ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5 - 4338

Е.П.Жидков, Г.А.Ососков

ОБ ОДНОМ РАЗНОСТНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

1969

Р5 - 4338

Е.П.Жидков, Г.А.Ососков

ОБ ОДНОМ РАЗНОСТНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Направлено в журнал
"Математические заметки".

В работе /I/ рассматривалось нелинейное интегральное уравнение вида

$$Au(x) \equiv u(x) - \int_a^b f(x, \xi, u(\xi))\, d\xi = 0 . \qquad \text{(I)}$$

В пространстве Липшица $C^{(L)}_{(a,b)}$ методом введения непрерывного параметра t уравнение (I) приводилось к интегро-дифференциальной системе, линейной при фиксированном t. В предположении существования $u^*(x)$ – локализуемого решения уравнения (I) – доказано, что решение такой системы при $t \to \infty$ стабилизируется к $u^*(x)$. Для решения полученной системы предлагалась разностная схема, являющаяся реализацией метода ломаных Эйлера для операторного уравнения.

В настоящей работе переход к разностной аппроксимации исходного уравнения (I) осуществляется еще до введения непрерывного параметра t, а потом для решения получившейся нелинейной системы алгебраических уравнений используется тот же непрерывный аналог метода Ньютона, что и в /I/. Дискретизируя t, можно получить численную схему, совпадающую с численной схемой работы /I/. Однако подход, предлагаемый здесь, при выполнении условий теоремы, доказанной в работе /I/, позволяет доказать существование решения полученной разностной схемы и сходимость полученного в результате ее реализации решения к решению уравнения (I) при стремящихся к нулю шагах по переменным x и t, независимо от соотношения между этими шагами.

Возьмем целое положительное N и разобьем отрезок (a, b) на N равных отрезков длины $h=(b-a)/N$. С любой функцией $u(x)$ пространства Липшица $C^{(L)}_{(a,b)}$ (т.е. подпространства пространства $C_{(a,b)}$ непрерывных на (a,b) функций, удовлетворяющих дополнительно условию Липшица) может быть сопоставлено $N+1$ число:

$$u_0=u(a),\ u_1=u(a+h),\dots,u_k=u(a+kh),\dots u_N=u(b). \quad (2)$$

Будем рассматривать эти числа как координаты вектора $\bar{u}_h(u_0,u_1,\dots u_N)$, который мы будем называть сеточным образом функции $u(x)$. Для краткости обозначений индекс h векторов $\bar{u}_h$ мы можем в дальнейшем опустить, не забывая, однако, о возрастании размерности векторов $\bar{u}$ с уменьшением h.

В $N+1$ - мерном векторном пространстве U_h введем норму

$$\|\bar{u}\|=\max_k|u_k|+\max\left|\frac{u_{k+1}-u_k}{h}\right|. \quad (3)$$

Нетрудно показать, что U_h с нормой (3) будет B - пространством.

Если заменить интеграл в (I) суммой, соответствующей точкам деления $a, a+h,\dots a+kh,\dots,b$, мы придем к нелинейной системе из $(N+1)$-го алгебраического уравнения относительно $N+1$-ой неизвестной компоненты вектора $\bar{u}$

$$\begin{cases} u_0-h\sum\limits_{k=1}^{N}f(a,a+kh,u_k)=0\\ u_1-h\sum\limits_{k=1}^{N}f(a+h,a+kh,u_k)=0\\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\\ u_N-h\sum\limits_{k=1}^{N}f(b,a+kh,u_k)=0\ . \end{cases} \quad (4)$$

Эта система, являющаяся разностным аналогом уравнения (I), определяет в U_h операторное уравнение

$$B_h(\bar{u})=0. \quad (4')$$

Оператор $B_h(\bar{u})$ переводит векторы $\bar{u}$ в векторы того же вида с нормой (3), т.е. отображает пространство U_h в себя.

Для решения (4′) воспользуемся непрерывным аналогом метода Ньютона /2/. Будем считать компоненты вектора $\bar{u}$ непрерывно дифференцируемыми функциями параметра t, т.е. перейдем в пространство $V=U_h\times[0,\infty]$.

В пространстве V рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения

$$\frac{d\bar{u}(t)}{dt}=[B_h']^{-1}B_h\bar{u}(t),\ \bar{u}(0)=\bar{u}_0\ . \quad (5)$$

Далее мы докажем, что если h достаточно мало и выполнены условия теоремы (I) из работы /I/, то для краевой задачи (5) будут справедливы требования теоремы (I) работы /2/.

Приведем содержание этой теоремы.

Решается уравнение, $\varphi(x)=0$, где $y=\varphi(x)$ — оператор, переводящий пространство Банаха X в пространство Банаха Y.

Теорема I(см. /2/). Пусть в сфере $\|x-x_0\|<K\|\varphi(x_0)\|$ (*) существует производная Фреше $\varphi'(x)$ и линейная производная Гато $\varphi''(x)$, причем линейный оператор $\varphi'(x)$ имеет обратный $\varphi'(x)^{-1}$, для которого выполнено неравенство $\|\varphi'(x)^{-1}\|\le K$, а $\varphi''(x)$ ограничена в окрестности каждой точки из сферы (*).

Тогда: I). Уравнение $\dot{x}=-\varphi'(x)^{-1}\varphi(x), \dot{x}(0)=x_0$, где x_0 содержится в сфере (*), имеет решение $x=x(t)$ для значений t в промежутке $0\le t<\infty$, причем его значения лежат в сфере (*).

2). Существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=x^*$, служащий корнем $\varphi(x)$.

Мы должны проверить выполнимость условий теоремы работы [2], исходя из основных предпосылок относительно интегрального уравнения (I), сформулированных в теореме I работы [I]:

A). Пусть внутри замкнутой области $D \in C^{(L)}_{(a,b)}$ существует $u^*(x)$ - единственное решение уравнения (I). В случае неединственности предполагается, что D входит в область локализации решения, т.е. в область $z(x) \le u(x) \le Z(x)$; $z, Z \in C^{(L)}_{(a,b)}$.

Функция $f(x, \xi, u)$ в (I) предполагается непрерывной по совокупности переменных, дважды непрерывно дифференцируемой по u и удовлетворяющей в D условию Липшица по x вместе с производной $f'_u(x, \xi, u)$.

B). Для любого $\hat{u} \in D$ однородное линейное уравнение, в левой части которого стоит производная Фреше оператора $Au(x)$ по $\hat{u}$

$$A'_{\hat{u}}\, u(x) \equiv u(x) - \int_a^b f'_{\hat{u}}(x, \xi, \hat{u}(\xi))\, u(\xi)\, d\xi = 0, \tag{6}$$

имеет только тривиальное решение $u(x) \equiv 0$.

Будем в дальнейшем изложении предполагать справедливость условий A) и B). Обозначим через $D_h \in U_h$ множество сеточных образов функций $u(x)$, входящих в область D. Для любого $\bar{u}_0 \in D_h$ производная Фреше оператора (4′), являющаяся разностным аналогом $A'_{\hat{u}} u(x)$, есть линейный оператор вида:

$$B'_h(\bar{u}; \bar{u}_0) \equiv \begin{cases} u_0 - h \sum\limits_{i=1}^{N} f'_u(a, a+ih, u_{0i}) \cdot u_i \\ u_1 - h \sum\limits_{i=1}^{N} f'_u(a+h, a+ih, u_{0i}) \cdot u_i \\ \text{-----------------} \\ u_N - h \sum\limits_{i=1}^{N} f'_u(b, a+ih, u_{0i})\, u_i \end{cases} \tag{7}$$

Сформулируем основные леммы, касающиеся свойств оператора B'_h.

<u>Лемма I</u>. Для каждого фиксированного $\bar{u}_0 \in D_h$ оператор $B'_h(\bar{u}; \bar{u}_0)$ при достаточно малом h имеет обратный $[B'_h]^{-1}(\bar{v}; \bar{u}_0)$.

<u>Лемма 2</u>. Обратный оператор $[B'_h]^{-1}(\bar{v}; \bar{u}_0)$ равномерно ограничен в D_h, т.е. для любого $\bar{u}_0 \in D_h$ и $\|\bar{v}\| < 1$ имеем

$$\| [B'_h]^{-1}(\bar{v}; \bar{u}_0) \| < K \tag{8}$$

в смысле метрики (3).

Для доказательства лемм нам потребуются некоторые понятия и обозначения из Фредгольмовой теоремы интегральных уравнений.

Операторное уравнение $B'_h(\bar{u}; \bar{u}_0) = 0$ определяет однородную линейную систему уравнений с определителем

$$\Delta_h(\bar{u}_0) = \begin{vmatrix} 1 & -hK_{01} & -hK_{02} & \dots & -hK_{0N} \\ 0 & 1-hK_{11} & -hK_{12} & \dots & -hK_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -hK_{N1} & -hK_{N2} & \dots & 1-hK_{NN} \end{vmatrix},$$

где $K_{ij} = f'_{\bar{u}_0}(a+ih, a+jh, u_{j0})$ $(i = 0, 1, \dots N;\ j = 1, \dots N)$.

Разлагая $\Delta_h(\bar{u}_0)$ по первому столбцу, получим более удобное для нас выражение

$$\Delta_h(\bar{u}_0) = \begin{vmatrix} 1-hK_{11} & -hK_{12} & \dots & -hK_{1N} \\ -hK_{21} & 1-hK_{22} & \dots & -hK_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -hK_{N1} & -hK_{N2} & \dots & 1-hK_{NN} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Если устремить h к нулю ($N \to \infty$), то сеточные образы $\bar{u}_h$ будут сближаться с соответствующими прообразами-функциями $u(x)$, а $\Delta_h(\bar{u}_o)$ будет стремиться к некоторому предельному функционалу (см. работу /3/).

$$D(u_o) = \lim_{h \to o} \Delta_h(\bar{u}_o) \tag{10}$$

Согласно /3/ назовем этот предел детерминантом Фредгольма.

Развертывая (9) по степеням h и переходя затем к пределу при $h \to 0$, мы можем получить выражение для детерминанта Фредгольма в виде ряда

$$D(u_o) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) \dots K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t_1) \dots K(t_2,t_n) \\ - - - - - - - - - \\ K(t_n,t_1) \dots K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 \dots dt_n \tag{11}$$

Здесь обозначено $K(x,y) = f'_{u_o}(x,y,u_o(y))$.

Как известно /4/, для $u_o \in D$ при выполнении условия (B)

$$D(u_o) \neq 0 \ . \tag{12}$$

<u>Доказательство леммы I</u>. Нам достаточно убедиться, что определитель $\Delta_h(u_o)$ не равен нулю при любом $\bar{u}_o \in D_h$. В силу (12) мы имеем для уравнения (6), порождающего систему (7),

$$|D(u_o)| > \delta(u_o) > 0, \tag{13}$$

а по определению (10) детерминанта Фредгольма для сеточного образа $\bar{u}_o$ функции $u_o(x)$ можно указать также положительные $h(\bar{u}_o)$ и $\delta(\bar{u}_o)$, что для всех $h < h(\bar{u}_o)$ будут выполняться неравенства

$$|\Delta_h(\bar{u}_o)| > \delta(\bar{u}_o) > 0, \tag{14}$$

доказывающие лемму I.

<u>Доказательство леммы 2</u>. В терминах системы линейных уравнений с определителем (9) утверждение леммы 2 эквивалентно независимости константы δ , ограничивающей снизу $|\Delta_h(\bar{u}_o)|$ в (14), от вектора $\bar{u}_o$, по которому берется производная Фреше.

Для доказательства леммы 2 предположим противное: пусть для некоторой последовательности констант $\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_n > 0$ и при любом h в D_h существует последовательность векторов

$$\bar{u}_1 , \bar{u}_2 , \dots , \bar{u}_n \tag{15}$$

такая, что

$$\Delta_h(\bar{u}_n) < \delta_n . \tag{16}$$

Выберем из (15) подпоследовательность

$$\bar{u}_{n_1} , \bar{u}_{n_2} , \dots , \bar{u}_{n_k} , \dots \quad , \tag{17}$$

сходящуюся в D_h к вектору $\bar{u}_o = (u_{oo}, u_{o1}, \dots , u_{oN})$, и рассмотрим соответствующую последовательность определителей

$$\Delta_h(\bar{u}_{n_1}) , \Delta_h(\bar{u}_{n_2}), \dots , \Delta_h(\bar{u}_{n_k}), \dots \quad ,$$

для каждого из которых справедливо неравенство (16).

Обозначим последовательность функций, сеточные образы которых образуют (17), через

$$u_{n_1}(x), u_{n_2}(x), \dots , u_{n_k}(x), \dots$$

и через $u_o(x)$ - функцию, сеточный образ которой есть $\bar{u}_o$.

Мы имеем последовательность $\{\Delta_x(u_{n_k})\}$ непрерывных функций параметра $\bar{u}_{n_k}$, равномерно сходящихся при $h \to 0$ к непрерывным (согласно (11)) детерминантам Фредгольма

$$D(u_{n_1}), D(u_{n_2}), \dots , D(u_{n_k}), \dots \ ,$$

для которых также будут справедливы неравенства

$$D(u_{n_k}) < \delta(\bar{u}_{n_k}). \tag{18}$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$D(u_0) = 0 \quad ,$$

что противоречит (I2).

Противоречие доказывает лемму 2.

Ш.

Теорема. Если для интегрального уравнения (I) выполнены условия A) и B), то:

I) при достаточно малых h существует решение системы (4);

2) последнее может быть получено численным решением задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (5);

3) при $h \to 0$ решение системы (4) сходится к решению уравнения (I).

Доказательство. Обозначим через $\bar{u}^{**}$ корень оперативного уравнения $B_h(\bar{u}) = 0$, а через $\bar{u}^{*}$ — сеточный образ решения $u^*(x)$ уравнения (I). Рассмотрим в пространстве U_h сферу с центром в $\bar{u}^*$

$$\|\bar{u} - \bar{u}^*\| < K \|B_h(\bar{u}^*)\| \, , \tag{I9}$$

где K - константа, ограничивающая $B_h(\bar{u})$ в (8). При $h \longrightarrow 0$ $\|B_h(\bar{u}^*)\|$ будет стремиться к нулю. Поэтому для любого K радиус сферы (I9) может быть сделан как угодно малым, и при достаточно малых h сфера окажется внутри области D_h, где для оператора B_h справедливы утверждения лемм I и 2.

Таким образом для $B_h(\bar{u})$ при достаточно малом h будут выполняться условия теоремы I работы /2/ о применимости непрерывного аналога метода Ньютона.

В соответствии с этой теоремой уравнение (5) имеет решение $\bar{u}(t)$ для значений параметра t в промежутке $0 \le t < +\infty$, причем значения решения лежат в сфере (I9) (вернее в ее расширении в пространстве V) и при $t \to \infty$ сходятся к $\bar{u}^{**}$, также принадлежащем сфере (I9).

В силу сходимости к нулю радиуса сферы (I9) мы получаем

$$\lim_{h \to 0} \|\bar{u}^{**}_h - \bar{u}^*_h\| = 0 \, . \tag{20}$$

Так как сеточный образ $\bar{u}^*_h$ решения $u^*(x)$ уравнения (I) сходится к нему самому при $h \longrightarrow 0$, то из (20) следует, что, в свою очередь, решение нелинейной разностной задачи (4) сходится к решению исходного уравнения (I).

Теорема доказана.

Замечание I.

Как видно из всех рассуждений, шаг τ при численном интегрировании системы (5) выбирается независимо от шага h по переменной x.

Таким образом, сходимость рассмотренного в настоящей работе метода к решению уравнения (I) получается при независимом стремлении шагов h и τ к нулю.

Примеры задач, решенных предложенным методом, приведены в работе /I/.

Л И Т Е Р А Т У Р А:

[I.] Е.П.Жидков, Г.А.Ососков, ДАН СССР, т.I80 №6 (1968).

[2.] М.К.Гавурин, изв. ВУЗов, математика, I958, 6 (6), I89I.

[3]. В.Ловитт. Линейные интегральные уравнения, I933.

[4]. Э.Гурса. Курс математического анализа, том 3, часть 2. I934 г., стр. 57.

Рукопись поступила в издательский отдел 26 февраля I969 года.