С 133.3
Д-339
27/VIII

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P5 - 4495

Р.Денчев

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

1969

P5 - 4495

Р.Денчев

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Направлено в журнал "Дифференциальные уравнения"

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Настоящая работа посвящена исследованию уравнения

$$\phi(t) = \lambda \int_a^b \frac{K(\tau, \phi(\tau))}{\tau - t} d\tau , \tag{1}$$

которое является частным случаем уравнения

$$\phi(t) = \lambda \int_a^b \frac{K(t, \tau, \phi(\tau))}{\tau - t} d\tau , \tag{2}$$

изученного в /1-2/. Там доказана локальная теорема о существовании решения уравнения (2), т.е. существовании решения при достаточно малых значениях λ. Мы докажем существование решения уравнения (1) для всех вещественных λ.

Наши рассуждения построены по следующей схеме. Будем рассматривать функцию $\phi(t)$ как элемент некоторого Банахова пространства B и уравнение (1) запишем в виде:

$$\Phi(\lambda, \phi) = 0 , \tag{3}$$

где Φ – оператор, ставящий в соответствие числу λ и элементу ϕ пространства B некоторый элемент пространства B. Решение ϕ уравнения (1) будем рассматривать как неявную функцию $\phi(\lambda)$, определенную из (3) и принимающую значения в B. Применением теорем о неподвижной точке можно показать /1-2/, что уравнение (1) (соответственно (3)) имеет решение при достаточно малых по модулю значениях λ. Пусть при $\lambda = \lambda_0 > 0$ уравнение (3) имеет решение ϕ_0. Применяя теорему о неявных функциях /4/, получим, что уравнение (3) разрешимо относительно ϕ для λ из некоторой окрестности точки λ_0. Возьмем точку $\lambda_1 > \lambda_0$ из этой окрестности. Пусть ϕ_1 – соответствующее решение (3). Если теорема о неявных функциях применима в точке (λ_1, ϕ_1), получаем снова некоторую окрестность точки λ_1, в которой уравнение (3) разрешимо и т.д. Таким образом, получим некоторую возрастающую последовательность чисел λ_n. Мы докажем, что эта последовательность бесконечна, т.е. не будет точки λ_n, в которой теорема о неявных функциях неприменима. Если $\Lambda = \lim \lambda_n = \infty$, то уравнение (1) имеет решение при любом $\lambda > 0$. Если $\Lambda < \infty$, уравнение имеет решение при $0 < \lambda < \Lambda$ и, в частности, при $\lambda = \Lambda - \epsilon_1 = \lambda_1^*$, где ϵ_1 – достаточно малое положительное число. Применяя те же рассуждения исходя из точки λ_1^* вместо λ_0, получим точку $\lambda_2^* > \lambda_1^*$, в которой уравнение (1) разрешимо и т.д. Мы покажем, что $\lambda_n^* \to \infty$ и это будет означать опять, что уравнение (1) разрешимо при всех положительных λ.

Воспользуемся теоремой о неявной функции в следующей формулировке, которую легко получить из доказательства, приведенного в /4/.

Теорема 1 (о неявной функции). Заданы Банаховы пространства B_1, B_2, B_3 и оператор $\Phi(x,y)$, отображающий $B_1 \times B_2$ в B_3 и обладающий следующими свойствами:

1. $\Phi(x_0, y_0) = 0$.

2. $\Phi(x, y)$ непрерывен в окрестности точки (x_0, y_0).

3. $\Phi(x,y)$ имеет непрерывную производную $\Phi'_y(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) и существует $[\Phi'_y(x_0, y_0)]$.

4. Существуют константы δ и ϵ такие, что:

а) в окрестностях $\|x - x_0\| < \delta$, $\|y - y_0\| < \epsilon$ выполняется неравенство

$$\| [\Phi'_y(x_0, y_0)]^{-1} [\Phi'_y(x, y) - \Phi'_y(x_0, y_0)] \| < \frac{1}{2}; \tag{4}$$

в) для $\|x - x_0\| < \delta$ справедливо

$$\| [\Phi'_y(x_0, y_0)]^{-1} \Phi(x, y_0) \| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5}$$

При этих условиях существует оператор $\psi(x)$, определенный в окрестности $\|x - x_0\| < \delta$ со значениями в окрестности $\|y - y_0\| < \epsilon$, и обладающий свойствами:

1. $\Phi(x, \psi(x)) = 0$ $\quad \|x - x_0\| < \delta$.

2. $\psi(x_0) = y_0$.

3. $\psi(x)$ непрерывен в точке x_0.

4. Если $\psi_1(x)$ оператор, обладающий свойствами (1–3), то $\psi_1(x) = \psi(x)$.

Обозначим через $\mathrm{Lip}_\alpha[a, b]$ Банахово пространство функций, определенных на $[a, b]$ с вещественными значениями, удовлетворяющими условию Гьолдера с показателем α . Норму в $\mathrm{Lip}_\alpha[a, b]$ определяем следующим образом:

$$\|\phi\| = \sup_{t\in[a,b]} |\phi(t)| + \sup_{\substack{t_1 t_2 \in [a,b] \\ t_1 \neq t_2}} \frac{|\phi(t_1)-\phi(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha}} = \|\phi\|_C + \|\phi\|_H .$$

Сформулируем основную теорему настоящей работы.

Теорема 2. Пусть функция $K(\tau, u)$ определена для $\tau \in [a, b]$, $-\infty < u < \infty$, имеет производные $K'_u(\tau, u)$, $K''_{u^2}(\tau, u)$, $K'''_{u^2}(\tau, u)$ и пусть для $\tau \in [a, b]$, $-\infty < u < \infty$ выполняются условия Гьолдера

$$|K(\tau_1, u_1) - K(\tau_2, u_2)| \leqq k(|\tau_1 - \tau_2|^{\alpha} + |u_1 - u_2|),$$

$$|K'_u(\tau_1, u_1) - K'_u(\tau_2, u_2)| \leqq k'(|\tau_1 - \tau_2|^{\alpha} + |u_1 - u_2|),$$

$$|K''_{u^2}(\tau_1, u_1) - K''_{u^2}(\tau_2, u_2)| \leqq k''(|\tau_1 - \tau_2|^{\alpha} + |u_1 - u_2|)$$

и условия

$$|K(\tau, u)| \leqq k_0, \; |K'_u(\tau, u)| \leqq k_1, \; |K''_{u^2}(\tau, u)| \leqq k_2,$$

$$0 < k_3 \leqq |K'''_{u^3}(\tau, u)| \leqq k_4,$$

где $0 < \alpha \leqq 1$, $k, k', k'', k_0, k_1, k_2, k_3, k_4$ – константы. Пусть[x/]

$$K(a, u) = K(b, u) = 0$$

для всех u. Тогда при любом вещественном λ существует функция $\phi(t) \in \mathrm{Lip}_{\alpha}[a, b]$, удовлетворяющая уравнению (1).

[x/] От этого требования можно освободиться, рассматривая функции с особенностями на концах интервала так же, как это делается для линейных сингулярных интегральных уравнений на разомкнутом контуре[/5/].

Доказательство. Рассмотрим сначала некоторые вспомогательные операторы. Если $\psi(t) \in \mathrm{Lip}_{\alpha}[a,b]$ и $\psi(a)=\psi(b)=0$, то, как известно, (2)

$$S\psi = \int_{a}^{b} \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \in \mathrm{Lip}_{\alpha}[a,b].$$

При этом

$$\|S\psi\|_C \leq \pi \|\psi\|_C + \rho_1 \|\psi\|_H$$

$$\|S\psi\|_H \leq \rho_2 \|\psi\|_H ,$$

откуда следует

$$\|S\psi\| \leq \rho \|\psi\| , \tag{6}$$

где ρ_1, ρ_2, ρ – константы.

Пусть $\phi(\tau) \in \mathrm{Lip}_{\alpha}[a,b]$. Покажем, что тогда $K(\tau, \phi(\tau)) \in \mathrm{Lip}_{\alpha}[a,b]$. Действительно,

$$|K(\tau_1, \phi(\tau_1)) - K(\tau_2, \phi(\tau_2))| \leq k\,(|\tau_1 - \tau_2|^{\alpha} + |\phi(\tau_1) - \phi(\tau_2)|) \leq$$

$$\leq k\,(|\tau_1 - \tau_2|^{\alpha} + \|\phi\|_H |\tau_1 - \tau_2|^{\alpha}) = k\,(1 + \|\phi\|_H)\,|\tau_1 - \tau_2|^{\alpha} .$$

Так как, кроме того, $|K(\tau, \phi(\tau))| \leq k_0$, то

$$\|K(\tau, \phi(\tau))\| \leq k_0 + k\,(1 + \|\phi\|_H). \tag{7}$$

Аналогично получаем, что $K'(\tau, \phi(\tau)) \in \mathrm{Lip}\ [a,b]$

$$\| K'_u(\tau), \ \phi(\tau))\| < k_1 + k'(1 + \|\phi\|_H) . \tag{8}$$

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{K} : \mathrm{Lip}_\alpha[a,b] \ni \phi(t) \to K(\tau, \phi(\tau)) \in \mathrm{Lip}_\alpha[a,b] .$$

Нетрудно видеть [3], что при заданных условиях на функцию $K(\tau, u)$, оператор $\mathcal{K}$ имеет производную Фреше в каждой точке $\phi \in \mathrm{lip}_\alpha[a,b]$ и

$$[\mathcal{K}'(\phi)h](\tau) = K'_u(\tau, \phi(\tau)h(\tau), \tag{9}$$

где $h(\tau) \in \mathrm{Lip}_\alpha[a,b]$. Введем еще оператор

$$\Phi : E_1 \times \mathrm{Lip}_\alpha[a,b] \ni (\lambda, \phi) \to (I - \lambda S \mathcal{K})\phi \subset \mathrm{Lip}_\alpha[a,b] . \tag{10}$$

Здесь E_1 - пространство вещественных чисел. Уравнение (1) можно теперь записать в виде (3).

Для применения теоремы о неявной функции нам понадобится оценка величины $\|[\Phi'_\phi(\lambda, \phi)]^{-1}\|$. Из (10) получаем

$$\Phi'_\phi(\lambda, \phi) = I - \lambda S \mathcal{K}'(\phi).$$

Учитывая (9), рассмотрим уравнение

$$\Phi'_{\phi}(\lambda,\phi)h = h(t) - \lambda \int_a^b \frac{K'_u(\tau,\phi(\tau))}{\tau - t} h(\tau)d\tau = f(t), \tag{11}$$

где $f(t) \in Lip_{\alpha}[a,b]$. Оно является союзным характеристическому уравнению

$$h(t) + \lambda K'_u(t,\phi(t)) \int_a^b \frac{h(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t).$$

Подсчитаем индекс κ уравнения (11). Согласно известной теории [5], нужно подсчитать числа

$$\alpha_1 = \mathrm{Re}\left[\frac{-1}{2\pi i}\ln G(a)\right] \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\ln G(b)\right],$$

где

$$G(t) = \frac{\dfrac{i}{\pi} - \lambda K'_u(t,\phi(t))}{\dfrac{i}{\pi} + \lambda K'_u(t,\phi(t))}.$$

Так как по условиям теоремы $K(a,u) = K(b,u) = 0$, то $K'_u(a,\phi(a)) = K'_u(b,\phi(b)) = 0$, и, значит, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Отсюда получаем [5], что $\kappa = 0$.

Из этого следует [5], что уравнение (10) при любой правой части имеет единственное решение, задаваемое формулой

$$h(t) = f(t) + \frac{\lambda}{Z(t)} \int_a^b \frac{Z(\tau)K'_u(\tau,\phi(\tau))}{\tau - t} f(\tau)d\tau = [\Phi'_{\phi}]^{-1} f, \tag{12}$$

где

$$Z(t) = e^{\Gamma(t)} \sqrt{1 + \lambda^2 \pi^2 K'_u(t, \phi(t))^2}$$

(13)

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{d\tau}{\tau - t} \ln \frac{1 + i\pi\lambda K'_u(\tau, \phi(\tau))}{1 - i\pi\lambda K'_u(\tau, \phi(\tau))} .$$

Из (12) и (6) получаем ($\lambda > 0$)

$$\| [\Phi'_\phi]^{-1} f \| \leqq \| f \| + \lambda \left\| \frac{1}{Z(t)} \right\| \| \rho \| \| Z(t) \| \| K'_u(\tau, \phi(\tau)) \| \| f \| . \quad (14)$$

Из (13) и (8) оцениваем $\| Z \|$:

$$\| Z \| \leqq \| e^{\Gamma(t)} \| \, \| [1 + \pi^2 \lambda^2 K'_u(t, \phi(t))^2]^{1/2} \|$$

$$\| [1 + \pi^2 \lambda^2 K'_u(t, \phi(t))^2]^{1/2} \|_C < (1 + \pi^2 \lambda^2 k_1^2)^{1/2}$$

$$| [1 + \pi^2 \lambda^2 K'_u(t_1, \phi(t_1))]^{1/2} - [1 + \pi^2 \lambda^2 K'_u(t_2, \phi(t_2))^2]^{1/2} | =$$

$$= \left| \frac{1}{2}(1+\theta)^{-1/2}\pi^2\lambda^2[K'_u(t_1,\phi(t_1))^2 - K'_u(t_2,\phi(t_2))^2]\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2}\pi^2\lambda^2 \left| [K'_u(t_1,\phi(t_1)) + K'_u(t_2,\phi(t_2))][K'_u(t_1,\phi(t_1)) - K'_u(t_2,\phi(t_2))]\right| \leqq$$

$$\leqq \pi^2\lambda^2 k_1 k'(1+\|\phi\|_H)|\tau_1-\tau_2|^{\alpha} ..$$

где θ – число между $\pi^2\lambda^2 K'_u(t_1,\phi(t_1))$ и $\pi^2\lambda^2 K'_u(t_2,\phi(t_2))$. Следовательно,

$$\| [1+\pi^2\lambda^2 K'^2_u(t,\phi(t))^2]^{1/2} \|_H \leqq \pi^2\lambda^2 k_1 k'(1+\|\phi\|_H)$$

$$\| [1+\pi^2\lambda^2 K'_u(t,\phi(t))^2]^{1/2} \| \leqq (1+\pi^2\lambda^2 k_1^2)^{1/2} + \pi^2\lambda^2 k_1 k'(1+\|\phi\|_H).$$

Далее имеем:

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{d\tau}{\tau-t} \arg \frac{\frac{i}{\pi} - \lambda K'_u(\tau,\phi(\tau))}{\frac{i}{\pi} + \lambda K'_u(\tau,\phi(\tau))} = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\gamma(\tau)}{\tau-t}\, d\tau ,$$

где $\gamma(\tau)$ – угол, под которым виден отрезок $[-\lambda K'_u(\tau,\phi(\tau)), \lambda K'_u(\tau,\phi(\tau))]$ из точки $\frac{i}{\pi}$

$$\|\gamma\|_C \leqq \pi$$

$$|\gamma(\tau_1) - \gamma(\tau_2)| = |2\,\mathrm{arctg}\,\pi\lambda K'_u(\tau_1,\phi(\tau_1)) - 2\,\mathrm{arctg}\,\pi\lambda K'_u(\tau_2,\phi(\tau_2))| =$$

$$= \frac{2}{1+\theta^2}\pi\lambda |K'_u(\tau_1,\phi(\tau_1)) - K'_u(\tau_2,\phi(\tau_2))| \leqq 2\pi\lambda k'(1+\|\phi\|_H)|\tau_1-\tau_2|^{\alpha}$$

Здесь θ – некоторое число между $\pi\lambda K'_u(\tau_1,\phi(\tau_1))$ и $\pi\lambda K'_u(\tau_2,\phi(\tau_2))$. Отсюда

$$\|\gamma\|_H \leqq 2\pi\lambda k'(1+\|\phi\|_H),$$

$$\|\gamma\| \leqq \pi + 2\pi\lambda k')(1+\|\phi\|_H).$$

Значит,

$$\|\Gamma\| \leqq \frac{1}{2\pi}\rho\|\gamma\| \leqq \rho[\frac{1}{2}+\lambda k'(1+\|\phi\|_H)],$$

$$\|e^{\Gamma(t)}\|_C \leqq e^{\|\Gamma(t)\|_C} \leqq e^{\|\Gamma\|},$$

$$|e^{\Gamma(t_1)}-e^{\Gamma(t_2)}| = |e^{\theta}||\Gamma(t_1)-\Gamma(t_2)|,$$

где θ – число между $\Gamma(t_1)$ и $\Gamma(t_2)$,

$$|e^{\Gamma(t_1)}-e^{\Gamma(t_2)}| \leqq e^{\|\Gamma\|}q\|\Gamma\|_H|t_1-t_2|^{\alpha},$$

$$\|e^{\Gamma(t)}\|_H \leqq e^{\|\Gamma\|_C}\|\Gamma\|_H \leqq e^{\|\Gamma\|}\|\Gamma\|,$$

$$\|e^{\Gamma}\| \leqq e^{\|\Gamma\|}(1+\|\Gamma\|).$$

Таким образом,

$$\|Z\| \leqq [((1+\pi^2\lambda^2k_1^2)^{1/2} + \pi^2\lambda^2k_1k'(1+\|\phi\|_H)][1+\frac{1}{2}\rho+\rho\lambda k'(1+\|\phi\|_H)]\times$$

$$\times\exp[\frac{1}{2}\rho+\rho\lambda k'(1+\|\phi\|_H).$$

Аналогично оцениваем $\| \frac{1}{Z} \|$:

$$\| \frac{1}{Z} \| \leqq \| [1 + \pi^2 \lambda^2 K_u' (t, \phi(t))^2]^{-1/2} \| \, \| e^{-\Gamma(t)} \| ,$$

$$\| [1 + \pi^2 \lambda^2 K_u' (t, \phi(t))^2]^{-1/2} \| \leqq 1 + \pi^2 \lambda^2 k_1 (1 + \| \phi \|_H) ,$$

$$\| e^{-\Gamma} \| \leqq e^{\|\Gamma\|} (1 + \| \Gamma \|) ,$$

$$\| \frac{1}{Z} \| \leqq [1 + \pi^2 \lambda^2 k_1 (1 + \| \phi \|_H)] [1 + \frac{1}{2} \rho + \rho \lambda k_1 (1 + \|\phi\|_H)] \times$$

$$\times \exp [\frac{1}{2} \rho + \rho \lambda k_1 (1 + \| \phi \|_H)] .$$

Подставляя полученные выражения в (14), получаем

$$\| [\Phi_\phi']^{-1} \| \leqq 1 + \rho \lambda [k_1 + k' (1 + \| \phi \|_H)] [1 + \pi^2 \lambda^2 k_1 (1 + \| \phi \|_H)] \times$$

$$\times [(1 + \pi^2 \lambda^2 k_1^2)^{1/2} + \pi^2 \lambda^2 k_1 k' (1 + \| \phi \|_H)] [1 + \frac{\rho}{2} + \rho \lambda k' (1 + \|\phi\|_H)]^2 \times \tag{15}$$

$$\times \exp \rho [1 + 2 \lambda k' (1 + \| \phi \|_H)] = N(\lambda, \|\phi\|_H) .$$

Оценим теперь выражение

$$\| \Phi_\phi' (\lambda, \phi) - \Phi_\phi' (\lambda_0, \phi_0) \| \leqq \| \Phi_\phi' (\lambda, \phi) - \Phi_\phi' (\lambda_0, \phi) \| + \| \Phi_\phi' (\lambda_0, \phi) - \Phi_\phi' (\lambda_0, \phi_0) \| ,$$

где $\phi, \phi_0 \in \mathrm{Lip}_\alpha [a, b]$; $\lambda, \lambda_0 > 0$.

$$\| \Phi'_\phi(\lambda, \phi) - \Phi'_\phi(\lambda_0, \phi) \| = \sup_{\|h\|=1} \| (\lambda - \lambda_0) \int_a^b \frac{K'_u(\tau, \phi(\tau))}{\tau - t} h(\tau)\, d\tau \| \leqq$$

$$\leqq \rho\, |\lambda - \lambda_0|\, [k_1 + k'(1 + \|\phi\|_H)]$$

$$\| \Phi'_\phi(\lambda_0, \phi) - \Phi'_\phi(\lambda_0, \phi_0) \| = \sup_{\|h\|=1} \| \lambda_0 \int_a^b \frac{K'_u(\tau, \phi(\tau)) - K'_u(\tau, \phi_0(\tau))}{\tau - t} h(\tau) d\tau \| \leqq$$

$$< \rho\, \lambda_0 \| K'_u(\tau, \phi(\tau)) - K'_u(\tau, \phi_0(\tau)) \| .$$

Имеем

$$K'_u(\tau, \phi(\tau)) - K'_u(\tau, \phi_0(\tau) = K''_{uu}(\tau, \xi(\phi(\tau), \phi_0(\tau)))\, (\phi(\tau) - \phi_0(\tau)) \ , \tag{16}$$

где величина $\xi(\phi(\tau), \phi_0(\tau))$ находится между $\phi(\tau)$ и $\phi_0(\tau)$.

Докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть функция $g(x)$ дважды дифференцируема и $0 < m_1 < |g''(x)| < m_2$. Пусть

$$g(x_1) - g(x_2) = g'(\xi(x_1, x_2)(x_1 - x_2) \qquad x_1 \neq x_2 .$$

Тогда $\xi(x_1, x_2)$ имеет ограниченные производные.

Доказательство леммы. Будем рассматривать $\xi(x_1, x_2)$ как неявную функцию, определенную из уравнения

$$\Phi(x_1, x_2, \xi) = g'(\xi)(x_1 - x_2) - g(x_1) + g(x_2) = 0 .$$

Так как $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi} = g''(\xi)(x_1 - x_2) \neq 0$ при $x_1 \neq x_2$ и существуют непрерывные производные

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = g'(\xi) - g'(x_1), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} = -g'(\xi) + g'(x_2),$$

то, согласно теореме о неявной функции /3/, существуют производные $\dfrac{\partial\xi}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial\xi}{\partial x_2}$. При этом

$$\frac{\partial\xi}{\partial x_1} = \frac{g'(x_1) - g'(\xi(x_1 x_2))}{g''(\xi(x_1, x_2))(x_1 - x_2)}$$

Отсюда, учитывая условия леммы, получаем

$$\left|\frac{\partial\xi}{\partial x_1}\right| < \frac{m_2}{m_1} .$$

Аналогично оценивается $\dfrac{\partial\xi}{\partial x_2}$. Лемма доказана.

Применяя эту лемму к функции $K'_u(\tau, \phi(\tau))$, получаем, что функция $\xi(\ldots)$ из (16) имеет производные ограниченные константой $\dfrac{k_4}{k_3}$. Далее имеем

$$|K''_{u^2}(\tau_1, \xi(\phi(\tau_1), \phi_0(\tau_1))) - K''_{u^2}(\tau_2, \xi(\phi(\tau_2), \phi_0(\tau_2)))| \leqq$$

$$\leqq k''(|\tau_1 - \tau_2|^\alpha + |\xi(\phi(\tau_1), \phi_0(\tau_1)) - \xi(\phi(\tau_2), \phi_0(\tau_2)))|) \leqq$$

$$\leqq k''[|\tau_1 - \tau_2|^\alpha + \frac{k_4}{k_3}(|\phi(\tau_1) - \phi(\tau_2)| + |\phi_0(\tau_1) - \phi_0(\tau_2)|] \leqq$$

$$\leqq k''[1 + \frac{k_4}{k_3}(||\phi||_H + ||\phi_0||_H)]|\tau_1 - \tau_2|^\alpha .$$

Таким образом, функция $K''_{u^2}(\tau,\xi(\phi(\tau),\phi_0(\tau)))$ тоже удовлетворяет условию Гьолдера и

$$||K''_{u^2}(\tau,\xi(\phi(\tau),\phi_0(\tau)))||_H \leqq k''[1+\frac{k_4}{k_3}(||\phi||_H+||\phi_0||_H)].$$

Кроме того из условий теоремы имеем

$$||K''_{u^2}(\tau,\xi(\phi(\tau),\phi_0(\tau)))||_C \leqq k_2 .$$

Подставляя полученную оценку в (16), получаем

$$||K'_u(\tau,\phi(\tau))-K'_u(\tau,\phi_0(\tau))|| \leqq ||K''_{u^2}(\tau,\xi(\phi(\tau),\phi_0(\tau)))||\,||\phi-\phi_0|| \leqq$$

$$< \{k_2+k''[1+\frac{k_4}{k_3}(||\phi||+||\phi_0||_H)]\}\,||\phi-\phi_0|| .$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\begin{aligned} ||\Phi'_\phi(\lambda,\phi)-\Phi'_\phi(\lambda_0,\phi_0)|| &\leqq \rho\,|\lambda-\lambda_0|\,[k_1+k'(1+||\phi||_H)]+ \\ &+\rho\lambda_0||\phi-\phi_0||\{k_2+k''[1+\frac{k_4}{k_3}(||\phi||_H+||\phi_0||_H)]\} = \\ &= |\lambda-\lambda_0|\,M_1(||\phi||_H)+||\phi-\phi_0||M_2(\lambda_0,||\phi_0||_H,||\phi||_H). \end{aligned} \tag{17}$$

Нам понадобится еще оценка величины $||\Phi(\lambda,\phi_0)||$, где $\phi_0 \in \mathrm{Lip}_\alpha[a,b]$, $\Phi(\lambda_0,\phi_0)=0$. Имеем

$$||\Phi(\lambda,\phi_0)|| = ||\Phi(\lambda,\phi_0)-\Phi(\lambda_0,\phi_0)|| = \Phi'_\lambda(\xi,\phi_0)(\lambda-\lambda_0)|| \leqq$$

$$\leqq |\lambda-\lambda_0|\,||\Phi'_\lambda(\xi,\phi_0)|| .$$

Из (10) получаем

$$\Phi'_\lambda(\xi,\phi_0): E_1 \ni \nu \to -\nu \int_a^b \frac{K(\tau,\phi_0(\tau))}{\tau - t} d\tau \in \mathrm{Lip}_\alpha[a,b]$$

$$||\Phi'_\lambda(\xi,\phi_0)|| \leqq \rho\, ||K(\tau,\phi_0(\tau))|| \leqq \rho\,[k_0 + k(1+||\phi_0||_H)].$$

Таким образом,

$$||\Phi(\lambda,\phi_0)|| < \rho\,|\lambda-\lambda_0|\,[k_0 + k(1+||\phi_0||_H)] = |\lambda-\lambda_0|\,M_3(||\phi_0||_H). \quad (18)$$

Применим теперь теорему о неявных функциях к уравнению (3). Пусть при $\lambda = \lambda_0 > 0$ уравнение (3) имеет решение $\phi_0(\tau) \in \mathrm{Lip}_\alpha[a,b]$.

Определим константы δ и ϵ следующим образом: обозначим

$$M'_1(||\phi_0||_H) = M_1(||\phi_0||_H + 1) = \rho\,[k_1 + k'(2 + ||\phi_0||_H)]$$

$$M'_2(\lambda_0 ||\phi_0||_H) = M_2(\lambda_0, ||\phi_0||_H, ||\phi_0||_H + 1) = \quad (19)$$

$$= \rho\,\lambda_0 \{k_2 + k''[1 + \frac{k_4}{k_3}(1 + 2||\phi_0||_H)]\}.$$

Тогда

$$\delta = \delta(\lambda_0, ||\phi_0||) = \frac{1}{2N(\lambda_0, ||\phi_0||)[M'_1(||\phi_0||) + 2N(\lambda_0, ||\phi_0||)M'_2(\lambda_0, ||\phi_0||)M_3(||\phi_0||)]}$$

$$\epsilon=\epsilon(\lambda_0 ||\phi_0||)=\min\left\{1, \frac{1}{M_1'(||\phi\ || + 2N(\lambda_0, ||\phi_0||)M_2'(\lambda_0, ||\phi_0||)M_3\ (||\phi_0||)}\right\} \qquad (20)$$

Нетрудно видеть, что при таком определении δ и ϵ выполнены условия (4) и (5) теоремы о неявной функции. Действительно, пусть $|\lambda-\lambda_0|<\delta$, $||\phi-\phi_0||<\epsilon$. Тогда

$$||[\Phi'_{\phi}(\lambda_0,\phi_0)]\ \ [\Phi'_{\phi}(\lambda,\phi)-\Phi'_{\phi}(\lambda_0,\phi_0)]|| \leq$$

$$\leq N(\lambda_0, ||\phi_0||)[\delta M_1(||\phi||)+\epsilon M_2(\lambda_0, ||\phi_0||, ||\phi||)].$$

Так как

$$||\phi||-||\phi_0|| \leq ||\phi-\phi_0|| < \epsilon,$$

то

$$||\phi|| \leq ||\phi_0|| + \epsilon \leq ||\phi_0|| + 1.$$

Тогда

$$M_1(||\phi||) \leq M_1(||\phi_0|| + 1) = M_1'(||\phi_0||),$$

$$M_2(\lambda_0, ||\phi_0||, ||\phi||) \leq M_2(\lambda_0, ||\phi_0||, ||\phi_0|| + 1) = M_2'(\lambda_0, ||\phi_0||).$$

Следовательно,

$$\|[\Phi'_{\phi}(\lambda_0,\phi_0)]^{-1}[\Phi'_{\phi}(\lambda,\phi)-\Phi'_{\phi}(\lambda_0,\phi_0)]\| \leqq$$

$$\leqq N(\lambda_0,\|\phi_0\|)[\delta M'_1(\|\phi_0\|)+\epsilon M'_2(\lambda_0,\|\phi_0\|)] \leqq \frac{1}{2}.$$

Таким образом, условие (4) выполнено. Аналогично проверяется условие (5).

Из теоремы о неявной функции следует, что при $\lambda = \lambda_0 + \delta = \lambda_1$, уравнение (3) имеет решение ϕ_1. При этом $\|\phi_1 - \phi_0\| \leqq \epsilon$. Аналогично построим числа

$$
\begin{aligned}
&\lambda_2 = \lambda_1 + \delta(\lambda_1, \|\phi_1\|)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda_n = \lambda_{n-1} + \delta(\lambda_{n-1}, \|\phi_{n-1}\|)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{21}
$$

и соответствующие решения уравнения (3) – $\phi_2, \dots, \phi_n, \dots$. При этом

$$
\begin{aligned}
&\|\phi_2\| - \|\phi_1\| \leqq \|\phi_2 - \phi_1\| < \epsilon(\lambda_1, \|\phi_1\|)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\|\phi_n\| - \|\phi_{n-1}\| \leqq \|\phi_n - \phi_{n-1}\| < \epsilon(\lambda_{n-1}, \|\phi_{n-1}\|).\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Так как $[\Phi'_{\phi}(\lambda,\phi)]^{-1}$ существует при любом λ и ϕ, то последовательность λ_n бесконечна. Пусть Λ ее предел. Если $\Lambda = \infty$, то уравнение (3) имеет решение при любом $\lambda > \lambda_0$. Предположим, что $\Lambda < \infty$. Если последовательность $\|\phi_n\|$ ограничена, то из (20) и (21) видно, что числа $\lambda_n - \lambda_{n-1} = \delta(\lambda_{n-1}, \|\phi_n\|)$ ограничены снизу положительной константой и, значит, $\lambda_n \to \infty$, что противоречит предположению. Следовательно, последовательность $\|\phi_n\|$ неограничена. Выберем монотонную подпоследовательность $\|\phi_{n_m}\| \to \infty$ следующим образом: $\|\phi_{n_1}\| = \|\phi_1\|$; если определено $\|\phi_{n_m}\|$, то $\|\phi_{n_{m+1}}\|$ определяем как первое из чисел $\|\phi_n\|$ с $n > n_m$, для которого $\|\phi_n\| \geqq \|\phi_{n_m}\|$. Обозначим $\lambda_{n_m} = \theta_m$, $\|\phi_{n_m}\| = \xi_m$. Как видно из (15), (18), (19), (20), при достаточно больших m справедливы неравенства:

$$\theta_{m+1} - \theta_m \geqq \lambda_{n_{m+1}} - \lambda_{n_{m+1}-1} \geqq e^{-(1+\beta)4\rho k'\theta_m \xi_m} \geqq$$

$$\geqq e^{-(1+\beta)4\rho k'\Lambda \xi_m} \tag{23}$$

$$\xi_{m+1} - \xi_m \leqq \|\phi_{n_{m+1}}\| - \|\phi_{n_{m+1}-1}\| \leqq \|\phi_{n_{m+1}} - \phi_{n_{m+1}-1}\| \leqq$$

$$< \epsilon(\lambda_{n_{m+1}-1}, \|\phi_{n_{m+1}-1}\|) \leqq e^{-(1-\beta)2\rho k'\theta_0 \xi_{m+1}}, \tag{24}$$

где β – произвольное малое положительное число.

Из (24) получаем

$$e^{R\xi_{m+1}}(\xi_{m+1} - \xi_m) \leqq 1, \quad R = (1-\beta)2\rho k'\theta_0 > 0. \tag{25}$$

Рассмотрим функцию $\xi(x)$, , определенную для $x \geqq 0$, непрерывно дифференцируемую, монотонную, принимающую значения ξ_m при $x = m$ и такую, что

$$C_1(\xi_{m+1} - \xi_m) \leqq \xi'(m+\mu) \leqq C_2(\xi_{m+1} - \xi_m)$$

для $0 < \mu < 1$. Это возможно, так как последовательность $\xi_{m+1} - \xi_m$ ограничена, как видно из (25). Имеем

$$e^{R\xi_{m+1}} - e^{R\xi_m} = R\, e^{R(\xi_m+\mu)}\ \xi'(m+\mu) \leqq C_2 R e^{R\xi_{m+1}}\ (\xi_{m+1} - \xi_m).$$

Отсюда и из (25) получаем

$$\frac{1}{C_2 R}\left(e^{R\xi_{m+1}} - e^{R\xi_m}\right) \leqq 1. \tag{26}$$

Возьмем неравенства (26) при $m = 0, \ldots, n-1$ и сложим их. Получаем

$$\frac{1}{C_2 R}\left(e^{R\xi_n} - e^{R\xi_0}\right) \leqq n$$

и отсюда

$$\xi_n \leqq \frac{1}{R}\ln\left(e^{R\xi_0} + C_2 R n\right) = \frac{1}{R}\ln n + \frac{1}{R}\ln\left(C_2 R + \frac{e^{R\xi_0}}{n}\right) \leqq \frac{1}{R}\ln n + C_3, \tag{27}$$

где

$$C_3 = \frac{1}{R} \ln(C_2 R + 1).$$

Подставляя ξ_m из (27) в (23), получаем:

$$\theta_{m+1} - \theta_m \geqq A e^{-R_1 \ln m} \geqq A(m+1)^{-R_1}, \tag{28}$$

где

$$R_1 = (1+\beta)4\rho k'\Lambda \frac{1}{R} = \frac{1+\beta}{1-\beta}\frac{2\Lambda}{\theta_0} > 0,\ A = e^{-(1+\beta)4\rho k'\Lambda C_3} = e^{-\frac{1+\beta}{1-\beta}\frac{2\Lambda}{\theta_0}\ln(1+C_2 R)} \tag{29}$$

Очевидно $R_1 > 1$. Тогда

$$(m+2)^{-R_1+1} - (m+1)^{-R_1+1} = (-R_1+1)(m+1+\mu)^{-R_1} \geqq (-R_1+1)(m+1)^{-R_1}$$

$$0 < \mu < 1.$$

Отсюда

$$(m+1)^{-R_1} > \frac{1}{R_1-1}[(m+1)^{-R_1+1} - (m+2)^{-R_1+1}]. \tag{30}$$

Из (28) и (30) получаем

$$\theta_{m+1} - \theta_m \geqq \frac{A}{R_1 - 1} [(m+1)^{-R_1+1} - (m+2)^{-R_1+1}] . \qquad (31)$$

Складывая неравенства (31) при $m = 0, \ldots, n-1$, получаем

$$\theta_n - \theta_0 > \frac{A}{R_1 - 1} [1 - (n+1)^{-R_1+1}] .$$

В пределе при $n \to \infty$ имеем

$$\Lambda - \theta_0 \geqq \frac{A}{R_1 - 1} .$$

Подставляя сюда A и R_1 из (29) и устремляя β к нулю, получаем

$$\Lambda - \theta_0 \geqq \frac{e^{-\frac{2\Lambda}{\theta_0} \ln(1 + 2C_2 \rho k' \theta_0)}}{\frac{2\Lambda}{\theta_0} - 1} . \qquad (32)$$

Обозначим $\frac{\Lambda}{\theta_0} = \eta$. Тогда, если $\theta_0 > \delta > 0$, из (32) получаем:

$$(\eta - 1)(2\eta - 1) \geqq C_4 (C_4 \theta_0)^{-(2\eta+1)} , \qquad (33)$$

где

$$C_4 = 2 C_2 \rho k' + \frac{1}{8} . \qquad (34)$$

Рассмотрим уравнение

$$(\eta-1)(2\eta-1) - C_4(C_4\theta_0)^{-(2\eta+1)} = 0 . \tag{35}$$

Из (35) получаем

$$\zeta_0 = \ln(C_4\theta_0) = -\frac{1}{2\eta+1}\ln\frac{(\eta-1)(2\eta-1)}{C_4} . \tag{36}$$

Нетрудно видеть, что функция (36) имеет график, показанный на рис. 1. Так как $\theta_0 > \delta$, то из (34) следует, что $\zeta_0 = \ln(C_4\theta_0) > 0$ и теперь из рис. 1 видно, что уравнение (36), соответственно (35), имеет единственное решение относительно η и определяет убывающую функцию $\eta(\theta_0)$. При этом $\eta(\theta_0) > 1$. Из (33) следует, что $\eta \geqq \eta(\theta_0)$. Так как $\eta(\theta_0)$ убывает, то $\eta(\theta_0) < \eta(\delta)$.

Отсюда и из (35) следует, что если C – константа такая, что $C_5 \geqq 2\eta(\delta) + 1$, то

$$[\eta(\theta_0) - 1][2\eta(\theta_0) - 1] \geqq C_4(C_4\theta_0)^{-C_5} . \tag{37}$$

Выберем константу C_5 так, чтобы она удовлетворяла еще неравенству

$$C_5 \geqq \frac{\ln(8C_4)}{\ln(1 + 2C_2\rho k'\delta)} . \tag{38}$$

Из (37), учитывая $\eta(\theta_0) > 0$, имеем:

$$\eta(\theta_0) \geqq \frac{3 + \sqrt{1 + 8C_4(C_4\theta\ )^{-C_5}}}{4}. \qquad (39)$$

Ввиду (38) и (34) имеем: $8C_4(C_4\theta_0)^{-C_5} < 1$. Развивая в ряд бином в (39) и ограничиваясь первыми тремя членами, получаем

$$\eta(\theta_0) > 1 + C_4(C_4\theta_0)^{-C_5} - 2C_4(C_4\theta_0)^{-2C_5}$$

$$\eta(\theta_0) - 1 > C_4^{1-C_5}\theta_0^{-C_5}[1 \quad -2C_4(C_4\theta_0)^{-C_5}] >$$

$$> \frac{3}{4}C_4^{1-C_5}\theta_0^{-C_5} = C_6\theta_0^{-C_5}.$$

Так как $\eta \geqq \eta(\theta_0)$, то

$$\eta - 1 > C_6\,\theta_0^{-C_5},$$

т.е.

$$\Lambda - \theta_0 > C_6\,\theta_0^{-C_5+1}.$$

Итак, мы доказали, что если уравнение (3) имеет решение при $\lambda = \theta_0$, то оно имеет решение при всех λ; $\lambda_0 < \lambda < \Lambda$ и, в частности, при $\lambda = \theta_0 + C_6\theta_0^{-C_5+1} = \theta_1^*$. Применяя этот результат еще раз с θ_1^* вместо θ_0, получаем, что уравнение имеет решение при $\lambda = \theta_1^* + C_6\,\theta_1^{*\,-C_5+1} = \theta_2^*$ и т.д. Таким образом, получаем возрастающую последовательность

$$\theta^*_{m+1} = \theta^*_m + C_6 \theta^{*\,-C_5+1}_m . \tag{40}$$

При этом уравнение (3) имеет решение при любом λ, меньшем некоторого θ^*_m. Из (40) имеем

$$\theta^{*\,C_5-1}_m (\theta^*_{m+1} - \theta^*_m) = C_6 . \tag{41}$$

Рассуждая аналогично тому, как мы это делаем для последовательности $\xi_{.m}$ и соотношения (26), получим

$$\theta^{C_5}_{m+1} - \theta^{*\,C_5}_m \geqq C_5 C_7 \theta^{*\,C_5-1}_m (\theta^*_{m+1} - \theta^*_m) = C_5 C_7 C_6 = C_8 ,$$

где C_7, C_8 - константы. Суммируя последние неравенства, получаем

$$\theta^*_n \geqq (\theta_0^{C_5} + C_8 n)^{\frac{1}{C_5}} .$$

Это показывает, что θ^*_n растет неограниченно.

Итак, мы доказали, что если уравнение (1) имеет решение из $\mathrm{Lip}_\alpha [a,b]$ при $\lambda = \lambda_0 > 0$, то оно имеет решение из $\mathrm{Lip}_\alpha [a,b]$ при любом $\lambda > \lambda_0$. Существование решения уравнения (1) для малых значений λ доказано в /1/. Теорема 2 доказана.

Литература

1. А.И.Гусейнов. Изв. Акад. Наук СССР, сер. мат. 12 (1948), 193-212.
2. W.Pogorzelski. Integral equations and their applications, vol 1. Pergamon Press, 1966.
3. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, Москва 1959.
4. Л.А.Люстерник, В.И.Соболев. Элементы функционального анализа, Изд. "Наука", Москва 1965.
5. Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, Москва, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 мая 1969 года.