigma_k) \\ k_3 = i\sigma_j \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1^* = \frac{1}{2}(\sigma_1^* + i\epsilon_{ijk}\sigma_k^*) \\ k_2^* = \frac{1}{2}(\sigma_1^* - i\epsilon_{ijk}\sigma_k^*) \\ k_3^* = -i\sigma_j^* \end{cases} \tag{2.22}$$

(выражения для функций $\mathcal{Y}_i(\tau)$ и $\mathcal{Y}_i^*(\tau)$ даны в приложении 3). Нетрудно убедиться, что для операторов k_i и k_i^* получаем следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{cases} [k_1 k_2] = k_3 \\ [k_1 k_3] = 2k_1 \\ [k_2 k_3] = -2k_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} [k_1^* k_2^*] = k_3^* \\ [k_1^* k_3^*] = 2k_1^* \\ [k_2^* k_3^*] = -2k_2^* \end{cases} \tag{2.23}$$

И, наконец:

$$[k_i k_j^*] = 0. \tag{2.24}$$

Будем искать решение уравнения (2.2) с начальным условием (2.3) в виде произведения:

$$Y(\tau) = e^{g_3(\tau)k_3} e^{g_1(\tau)k_1} e^{g_2(\tau)k_2} e^{g_3^*(\tau)k_3^*} e^{g_1^*(\tau)k_1^*} e^{g_2^*(\tau)k_2^*} Y_0. \tag{2.25}$$

Подставляя это решение в уравнение (2.2), получим:

$$g_3'(\tau)k_3+g_1'(\tau)e^{g_3(\tau)(Dk_3)}k_1+g_2'(\tau)e^{g_3(\tau)(Dk_3)}e^{g_1(\tau)(Dk_1)}k_2=$$

$$=\frac{\omega(\tau)-i\kappa(\tau)}{2}\{k_1e^{i\psi_j(\tau)}\mathcal{Y}_1(\tau)+k_2e^{-i\psi_j}\mathcal{Y}_2(\tau)+k_3\mathcal{Y}_3(\tau)\}$$

$$g_3^{*\prime}(\tau)k_3^*+g_1^{*\prime}(\tau)e^{g_3^*(\tau)(Dk_3^*)}k_1^*+g_2^{*\prime}(\tau)e^{g_3^*(\tau)(Dk_3^*)}e^{g_1^*(\tau)(Dk_1^*)}k_2^*= \tag{2.26}$$

$$=\frac{\omega(\tau)+i\kappa(\tau)}{2}\{k_1^*e^{-i\psi_j(\tau)}\mathcal{Y}_1^*(\tau)+k_2^*e^{i\psi_j(\tau)}\mathcal{Y}_2^*(\tau)+k_3^*\mathcal{Y}_3^*(\tau)\}.$$

Напишем еще эти уравнения в следующей векторно-матричной форме:

$$\frac{\omega(\tau)-i\kappa(\tau)}{2}\begin{pmatrix} e^{i\psi_j(\tau)}\mathcal{Y}_1(\tau) \\ e^{-i\psi_j(\tau)}\mathcal{Y}_2(\tau) \\ \mathcal{Y}_3(\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-2g_3(\tau)} & g_1^2(\tau)e^{-2g_3(\tau)} & 0 \\ 0 & e^{2g_3(\tau)} & 0 \\ 0 & g_1(\tau) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1'(\tau) \\ g_2'(\tau) \\ g_3'(\tau)\end{pmatrix}$$

$$\frac{\omega(\tau)+i\kappa(\tau)}{2}\begin{pmatrix} e^{-i\psi_j(\tau)}\mathcal{Y}_1^*(\tau) \\ e^{i\psi_j(\tau)}\mathcal{Y}_2^*(\tau) \\ \mathcal{Y}_3^*(\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-2g_3^*(\tau)} & g_1^{*2}(\tau)e^{-2g_3^*(\tau)} & 0 \\ 0 & e^{2g_3^*(\tau)} & 0 \\ 0 & g_1^*(\tau) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1^{*\prime}(\tau) \\ g_2^{*\prime}(\tau) \\ g_3^{*\prime}(\tau)\end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Положим далее:

$$\begin{cases} \xi=g_1(\tau)e^{-2g_3(\tau)} \\ \xi^*=g_1^*(\tau)e^{-2g_3^*(\tau)} \end{cases} \tag{2.28}$$

Для функций ξ и ξ^* из (2.26) получаем два комплексно сопряженных уравнения Риккати следующего вида:

$$\xi' - \xi^2 \frac{\omega - i\kappa}{2} e^{-i\psi_j} y_2 + 2\xi \frac{\omega - i\kappa}{2} y_3 = \frac{\omega - i\kappa}{2} e^{i\psi_j} y_1$$

$$\xi^{*\prime} - \xi^{*2} \frac{\omega + i\kappa}{2} e^{i\psi_j} y^*_2 + 2\xi^* \frac{\omega + i\kappa}{2} y^*_3 = \frac{\omega + i\kappa}{2} e^{-i\psi_j} y^*_1 . \qquad (2.29)$$

На этом мы можем остановиться и считать решение поставленной задачи законченным.

Итак, мы показали, что проблема решения матричного дифференциального уравнения (2.2) с начальным условием (2.3) может быть сведена к изучению комплексно сопряженных уравнений Риккати (2.29) в случае, когда антисимметричная матрица четвертого порядка произвольно зависит от параметра τ. Необходимые ограничения в этом случае кажутся минимальными, а именно: мы требуем ограниченности и непрерывности матрицы $F(\tau)$.

В заключение автор выражает благодарность Б.Н. Валуеву, В.И. Огиевецкому и И.В. Полубаринову за обсуждение данной работы и ряд полезных консультаций, Л.П. Кудрину и Е.Д. Федюнькину за ряд критических замечаний, а также Н.Б. Рубину за постоянный интерес к работе.

Приложение 1

Рассмотрим конечные повороты вокруг соответствующих координатных осей.

a)

$$e^{\psi(\tau)(D\mu_i)} \mu_j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\psi(\tau))^n}{n!} (D\mu_i)^n \mu_j . \qquad (1)$$

Нетрудно проверить:

$$(D\mu_i)^n \mu_j = (D\mu_i)^{n-1} [\mu_i \mu_j] , \qquad (2)$$

заметим очевидное соотношение:

$$e^{\psi(\tau)(D\mu_i)}\,\mu_i = \mu_i \quad . \tag{3}$$

Выражение (1) будет:

$$e^{\psi(\tau)(D\mu_i)}\mu_j = \mu_j \cos\psi(\tau) - \epsilon_{ijk}\,\mu_k \sin\psi(\tau) \tag{4}$$

в)

$$e^{\psi(\tau)(D\mu_i)}\nu_j = \nu_j \cos\psi(\tau) - \epsilon_{ijk}\,\nu_k \sin\psi(\tau) \tag{5}$$

с)

$$e^{\psi(\tau)(D\nu_i)}\mu_j = \mu_j \operatorname{ch}\psi(\tau) - \epsilon_{ijk}\,\nu_k \operatorname{sh}\psi(\tau) \tag{6}$$

д)

$$e^{\psi(\tau)(D\nu_i)}\,\nu_j = \nu_j \operatorname{ch}\psi(\tau) + \epsilon_{ijk}\,\mu_k \operatorname{sh}\psi(\tau) \tag{7}$$

Приложение 2

а) Преобразование к форме (2.15), например, может быть выбрано:

$$e^{-\psi'_3(D\mu_3)}\,e^{\psi_2(D\mu_2)}\,e^{-\psi_3(D\mu_3)}F = F'_{12}\,\mu_3 + F'_{34}\,\nu_3 + F'_{24}\,\nu_2 \;, \tag{1a}$$

где матричные элементы F'_{ik} равны:

$$F'_{12} = F_{12}\cos\psi_2 - \sin\psi_2\,(F_{13}\sin\psi_3 - F_{23}\cos\psi_3)$$

$$F'_{34} = F_{34}\cos\psi_2 - \sin\psi_2\,(F_{24}\sin\psi_3 - F_{14}\cos\psi_3) \tag{2a}$$

$$F'_{24} = \cos\psi'_3\,(F_{24}\cos\psi_3 + F_{14}\sin\psi_3) + \sin\psi'_3\,\{(F_{14}\cos\psi_3 - F_{24}\sin\psi_3)\cos\psi_2 - F_{34}\sin\psi_2\}$$

при условии:

$$\begin{cases} F_{13} = -F_{23}\,\mathrm{tg}\,\psi_3 \\ F_{12}\,\mathrm{tg}\,\psi_2 = F_{13}\sin\psi_3 - F_{23}\cos\psi_3 \\ (F_{24}\cos\psi_3 + F_{14}\sin\psi_3)\,\mathrm{tg}\,\psi'_3 = -\cos\psi_2(F_{24}\sin\psi_3 - F_{14}\cos\psi_3) - F_{34}\sin\psi_2. \end{cases} \qquad (3а)$$

б) Выбирая, в качестве исходной, матрицу с матричными элементами (2а), приведем ее к канонической жордановой форме

$$e^{-\psi_1(D\mu_1)}\,e^{-a_1(D\nu_1)}F' = \omega\mu_3 + \kappa\nu_3\,. \qquad (1б)$$

В результате получаем:

$$\begin{cases} \omega = F'_{34}\,\mathrm{sh}\,a_1\sin\psi_1 + (F'_{12}\,\mathrm{ch}\,a_1 - F'_{24}\,\mathrm{sh}\,a_1)\cos\psi_1 \\ \kappa = F'_{34}\,\mathrm{ch}\,a_1\cos\psi_1 - (F'_{12}\,\mathrm{sh}\,a_1 - F'_{24}\,\mathrm{ch}\,a_1)\sin\psi_1 \end{cases} \qquad (2б)$$

при условии:

$$\begin{cases} F'_{34}\,\mathrm{sh}\,a_1\cos\psi_1 = \sin\psi_1\,(F'_{12}\,\mathrm{ch}\,a_1 - F'_{24}\,\mathrm{sh}\,a_1) \\ F'_{34}\,\mathrm{ch}\,a_1\sin\psi_1 = -\cos\psi_1\,(F'_{12}\,\mathrm{sh}\,a_1 - F'_{24}\,\mathrm{ch}\,a_1)\,. \end{cases} \qquad (3б)$$

Из этих соотношений получаем

$$\omega\,\mathrm{tg}\,\psi_1 = \kappa\,\mathrm{th}\,a_1 \qquad (4б)$$

Приложение 3

Коэффициенты в выражении (2.21) следующие

$$\begin{cases} \mathcal{Y}_1 = -\epsilon_{ijk}\cos(\psi_i - i a_i)\sin\psi_k - i\sin(\psi_i - i a_i)(\cos\psi'_j + i\sin\psi'_j\cos\psi_k) \\ \mathcal{Y}_2 = -\epsilon_{ijk}\cos(\psi_i - i a_i)\sin\psi_k + i\sin(\psi_i - i a_i)(\cos\psi'_j - i\sin\psi'_j\cos\psi_k) \\ \mathcal{Y}_3 = -i(\cos(\psi_i - i a_i)\cos\psi_k + \epsilon_{ijk}\sin(\psi_i - i a_i)\sin\psi_k\sin\psi'_j) \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \mathcal{Y}^*_1 = -\epsilon_{ijk}\cos(\psi_i + i a_i)\sin\psi_k + i\sin(\psi_i + i a_i)(\cos\psi'_j - i\sin\psi'_j\cos\psi_k) \\ \mathcal{Y}^*_2 = -\epsilon_{ijk}\cos(\psi_i + i a_i)\sin\psi_k - i\sin(\psi_i + i a_i)(\cos\psi'_j + i\sin\psi'_j\cos\psi_k) \\ \mathcal{Y}^*_3 = i(\cos(\psi_i + i a_i)\cos\psi_k + \epsilon_{ijk}\sin(\psi_i + i a_i)\sin\psi_k\sin\psi'_j) \end{cases} \qquad (2)$$

Приложение 4

Найдем явные выражения функций $g_i(\tau)$ от $\xi(\tau)$, которую мы будем считать известной. Из уравнений (2.27) находим

$$\begin{cases} g_3(\tau) = \int_0^\tau \frac{\omega - i\kappa}{2}(\mathcal{Y}_3 - e^{-i\psi_j}\mathcal{Y}_2\,\xi)\,d\tau \\ g_1(\tau) = \xi\exp\{2\int_0^\tau \frac{\omega - i\kappa}{2}(\mathcal{Y}_3 - e^{-i\psi_j}\mathcal{Y}_2\,\xi)\,d\tau\} \\ g_2(\tau) = \int_0^\tau \frac{\omega - i\kappa}{2}\,e^{-i\psi_j}\mathcal{Y}_2\exp\{-2\int_0^\tau \frac{\omega - i\kappa}{2}(\mathcal{Y}_3 - e^{-i\psi_j}\mathcal{Y}_2\,\xi)\,d\tau'\}\,d\tau. \end{cases} \qquad (1)$$

Аналогично:

$$\begin{cases} g^*_3(\tau) = \int_0^\tau \frac{\omega + i\kappa}{2}(\mathcal{Y}^*_3 - e^{i\psi_j}\mathcal{Y}^*_2\,\xi^*)\,d\tau \\ g^*_1(\tau) = \xi^*\exp\{2\int_0^\tau \frac{\omega + i\kappa}{2}(\mathcal{Y}^*_3 - e^{i\psi_j}\mathcal{Y}^*_2\,\xi^*)\,d\tau\} \\ g^*_2(\tau) = \int_0^\tau \frac{\omega + i\kappa}{2}\,e^{i\psi_j}\mathcal{Y}^*_2\exp\{-2\int_0^\tau \frac{\omega + i\kappa}{2}(\mathcal{Y}^*_3 - e^{i\psi_j}\mathcal{Y}^*_2\,\xi^*)\,d\tau'\}\,d\tau \end{cases} \qquad (2)$$

Приложение 5

Решение уравнения (2.2), взятое в виде (2.25), представляется как конечное произведение ортогональных матриц на начальное условие Y_0. Положим: $i=1$; $k=2$; $j=3$, тогда

$$\left\{\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2}(\mu_1 + i\mu_2 + i\nu_1 - \nu_2) \\ k_2 &= \frac{1}{2}(\mu_1 - i\mu_2 + i\nu_1 + \nu_2) \\ k_3 &= i(\mu_3 + i\nu_3) \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Используя это, напишем, например:

$$\left\{\begin{aligned} e^{g_3k_3} &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} g_3 & i\operatorname{sh} g_3 & 0 & 0 \\ -i\operatorname{sh} g_3 & \operatorname{ch} g_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} g_3 & -i\operatorname{sh} g_3 \\ 0 & 0 & i\operatorname{sh} g_3 & \operatorname{ch} g_3 \end{pmatrix} \\ e^{g_1k_1} &= \begin{pmatrix} \cos\frac{g_1}{2} & 0 & 0 & -\sin\frac{g_1}{2} \\ 0 & \cos\frac{g_1}{2} & \sin\frac{g_1}{2} & 0 \\ 0 & -\sin\frac{g_1}{2} & \cos\frac{g_1}{2} & 0 \\ \sin\frac{g_1}{2} & 0 & 0 & \cos\frac{g_1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{g_1}{2} & 0 & -i\operatorname{sh}\frac{g_1}{2} & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}\frac{g_1}{2} & 0 & -i\operatorname{sh}\frac{g_1}{2} \\ i\operatorname{sh}\frac{g_1}{2} & 0 & \operatorname{ch}\frac{g_1}{2} & 0 \\ 0 & i\operatorname{sh}\frac{g_1}{2} & 0 & \operatorname{ch}\frac{g_1}{2} \end{pmatrix} \\ e^{g_2k_2} &= \begin{pmatrix} \cos\frac{g_2}{2} & 0 & 0 & -\sin\frac{g_2}{2} \\ 0 & \cos\frac{g_2}{2} & \sin\frac{g_2}{2} & 0 \\ 0 & -\sin\frac{g_2}{2} & \cos\frac{g_2}{2} & 0 \\ \sin\frac{g_2}{2} & 0 & 0 & \cos\frac{g_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{g_2}{2} & 0 & i\operatorname{sh}\frac{g_2}{2} & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}\frac{g_2}{2} & 0 & i\operatorname{sh}\frac{g_2}{2} \\ -i\operatorname{sh}\frac{g_2}{2} & 0 & \operatorname{ch}\frac{g_2}{2} & 0 \\ 0 & -i\operatorname{sh}\frac{g_2}{2} & 0 & \operatorname{ch}\frac{g_2}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Литература

1. *Ю.Л.Обухов. Применение матричного метода решения дифференциальных уравнений к задаче о движении релятивистской частицы в постоянных, однородных полях. Препринт ОИЯИ 9-4732, Дубна, 1969.*
2. *Н.П. Еругин. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск, 1963.*
3. *Ландау и Лифшиц. Теория поля. Москва, 1967.*
4. *J. Wei and E. Norman. Proc. of the American Math. Soc. vol. 15, N2, 1964.*
5. *J. Wei and E. Norman. Journ. of Math.Phys. vol. 4, N4, 1963.*
6. *R.M. Wilcox. Journ. of Math.Phys. vol. 8, N4, 1967.*
7. *J. Bialynicki-Birula, B. Mielnik and J. Plebanski. Annals of Phys. vol. 51, N1, 1969.*
8. *Н.Джекобсон. Алгебры Ли. Москва, 1964.*

Рукопись поступила в издательский отдел
10 февраля 1970 года.