ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5 - 4352

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.М.Мальцев

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ВЕС ПРОИЗВОЛЬНОЙ КВАРКОВОЙ СИСТЕМЫ

1969

P5 - 4352

В.М.Мальцев

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ВЕС ПРОИЗВОЛЬНОЙ КВАРКОВОЙ СИСТЕМЫ

Направлено в ЯФ

Расчет статистических весов многочастичных состояний в $SU(3)$-групповом подходе – трудная задача. Вычислительные трудности резко нарастают с увеличением числа частиц и для состояний с шестью и более частицами становятся практически неразрешимыми. Это обстоятельство заставило нас отказаться от традиционных методов расчета и принять путь, использованный Церулусом /1/ для вычисления аналогичных величин в группе $SU(2)$.

Как важный частный случай, демонстрирующий предлагаемый метод, рассмотрим произвольную кварковую систему. Такие состояния реализуются, например, в аддитивной кварковой модели для неупругих взаимодействий /2/, где адроны конечного состояния формируются из очень большого числа кварков и антикварков. В этой модели приходится вычислять проекции состояний, содержащих прямые произведения огромного числа триплетов и антитриплетов. Вычисления все более усложняются с ростом энергии (увеличением числа "рожденных" кварков и антикварков), так что при достаточно высоких энергиях обычные методы расчета оказываются неэффективными.

Реальный путь решения задачи заключается в том, чтобы для статистического веса состояния, содержащего произвольное число триплетов и антитриплетов, построить замкнутое выражение. Первый шаг на этом пути состоит в параметризации рассматриваемой группы.

Известно, что n-мерные унитарные группы и группы вращения являются параметрическими группами /3/, каждый элемент которых есть действительная матрица. Эта матрица в данном параметрическом пространстве является непрерывно-дифференцируемой функцией действительных параметрических матриц. В классе унитарных групп и групп вращения параметрическое пространство является замкнутым, ограниченным и связанным.

Для n-мерной унимодулярной унитарной группы элементами соответствующей параметрической группы являются действительные и мнимые части элементов любой n-мерной унимодулярной унитарной матрицы, расположенные в любом порядке, так что размерность параметрической группы равна n^2-1.

Следовательно, в рассматриваемом нами случае трехмерная унимодулярная унитарная группа является 8-параметрической. Типичным элементом ее является 8-параметрическое выражение

$$U(g)=d(\delta_1,\delta_2)\,U_{23}(\phi_2,\sigma_3)\,U_{12}(\theta_1,\sigma_2)\,U_{13}(\phi_1,\sigma_1), \tag{1}$$

где

$$d(\delta_1,\delta_2)=\begin{pmatrix} e^{i\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\delta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\delta_1+\delta_2)} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

и U_{ij} – трехмерные унимодулярные унитарные матрицы. Преобразование $U_{12}(\theta_1,\sigma_2)$ в матричной записи имеет вид

$$U_{12}(\theta_1,\sigma_2)=\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -e^{-i\sigma_2}\sin\theta_1 & 0 \\ e^{i\sigma_2}\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

а преобразования $U_{13}(\phi_1,\sigma_1)$ и $U_{23}(\phi_2,\sigma_3)$ удобно выразить через U_{12} следующим образом:

$$U_{13}(\phi_1,\sigma_1)=(2,3)\,U_{12}(\phi_1,\sigma_1)(2,3), \tag{4}$$

$$U_{23}(\phi_2,\sigma_3)=(1,2)(2,3)\,U_{12}(\phi_2,\sigma_3)(2,3)(1,2). \tag{5}$$

Матрицы (1,2) и (2,3), выполняющие в соотношениях (4) и (5) перестановки, равны

$$(1,2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Из восьми параметров, входящих в выражение (1), три: ϕ_1, θ_1, ϕ_2 имеют смысл полярных углов, оставшиеся пять: δ_1, δ_2, σ_1, σ_2, σ_3 могут быть отождествлены с азимутальными углами.

Поскольку общий элемент группы (1) записан в виде нескольких сомножителей, для нахождения его неприводимого представления достаточно знать, как выглядят матрицы, соответствующие каждому из сомножителей.

С этой целью воспользуемся записью состояний в схеме Гельфанда /4/

$$\left|\begin{matrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ p & q & \\ r & & \end{matrix}\right\rangle, \qquad \begin{matrix} h_1 \geq p \geq h_2 \geq q \geq h_3, \\ p \geq r \geq q \end{matrix} \tag{7}$$

Верхняя строка в (7) для $h_3=0$ соответствует единственному $SU(3)$-неприводимому представлению $[h_1 h_2 0]$. Строки $[pq]$ и $[r]$ отвечают неприводимым представлениям подгруппы $U(2)$ и $U(1)$ группы $SU(3)$.

С физической точки зрения представляют интерес такие матричные элементы от полного преобразования $U(g)$, которые являются диагональными по h_1 и h_2 и по внутренним состояниям мультиплета. По аналогии с соответствующими величинами в группе $U(2)$ будем называть их диагональными $D^{[h_1 h_2 0]}_{\ell,\ell}(g)$ -функциями, где индекс ℓ пробегает по всем состояниям мультиплета $[h_1 h_2 0]$.

Техника вычисления, развитая Чакон и Мошинским /5/, позволяет записать диагональные триплетные $D^{[100]}_{\ell,\ell}(g)$ -функции в виде

$$D^{[100]}_{p,p}(g) = e^{i\delta_1}\cos\theta_1 \cos\phi_1 ,$$

$$D^{[100]}_{n,n}(g) = e^{i\delta_2}\cos\theta_1 \cos\phi_2 , \tag{8}$$

$$D^{[100]}_{\lambda,\lambda}(g) = e^{-i(\delta_1+\delta_2)}[\cos\phi_1\cos\phi_2 - e^{i(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1)}\sin\theta_1 \sin\phi_1 \sin\phi_2].$$

Соответствующие $D^{[110]}_{\ell,\ell}(g)$ -функции для антитриплета равны

$$D^{[110]}_{\bar p,\bar p}(g) = D^{*[100]}_{p,p}(g);\quad D^{[110]}_{\bar n,\bar n}(g) = D^{*[100]}_{n,n}(g);$$

$$D^{[110]}_{\bar\lambda,\bar\lambda}(g) = D^{*[100]}_{\lambda,\lambda}(g) . \tag{9}$$

Выражения (8), (9) дают возможность определить характер триплетного и антитриплетного представлений

$$\chi^{[100]}(g) = e^{i\delta_1}\cos\theta_1\cos\phi_1 + e^{i\delta_2}\cos\theta_1\cos\phi_2 + e^{-i(\delta_1+\delta_2)}(\cos\phi_1\cos\phi_2 - e^{i(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1)}\sin\theta_1 \sin\phi_1\sin\phi_2), \tag{10}$$

и

$$\chi^{[110]}(g) = \chi^{*[100]}(g) = \chi^* . \tag{11}$$

Зная характер элементарного представления - триплета, и замечая, что характер суммы представлений равен сумме характеров, а прямого произведения - произведению, легко найти характер любого интересующего нас представления, например,

$$\chi^{[200]} = \chi^2 - \chi^*,$$

$$\chi^{[220]} = (\chi^*)^2 - \chi, \tag{12}$$

$$\chi^{[210]} = \chi\cdot\chi^* - 1 \quad \text{и т.д.}$$

Наконец, методом Мурнагана /3/ можно вычислить элемент объема группы dg, который равен

$$dg = \sin 2\theta_1 \cdot \cos^2\theta_1 \cdot \sin 2\phi_1 \cdot \sin 2\phi_2\, d\phi_1\, d\theta_1\, d\phi_2\, d\delta_1\, d\delta_2\, d\sigma_1\, d\sigma_2\, d\sigma_3 . \tag{13}$$

Полученные выражения для элемента объема группы, характеров и триплетных диагональных $D^{[100]}_{\ell,\ell}(g)$ -функций позволяют написать для статистического веса состояния, содержащего произвольное число кварков и антикварков, замкнутое выражение.

Статистический вес состояния, содержащего только кварки и антикварки, равен квадрату проекции вектора A, являющегося прямым произведением соответствующего числа триплетов и антитриплетов под подпространство, преобразующееся по неприводимому представлению $[h_1 h_2 0]$. Эта величина равна

$$|\langle[h_1 h_2 0]|A\rangle|^2 = \langle A|\hat P^{[h_1 h_2 0]}|A\rangle, \tag{14}$$

где оператор $\hat P^{[h_1 h_2 0]}(g)$ имеет вид

$$\hat P^{[h_1 h_2 0]}(g) = N^{[h_1 h_2 0]}\int \chi^{*[h_1 h_2 0]}(g)\hat D(g)\,dg \tag{15}$$

и проектирует векторы подпространства, в котором действуют операторы $\hat D(g)$, на подпространство, преобразующееся по неприводимому представлению $[h_1 h_2 0]$. Размерность представления равна $N^{[h_1 h_2 0]}$.

Подставляя (15) в (14), получаем окончательный результат

$$
|<[h_1 h_2 0]|\,A\,>|^2 = N^{[h_1 h_2 0]} \int dg\, \chi^{*\,[h_1 h_2 0]}(g)\, D^{[100]}_{\alpha_1,\alpha_1}(g) \ldots
$$

$$
\ldots D^{[100]}_{\alpha_m,\alpha_m}(g)\, D^{[110]}_{\beta_1,\beta_1}(g) \ldots D^{[110]}_{\beta_n,\beta_n}(g), \tag{16}
$$

где

$$
\alpha_i = (p, n, \lambda), \quad \text{a} \quad \beta_j = (\bar{p}, \bar{n}, \bar{\lambda}).
$$

Соотношение (16) сводит расчет статистического веса произвольной системы кварков и антикварков к вычислению восьмимерного интеграла по параметрическому пространству трехмерной унимодулярной унитарной группы.

За обсуждение затронутых здесь вопросов автор благодарен В.С. Барашенкову и участникам руководимого им семинара.

Литература

1. F.Cerulus, Nuovo Cim., 19, 528 (1961).
2. H.Satz. Phys. Lett., 25B, 220 (1967).
3. F.D.Murnaghan, The Unitary and Rotation Groups, Spartan Books, Washington (1962).
4. И.М. Гельфанд, М.Л. Цейтлин. ДАН СССР, 71, 825 (1950).
5. E.Chacon, M.Moshinsky, Phys. Lett., 23, 567 (1966).

Рукопись поступила в издательский отдел
11 марта 1969 года.