ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P5 - 4690

Р. Денчев

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРОВ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P5 - 4690

Р.Денчев

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРОВ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

Направлено в журнал "Известия
на математические институт на БАН"

В настоящей статье обобщаются некоторые результаты работы [1].

Будем пользоваться следующими обозначениями: E_n – вещественное n-мерное эвклидово пространство с точками $x=(x_1,\dots,x_n)$; Ω – область в E_n с границей $\partial\Omega$; $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль вне некоторых компактных множеств, содержащихся в Ω (для каждой функции свое множество); $H_s(\Omega)$ – соболевское пространство функций на Ω, имеющих суммируемые с квадратом производные порядка s, с соответствующей метрикой [2]; $\overset{0}{H}_s(\Omega)$ – замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по метрике $H_s(\Omega)$. Как известно [3], $\overset{0}{H}_s(\Omega)$ совпадает с совокупностью тех функций u из $H_s(\Omega)$, для которых на $\partial\Omega$ аннулируются производные $\frac{\partial^k u}{\partial\nu^k}$, $k=0,\dots,s-1$, где ν – нормаль к $\partial\Omega$.

Пусть A и B – формально самосопряженные дифференциальные выражения в E_n порядка $2m$ с постоянными вещественными коэффициентами; B – эллиптическое и не содержит младших членов. Предположим, что задача

$$Bu=f,\quad u/\partial\Omega=\dots=\frac{\partial^{m-1}u}{\partial\nu^{m-1}}/\partial\Omega=0 \tag{1}$$

имеет единственное решение (в смысле Соболева /2/) при любом $f \in L_2(\Omega)$. Обозначим через B_{-1} оператор, ставящий в соответствие каждому $f \in L_2(\Omega)$ соответствующее решение задачи (1).

Будем изучать спектр оператора

$$T: H_{2m}(\Omega) \ni u \to B_{-1} Au .$$

Докажем следующее утверждение:

Теорема. Если Ω – эллипсоид, то существует полная в $\overset{0}{H}{}^m(\Omega)$ система собственных функций оператора T, являющихся полиномами.

Доказательство. Пусть $\partial\Omega$ имеет уравнение $\omega(x) = 0$, где $\omega(x)$ – полином второй степени. Знак $\omega(x)$ выбираем так, чтобы внутри Ω было $\omega(x) > 0$. Обозначим через Π_r пространство полиномов n переменных и степени, не превышающей r. Пусть N – его размерность. Введем в Π_r скалярное произведение

$$<p,q> = \int_\Omega p(x)q(x)\omega^m(x)dx , \quad p,q \in \Pi_r .$$

Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ – операторы в Π_r, определяемые следующим образом:

$$\hat{A}: \Pi_r \ni p \to A(\omega^m p) \in \Pi_r$$
$$\hat{B}: \Pi_r \ni p \to B(\omega^m p) \in \Pi_r . \qquad (2)$$

Операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ симметричны. Действительно,

$$< \hat{A}p, q > = \int_\Omega A(\omega^m p) q \omega^m dx .$$

Интегрируя по частям и учитывая, что A – самосопряженное выражение и что интегралы по $\partial\Omega$ обращаются в нуль, так как на границе $\omega(x)=0$, получим

$$<\hat{A}p, q> = \int_\Omega \omega^m p\, A(q\omega^m)\,dx = <p, \hat{A}q>.$$

Аналогично для оператора $\hat{B}$.

Оператор $\hat{B}$ положителен. Это следует из оценки

$$<\hat{B}p, p> = \int_\Omega B(\omega^m p)p\,\omega^m\,dx = (B(\omega^m p), \omega^m p) \geqq C\,\|\omega^m p\|_m^2,\ C>0, \quad (3)$$

где $\|\ \|_m$ – норма в пространстве H_m. Докажем (3) (см. [3], гл. III, §1). Пусть

$$B = \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha D^\alpha$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Так как B – эллиптическое выражение, то можно предположить [3], что

$$(-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha \xi^\alpha \geqq \epsilon\,\Big(\sum_{j=1}^n \xi_j^2\Big)^m \geqq \epsilon \sum_{|\alpha|=m} (\xi^\alpha)^2, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in E_n.$$

Установим сначала неравенство (3), когда в нем вместо $\omega^m p$ подставим функцию $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Обозначая через $\tilde{\tilde{f}}$ образ Фурье функции f и пользуясь равенством Парсеваля, получаем:

$$(Bu, u) = (\tilde{\tilde{B}}u, \tilde{\tilde{u}}) = \int_{E_n} (-1)^m \left(\sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha \xi^\alpha \right) |\tilde{\tilde{u}}(\xi)|^2 d\xi \geqq$$

$$\geqq \epsilon \int_{E_n} \left(\sum_{|\alpha|=m} (\xi^\alpha)^2 \right) |\tilde{\tilde{u}}(\xi)|^2 d\xi = \epsilon \sum_{|\alpha|=m} \int_{E_n} |\xi^\alpha \tilde{\tilde{u}}(\xi)|^2 d\xi = \tag{4}$$

$$= \epsilon \sum_{|\alpha|=m} \int_{E_n} |(D^\alpha u)^{\approx}(\xi)|^2 d\xi = \epsilon \sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha u \|_0^2 \geqq C \| u \|_m^2 .$$

Вернемся теперь к полиному $\omega^m p$. Так как $\omega^m p \in \overset{0}{H}_m$, то можно построить последовательность $u_k \in C_0^\infty(\Omega)$, так что $u_k \to \omega^m p$ в H_m. Так как все производные функций u_k и $\omega^m p$ до порядка $m-1$ включительно аннулируются на $\partial\Omega$, то, интегрируя по частям, получаем

$$(Bu_k, u_k) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqq m} (f_{\alpha,\beta} D^\alpha u_k, D^\beta u_k) \to$$

$$\to \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqq m} (f_{\alpha,\beta} D^\alpha (\omega^m p), D^\beta (\omega^m p)) = (B(\omega^m p), \omega^m p) .$$

Здесь $f_{\alpha,\beta}$ – некоторые постоянные коэффициенты. Очевидно также, что

$$\| u_k \|_m \to \| \omega^m p \|_m .$$

Так как оценка (4) имеет место для u_k, то она справедлива и для $\omega^m p$. Таким образом, неравенство (3) доказано.

Итак, в конечномерном эвклидовом пространстве Π_r действуют симметричные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$, при этом оператор $\hat{B}$ положителен. Применяя известную из линейной алгебры /4/ теорему о приведении двух квадратичных форм к общему каноническому базису, получаем, что существует N чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ и N линейно независимых полиномов $\pi_1, \ldots, \pi_N$, удовлетворяющих равенству

$$\hat{A}\pi_j - \lambda_j \hat{B}\pi_j = 0, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{5}$$

При этом π_j можно выбрать так, чтобы выполнялись соотношения

$$< \hat{B}\pi_i \, \pi_j > = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, N. \tag{6}$$

Полиномы $\sigma_j = \omega^m \pi_j$ будут собственными функциями оператора T. Действительно, подставляя $\hat{A}$ и $\hat{B}$ из (2) в (5), получаем:

$$A\sigma_j - \lambda_j B\sigma_j = 0. \tag{7}$$

Так как σ_j удовлетворяют краевым условиям задачи (1), то

$$B_{-1} B \sigma_j = \sigma_j.$$

Теперь, применяя оператор B_{-1} к равенству (7), получаем:

$$T\sigma_j - \lambda_j \sigma_j = 0.$$

Соотношения (6) дают[x/]

$$(B\sigma_i, \sigma_j) = \delta_{ij}. \tag{8}$$

[x/] Соотношения (8) можно рассматривать как ортонормированность σ_j в "B - метрике".

Обозначим через Ξ_r множество собственных функций оператора T в пространстве Π_r. Легко видеть, что если $r_1<r_2$, то $\Pi_{r_1}\subset\Pi_{r_2}$ и операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ для пространства Π_{r_2} совпадают на Π_{r_1} с соответствующими операторами для Π_{r_1}. Следовательно, $\Xi_{r_1}\subset\Xi_{r_2}$. Пусть

$$\Xi = \bigcup_{r=1}^{\infty} \Xi_r .$$

Покажем, что Ξ – полная система в $\overset{0}{H}_m$. Множество полиномов вида $\omega^m p$, где p – полином степени не выше r, образует линейное пространство размерности N, и так как полиномы σ_i являются N линейно независимыми векторами этого пространства, то любой полином вида $\omega^m p$ можно представить линейной комбинацией полиномов из Ξ. Пусть $u\in C_0^\infty(\Omega)$. Функцию u можно аппроксимировать равномерно вместе с любыми производными порядка меньше m полиномами вида $\omega^m p$ с любой точностью. Действительно, $u/\omega^m\in C_0^\infty(\Omega)$, и значит, существует полином p такой, что

$$|D^\alpha(\frac{u}{\omega^m}-p)|<\epsilon\ ,\quad |\alpha|\leq m-1 . \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что из (9) следует

$$|D^\alpha(u-\omega^n p)|<C\epsilon\ ,\quad x\in\Omega,$$

где C – некоторая константа, зависящая от ω. Достаточно доказать, что из

$$|\frac{u}{\omega^m}-p|<\epsilon \qquad \text{и} \qquad |\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{u}{\omega^m}-p)|<\epsilon \tag{10}$$

следует

$$|u-\omega^m p| < C\epsilon \qquad \text{и} \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x_j}(u-\omega^m p)\right| < C\epsilon \; .$$

Действительно, если $M = \max\limits_{x\in\Omega} \omega^m$, то, очевидно,

$$|u-\omega^m p| < M\epsilon \; .$$

Дальше имеем

$$\epsilon > \left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{\omega^m}-p\right)\right| = \frac{1}{\omega}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}(u-\omega^m p)-\left(\frac{u}{\omega^m}-p\right)\frac{\partial\omega^m}{\partial x_j}\right| . \qquad (11)$$

Если $M_j = \max\limits_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial\omega^m}{\partial x_j}\right|$, то из (10) и (11) следует

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}(u-\omega^m p)\right| < (M+M_j)\epsilon ,$$

что и требовалось доказать.

Из доказанного следует, что $u \in C_0^\infty(\Omega)$ можно аппроксимировать с любой точностью полиномами вида $\omega^m p$ в метрике H_m. Так как $\overset{0}{H}_m(\Omega)$ является замыканием $C_0^\infty(\Omega)$ по метрике H_m, то значит, что любую функцию из $\overset{0}{H}_m$ можно аппроксимировать в метрике H_m полиномами $\omega^m p'$, т.е. линейными комбинациями полиномов из Ξ, а это означает, что система Ξ полна в $\overset{0}{H}_m$.

Теорема доказана.

Литература

1. Р.Денчев. ДАН СССР, 126 (1959), №2, стр. 259.
2. С.Л.Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. Ленинградского университета, Ленинград, 1950.
3. Ю.М.Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Изд. "Наукова думка", Киев, 1965.
4. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц. Издательство "Наука", Москва, 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 сентября 1969 года.